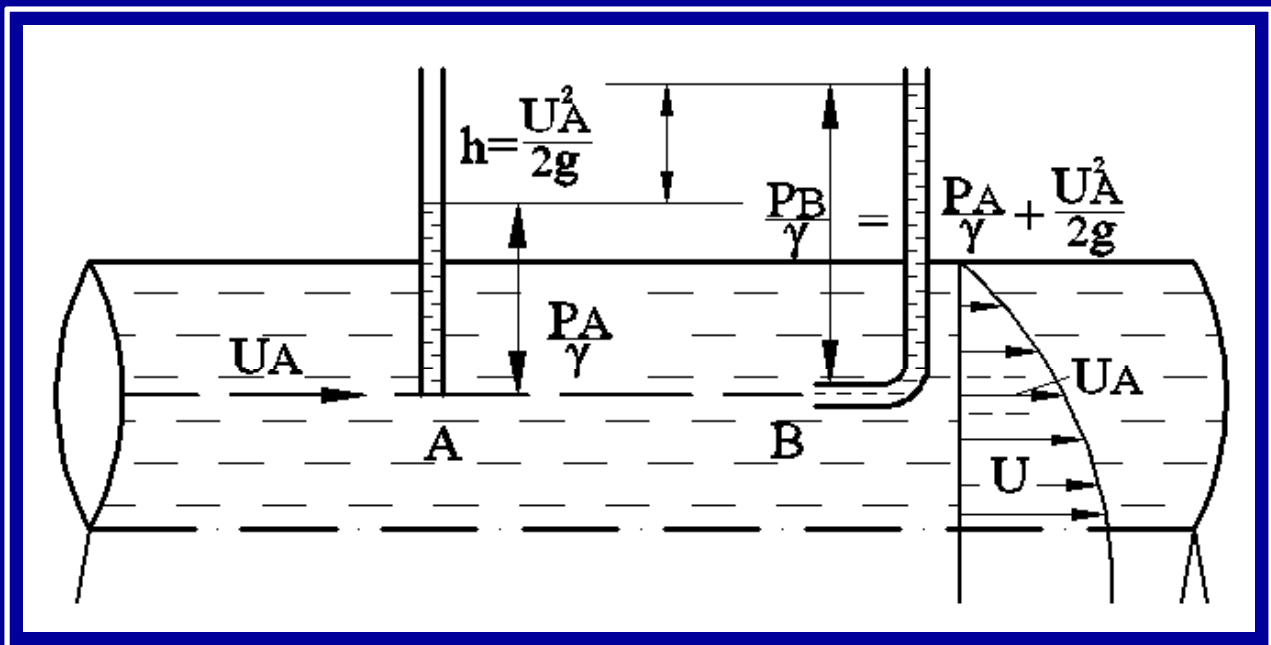


I. Bartha      V. Javgureanu

# Hidraulică

**Vol. 1**



CZU 532 (075.8)  
B 35

I.Bartha, V.Javgureanu. Hidraulică, Vol.I:

Manual pentru instituțiile de învățământ superior.

Recenzenți: dr.ing.Rusu Ilie  
dr.ing.Luca Mihail

Manualul cuprinde noțiuni de hidraulică, hidrocinematică, hidromecanică și calculul sistemelor hidraulice sub presiune. În fiecare capitol aspectele teoretice sunt exemplificate prin probleme practice concrete reprezentative.

Lucrarea se adresează studenților și specialiștilor din domeniul hidrotehnicii, hidroameliorațiilor și ingineriei mediului, dar poate fi oportună pentru o sferă mai largă de specialități.

ISBN 9975-910-12-2

© Bartha Iosif, Javgureanu Vasile

Chișinău: Editura "Tehnica" U.T.M., 1998 - 460 p.

## **PREFAȚĂ**

*Acest manual are scopul principal de a-i sprijini pe cei care învață hidraulica pentru a o folosi în soluționarea problemelor tehnice și științifice. Prin conținutul său modul de expunere, lucrarea este adresată studenților, dar poate fi folosită și de specialiști care vin în contact cu problemele hidraulice, pentru aprofundarea și lărgirea cunoștințelor din acest domeniu.*

*Primul volum al manualului, structurat pe 10 capitole, cuprinde aspecte teoretice - fizice și matematice - ale fenomenelor, precum și aplicațiile acestora în domeniul hidrotehnicii, ingineriei mediului și altor ramuri ale tehnicii. Fiecare capitol cuprinde și câteva exemple concrete care înlesnesc înțelegerea facilă a expunerilor. Manualul conține grafice și tabele cu parametrii și coeficienți care permit abordarea concretă a problemelor ingineresti. S-a renunțat la anumite metode depășite istoric, fiind prezentate numai cele actuale și moderne.*

*Pe lângă dorința de a pune la îndemâna celor interesați un material didactic și științific util, lucrarea are și scopul de a îmbogăți literatura tehnică din domeniul din Republica Moldova în limba și scrierea oficială a țării.*

*Manualul este rezultatul unei îndelungate experiențe didactice și științifice și al unei colaborări fructuase.*

*Mulțumim și pe această cale tuturor celor care ne-au sprijinit sub diverse forme, atât moral cât și material în elaborarea și apariția acestui manual.*

**Autorii**

## CUPRINS

### 1. Introducere

1.1.	Obiectul hidraulicii și scurtul ei istoric.....	11
1.1.1.	Obiectivul și rolul în formarea specialistului hidrotehnician.....	11
1.1.2.	Scurt istoric al dezvoltării hidraulicii.....	12
1.2.	Metode generale de studiu în hidraulică.....	14
1.2.1.	Metoda teoretică.....	14
1.2.2.	Analiza dimensională.....	15
1.2.3.	Metoda experimentală.....	23
1.3.	Similitudinea hidraulică.....	24
1.3.1.	Similitudinea geometrică.....	25
1.3.2.	Similitudinea cinematică.....	25
1.3.3.	Similitudinea dinamică.....	26

### 2. Principalele caracteristici fizice ale fluidelor

2.1.	Structura materiei și stările de agregare.....	30
2.2.	Principalele proprietăți fizice ale fluidelor.....	33
2.2.1.	Masa specifică – densitatea.....	33
2.2.2.	Compresibilitatea izotermă, elasticitatea.....	36
2.2.3.	Vâscozitatea.....	39
2.2.4.	Adeziunea la suprafețe solide.....	44
2.2.5.	Tensiunea superficială. Capilaritatea.....	45
2.2.6.	Absorbția gazelor.....	54
2.2.7.	Cavitația.....	54
2.2.8.	Difuzia.....	57
2.2.9.	Dilatația termică.....	58
2.2.10.	Conductibilitatea termică.....	60
2.2.11.	Proprietățile electrice ale apei.....	62
2.3.	Modele de lichid.....	62
2.4.	Aplicații privind caracteristicile fizice ale fluidelor.....	62

### 3. Ecuațiile generale de mișcare ale mediilor continue

3.1.	Ecuațiile diferențiale de mișcare ale mediilor continue.....	67
3.2.	Starea de tensiune în jurul unui punct.....	71



## 4. Hidrostatica

4.1.	Ecuatiile echilibrului static al fluidelor.....	74
4.1.1.	Starea de tensiune și presiunea.....	74
4.1.2.	Ecuatiile generale ale hidrostaticii și consecințele sale.....	76
4.2.	Ecuatia hidrostaticii în câmp gravitațional.....	81
4.2.1.	Ecuatiile hidrostaticii în câmp gravitațional pentru lichide și gaze.....	81
4.2.2.	Clasificarea presiunilor.....	86
4.2.3.	Dimensiunea și unitățile de măsură ale presiunilor. Diagrame de presiune.....	87
4.2.4.	Interpretarea geometrică și energetică a legii hidrostaticii în câmp gravitațional.....	88
4.2.5.	Măsurarea presiunilor. Metode și aparate.....	93
4.3.	Echilibrul relativ al lichidelor în diferite câmpuri de forță.....	101
4.3.1.	Echilibrul relativ al lichidului în vas cu mișcare uniform accelerată.....	101
4.3.2.	Echilibrul relativ de rotație al lichidelor.....	105
4.3.3.	Echilibrul relativ al lichidelor în curbe (cotituri).....	109
4.4.	Acțiunea lichidelor pe suprafețe solide.....	110
4.4.1.	Forța hidrostatică pe suprafețe plane.....	111
4.4.2.	Forța hidrostatică pe suprafețe curbe.....	117
4.4.3.	Forța hidrostatică pe suprafețe închise.....	122
4.5.	Stabilitatea echilibrului corpurilor plutitoare.....	125
4.5.1.	Noțiuni asupra plutitorilor.....	125
4.5.2.	Teoremele plutirii de suprafață.....	127
4.5.3.	Stabilitatea plutirii.....	131
4.5.4.	Oscilațiile plutitorilor.....	132
4.6.	Aplicații.....	135

## 5. Hidrocinematica (Cinematica fluidelor)

5.1.	Sisteme de reprezentare în hidrocinematică.....	147
5.1.1.	Sistemul Lagrange.....	147
5.1.2.	Sistemul Euler.....	149
5.1.3.	Legătura între sisteme de reprezentare.....	152
5.2.	Elemente cinematice caracteristice mișcării fluidelor.....	152
5.2.1.	Câmpul vitezelor.....	152
5.2.2.	Elementele mișcării unei particule de fluid.....	159

5.2.3.	Descompunerea mișcării particulei de fluid.....	162
5.2.4.	Clasificarea mișcării fluidelor.....	164
5.3.	Ecuția de continuitate.....	164
5.3.1.	Ecuția de continuitate în coordonate carteziane.....	165
5.3.2.	Ecuția de continuitate pentru curent din tub.....	167
5.4.	Aplicații.....	168
<b>6. Dinamica fluidelor Euleriene</b>		
6.1.	Ecuțiile de mișcare ale fluidelor euleriene.....	173
6.1.1.	Ecuțiile diferențiale ale mișcării sub forma dată de Euler.....	173
6.1.2.	Ecuțiile de mișcare ale fluidelor euleriene sub formele date de Helmholtz și Gromeka-Lamb.....	177
6.1.3.	Ecuțiile de mișcare ale fluidelor euleriene în coordonate intrinseci.....	180
6.2.	Ecuția energiei (Ecuția lui Bernoulli).....	183
6.2.1.	Ecuția energiei (Bernoulli) pentru un fir de fluid....	183
6.2.2.	Ecuția energiei pentru curent de fluid eulerian de secțiune finită.....	189
6.2.3.	Ecuția energiei pentru model de fluid newtonian și real.....	193
6.2.4.	Aplicațiile ecuației energiei.....	195
6.3.	Puterea curentului în secțiune.....	206
6.4.	Teorema impulsului (cantității de mișcare) și teorema momentului cinetic.....	210
6.4.1.	Forma generală a teoremei impulsului și momentului cinetic.....	210
6.4.2.	Teorema impulsului și momentului cinetic pentru lichid din tubul de curent.....	215
6.4.3.	Aplicațiile teoremei impulsului și momentului cinetic.....	218
6.5.	Aplicații.....	232
<b>7. Dinamica fluidelor reale</b>		
7.1.	Regimuri de mișcare.....	243
7.2.	Ecuțiile generale ale mișcării fluidelor reale (Ecuțiile Navier - Stokes).....	245
7.2.1.	Ecuțiile mișcării în regim laminar.....	245

7.2.2.	Caracteristicile mișcării în regim turbulent.....	249
7.2.3.	Teoria amestecului turbulent.....	251
7.2.4.	Eforturile suplimentare turbulente (aparente).....	254
7.2.5.	Ecuatiile mișcării în regim turbulent (Ecuatiile Reynolds).....	256
7.3.	Teorema stratului limită.....	258
7.3.1.	Aspectul fizic al stratului limită.....	258
7.3.2.	Grosimea stratului limită.....	261
7.3.3.	Formarea profilului de viteză în conducte și între plăci plan paralele.....	264
7.4.	Mișcarea laminară a fluidelor newtoniene și reale	265
7.4.1.	Mișcarea laminară în conducte circulare rectilinii (Mișcarea Hagen-Poiseuille).....	266
7.4.2.	Unele soluții exacte și aproximative ale ecuațiilor Reynolds.....	272
7.5.	Mișcarea turbulentă a fluidelor newtoniene și reale.....	280
7.5.1.	Teorema coeficientului de vâscozitate aparent turbulent.....	281
7.5.2.	Teoria lungimii de amestec.....	281
7.5.3.	Teoria transportului de vârtejuri.....	284
7.5.4.	Teoria similitudinii vitezelor pulsatorii.....	284
7.5.5.	Distribuția de viteze în mișcare turbulentă.....	285
7.5.6.	Teoriile statice ale turbulenței.....	290
7.6.	Aplicații.....	290

## **8. Calculul rezistențelor hidraulice și al pierderilor de sarcină**

8.1.	Exprimarea pierderilor de sarcină.....	298
8.2.	Rugozitatea pereților.....	302
8.3.	Pierderi de sarcină liniare.....	304
8.3.1.	Calculul pierderilor de sarcină distribuite în zona turbulenței netede.....	304
8.3.2.	Calculul pierderilor de sarcină distribuite în conducte rugoase.....	307
8.3.3.	Criterii de stabilire a legii pierderilor de sarcină în regimul turbulent.....	311
8.3.4.	Calculul pierderilor de sarcină distribuite în zona turbulenței de tranziție.....	317
8.3.5.	Formule și grafice speciale pentru calculul lui $\lambda$ și $j$ ..	320

8.4.	Calculul pierderilor de sarcină distribuite în curenți turbulenți cu nivel liber.....	324
8.5.	Calculul pierderilor locale de sarcină.....	328
8.5.1.	Pierdere de sarcină locală la lărgirea bruscă a secțiunii.....	330
8.5.2.	Coeficientul de pierdere locală de sarcină la câteva singularități.....	332
8.6.	Principiul compunerii pierderilor de sarcină.....	332
8.7.	Rezistența la înaintare.....	337
8.8.	Aplicații.....	343

## **9. Mișcări permanente în conducte și rețele de conducte sub presiune**

9.1.	Generalități.....	348
9.1.1.	Principii și probleme generale ale calcului conductelor sub presiune.....	350
9.2.	Calculul hidraulic al conductelor scurte, monofilare.....	351
9.2.1.	Calculul hidraulic al conductelor de aspirație.....	355
9.2.2.	Calculul hidraulic al grosimii de fund a unui lac de acumulare.....	357
9.2.3.	Calculul hidraulic al sifoanelor ridicătoare.....	359
9.2.4.	Calculul hidraulic al conductelor aferente instalațiilor de pompare.....	361
9.3.	Calculul hidraulic al conductelor lungi.....	363
9.3.1.	Calculul hidraulic al conductelor lungi în serie.....	363
9.3.2.	Calculul conductelor lungi în paralel.....	367
9.3.3.	Calculul hidraulic al conductelor ramificate (problema celor trei rezervoare).....	369
9.3.4.	Calculul hidraulic al conductelor cu debit uniform distribuit.....	373
9.3.5.	Calculul hidraulic al conductelor care distribuie debite constante la echidistanță.....	377
9.3.6.	Calculul economic de conducte ramificate.....	383
9.4.	Calculul rețelilor de conducte ramificate.....	385
9.4.1.	Verificarea rețelilor de conducte ramificate.....	386
9.4.2.	Dimensionarea rețelilor de conducte ramificate.....	388
9.5.	Calculul rețelilor de conducte inelare.....	394
9.5.1.	Verificarea rețelei de conducte inelare.....	397

9.5.2.	Dimensionarea rețelei de conducte inelare.....	401
9.6.	Aplicații.....	402
<b>10. Mișcarea nepermanentă a lichidelor în sisteme hidraulice sub presiune</b>		
10.1.	Noțiuni generale.....	416
10.2.	Mișcarea nepermanentă rapid variată (lovitură de berbec).....	417
10.2.1.	Descrierea fizică a fenomenului loviturii de berbec..	417
10.2.2.	Lovitură de berbec în conductă monofilară, gravitațională pentru $T_p < r$ .....	420
10.2.3.	Lovitură de berbec în conductă monofilară, gravitațională pentru $T_p < t$ .....	421
10.2.4.	Viteza de propagare a undei loviturii de berbec.....	423
10.2.5.	Ecuatiile diferențiale ale loviturii de berbec.....	427
10.2.6.	Reflexia și refracția undelor.....	437
10.2.7.	Metoda caracteristicilor pentru calculul loviturii de berbec.....	439
10.2.8.	Mijloace de protecție a conductelor împotriva efectelor loviturii de berbec.....	467
10.2.9.	Fenomene asociate loviturii de berbec. Stabilitatea sistemelor hidraulice sub presiune.....	469
10.3.	Mișcarea nepermanentă lent variată (oscilații de masă).....	473
10.3.1.	Ecuatiile mișcării lent variate.....	473
10.3.2.	Integrarea exactă a ecuațiilor mișcării.....	475
10.3.3.	Alte metode de soluționare ale ecuațiilor mișcării....	487
10.4.	Aplicații.....	490
Bibliografie.....		500

## CAPITOLUL 1

### INTRODUCERE

#### 1.1. Obiectul hidraulicii și scurtul ei istoric

##### 1.1.1. Obiectivul și rolul hidraulicii în formarea specialistului hidrotehnician

Diferite ramuri ale științelor se ocupă cu studiul stării fluide a materiei și în special a apei. Multitudinea de denumiri ale ramurilor științei legate de studiul fluidelor arată diversitatea aspectelor dezbătute.

**Mecanica fluidelor**, deseori numită și **hidromecanică**, dezbate în general, legile fluidelor ideale cu mijloacele matematicii superioare, fără să se sprijine pe rezultatele cercetărilor experimentale.

**Hidraulica** este disciplina care se ocupă cu studiul legilor de repaus și de mișcare ale fluidelor, precum și cu aplicarea acestor legi la rezolvarea problemelor ingineresti. Domeniul ei de aplicabilitate corespunde mărimii parametrilor la care lichidele și gazele se supun unor legi comune. La alți parametri se vorbește de **Mecanica lichidelor**, **Mecanica gazelor**, **Pneumatică** etc. Din definiția hidraulicii rezultă dublul ei caracter, referitor la studiile și cercetările pe care le efectuează: caracterul **fundamental**, în sensul că primul său obiectiv este stabilirea legilor de bază, a modelelor teoretice și relațiilor de calcul privind repausul și mișcarea fluidelor și caracterul **aplicativ**, în sensul că al doilea obiectiv este aplicarea legilor, modelelor, relațiilor de calcul în soluționarea problemelor ingineresti. Cel de al doilea obiectiv îi conferă Hidraulicii natura de disciplină tehnică.

Denumirea de hidraulică derivă din cuvintele grecești *üdor* (apă) și *aulos* (tub), care la început avea semnificație de "orgă de apă". Ulterior denumirea a fost utilizată la mișcarea apei în conducte, ce se presupune că ar fi fost prima preocupare a acestei ramuri a științelor naturii; aceasta reflectă importanța deosebită pe care o aveau în antichitate problemele transportului apei în conducte.

În timp hidraulica s-a dezvoltat în două ramuri:

- hidraulică teoretică (ramură a mecanicii fluidelor), care utilizează metodele și rezultatele mecanicii fluidelor și
- hidraulică aplicată, care rezolvă probleme practice cu ajutorul studiului teoretic (însă accesibilă inginerilor și tehnicienilor) și experimental.

Dezvoltarea tehnicii de calcul diminuează diferențele între cele două ramuri; fiindcă există condiții de renunțare la ipoteze simplificatoare, se pot elabora noi modele de calcul - descrise de relații complicate, care însă se pot soluționa operativ.

Hidraulica este împărțită în mai multe diviziuni:

- **hidrostatica teoretică** - dezbate starea de repaus a fluidelor și acțiunea lor asupra solidelor cu care sunt în contact;

- **hidrocinematica** - se ocupă cu mișcarea fluidelor, fără să se țină seama de forțele care determină mișcare și de transformările energetice produse;

- **hidrodinamica** - studiază mișcarea fluidelor ținând seama de forțele care le produc și de transformările energetice în fluidele în mișcare.

Hidraulica aplicată este împărțită și ea în diviziuni în funcție de domeniul de activitate. În domeniul hidrotehnic interesează: hidraulica curgerilor sub presiune, hidraulica curgerilor cu nivel liber și hidraulica subterană.

Disciplina de hidraulică prezintă importanță deosebită în formarea specialistului hidrotehnician fie el de îmbunătățiri funciare, construcții și instalații hidrotehnice sau de ingineria mediului. Proiectarea, execuția și exploatarea sistemelor hidrotehnice, de gospodărirea apei, de irigații, desecări, drenaj, regularizări de râuri, acumulări, alimentări cu apă și canalizări, stații de pompare, microhidrocentrale și în contextul protecției mediului cer hidrotehnicienilor cunoștințe aprofundate de hidraulică.

### 1.1.2. Scurt istoric al dezvoltării hidraulicii

Hidraulica s-a dezvoltat ca urmare a cerințelor practicii și în strânsă dependență cu alte discipline, mult timp însă a avut caracter tehnic-experimental empiric. Importante lucrări tehnice - privite ca aplicații ale hidraulicii - au fost realizate cu 4 - 5 mii de ani în urmă în Asia Mică (valea râurilor Tigru și Eufrat), China, India, Egipt și mai târziu în Grecia și Roma antică. Aceste lucrări sunt cunoscute din descrieri, iar unele au rezistat până în zilele noastre (baraje, rezervoare, apeducte, porturi, sisteme de irigații etc). Cu toate acestea hidraulica teoretică era foarte puțin dezvoltată. Unele descrieri privind cunoștințele empirice sau regulile practice au rămas de la Arhimede din Siracusa (287-212 î.e.n.) - "Despre corpurile plutitoare", Heron din Alexandria (circa 100 de ani după Arhimede), Vitruvius (25 î.e.n.) - "De architectura", Sextus Iulius Frontius (30-103) - "De aquis urbis Romae".

După circa 1500 ani, în epoca Renașterii (sec. XVI-XVII), se conturează problemele hidraulicii. Lucrarea lui Leonardo da Vinci (1452-1519) "Del moto e misura dell acqua", publicată după 300 de ani (1797) deși cuprinde observații experimentale și descrieri, n-a putut contribui la vremea autorului la dezvoltarea hidraulicii. Descoperirile lui Simon Stevin (1548-1620) privind presiunea lichidelor pe pereții și fundul vaselor și principiul vaselor comunicante, Evangelista Torricelli (1608-1647) - legea curgerii prin orificii, Blaise Pascal (1623-1662) - legea fundamentală a hidrostatiei, iar Isaac Newton (1642-1727) - legea vâscozității lichidelor și rezistența la înaintare conduc la dezvoltarea hidraulicii.

În secolul XVIII, după stabilirea principiilor mecanicii generale, se pun bazele hidraulicii teoretice. De atunci hidraulica se dezvoltă după două direcții: teoretic și experimental. Cele mai importante lucrări se datorează savanților: Daniel Bernoulli (1700-1782), fondatorul hidrodinamicii teoretice, Leonhard Euler (1707-1783), Mihail V. Lomonosov (1711-1765), Jean Baptiste d'Alambert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) etc.

În secolul XIX hidrodinamica face mari progrese. Se remarcă lucrările lui S. Poisson (1784-1840), L. Navier (1785-1836), A. Cauchy (1789-1857), J. Poncelet (1788-1867), G. Coriolis (1792-1843), A. Saint-Venant (1797-1886), J. Poiseuille (1799-1869), M. Ostrogradski (1801-1862), H. Darcy (1803-1858), J. Weissbach (1810-1879), W. Froude (1801-1862), G. Stokes (1819-1929), H. Bazin (1829-1917), J. Boussinesque (1842-1829) ș.a.. În acest secol sunt introduse noțiunile cinematice ale mișcării fluidelor, se stabilesc ecuațiile generale ale mișcării fluidelor vâscoase, sunt descoperite și analizate regimurile de curgere, criteriile de similitudine hidraulică, sunt descoperite ecuațiile generale de mișcare a apelor subterane. Prin cercetări experimentale sunt stabilite legi empirice ale mișcării permanente în conducte și canale, ale mișcării peste deversoare, problemele mișcării permanente neuniforme și ale mișcării nepermanente, legile filtrației etc.

În secolul XX se pun și bazele aerodinamicii care a condus la o teorie unitară a mecanicii fluidelor. Contribuții importante la dezvoltarea mecanicii fluidelor au avut: N. Jukovski, K. Tilkovski, S. Ceaplîghin, L. Prandtl, Th. Kármán, J. Nikuradze, M. Velikanov, L. Loitianski, L. Allievi, F. Prasil, D. Thoma, E. Vogt, L. Escande, N. Pavlovski, B. Bahmetev, S. Hristianovici, V. Goncearov, A. Zegjda, E. Zamarin, P. Du Boys, A. Schoklitsch, E. Mayer-Peter, H. Eistein, C. White, Chien Ning, I. Agroskin, R. Ciugaev, P. Kiselev, M. Certousov, A. Trokolanski etc.



În România lucrări hidrotehnice importante se fac după 1880, dar publicațiile și cercetările științifice încep abia în secolul XX. Sunt demne de remarcat contribuția lui Gogu Constantinescu la crearea sonicității și studiile lui Elie Carafoli asupra aerodinamicii profilelor de aripi la avion. Printre vârfurile hidraulicienilor români se situează D. Ghermani, I. Andreescu Cale, A. Bărglăzan, Cr. Mateescu, D. Pavel, D. Dumitrescu ș.a.

Laboratoare de hidraulică, cu instalații și aparatură de înalt nivel, efectuează cercetări fundamentale și aplicative. Pe lângă laboratoarele I.C.H., Universitățile Tehnice ICEMENERG, Academia Română și universitățile tehnice importante realizează cercetări remarcabile.

## **1.2. Metode generale de studiu în hidraulică**

Hidraulica, precum toate științele naturii, folosește în investigații metode teoretice și experimentale. O justă îmbinare a acestor metode conduce la rezultate în cercetarea și explicarea fenomenelor de orice natură, inclusiv hidraulice. La îmbinarea celor două metode de studiu, importanță mare prezintă similitudinea hidraulică.

### **1.2.1. Metoda teoretică**

Problemele de studiu ale mecanicii fluidelor și ale hidraulicii se referă la echilibrul static și la mișcarea fluidelor, stare a materiei caracterizată prin deformabilitate ușoară.

Formularea și interpretarea legilor hidraulicii este posibilă prin studiul pe cale teoretică, ceea ce constă în aplicarea teoremelor din mecanică și a aparatului matematic adecvat. Complexitatea fenomenelor reale necesită elaborarea unor scheme de calcul care simplifică fenomenul. **Schema de calcul** se obține prin eliminarea anumitor aspecte secundare ale fenomenelor, ceea ce simplifică problema și permite exprimarea sa printr-un model matematic. În anumite cazuri se pot utiliza legile mecanicii clasice, fluidul fiind considerat ca un sistem de puncte materiale discrete – molecule. În alte cazuri sistemul de puncte materiale complică problemele, iar pentru studiu se consideră particule mai mari decât moleculele ce umplu complet spațiul. În astfel de situații particulele se consideră arbitrar atât de mici, încât asupra lor să nu influențeze mișcarea moleculelor sau mișcarea browniană. Modelul de fluid astfel definit este un **mediu continuu**.

Chiar modelul de mediu continuu poate avea în hidraulică diferite grade de complexitate, și anume: model Euler, model Newton, model Pascal sau model real de fluid.

### 1.2.2. Analiza dimensională

Un instrument important al metodei teoretice îl reprezintă analiza dimensională. Ea studiază structura relațiilor fizice pentru a găsi regulile de formare ale acestora și se bazează pe faptul că fenomenele naturale sunt guvernate de legi obiective, exprimabile prin simbolism matematic. Trebuie ținut seama de faptul că relațiile fizice se referă la mărimi dimensionale (fizice) pe când relațiile matematice operează cu numere abstracte.

**1. Mărimea fizică** reflectă cantitativ și calitativ un aspect al unui fenomen. Cantitatea se exprimă prin numere, rezultate dintr-o operație de măsurare (comparare), iar calitatea prin unitatea de măsurare, caracteristică a dimensiunii. Astfel se poate scrie:

mărime fizică = valoare numerică  $\times$  unitate de măsurare,

sau

$$x_i = X_i \cdot a_i \quad (1.1)$$

Operațiile matematice cu mărimi fizice sunt:

**adunare – scădere**

$$x_1 + x_2 = X_1 \cdot a + X_2 \cdot a = (X_1 + X_2)a_1 \quad (1.2)$$

care se poate efectua numai pentru mărimi care au aceeași unitate de măsură și **produs-cât**

$$x = x_1 \cdot x_2 = (X_1 \cdot a_1)(X_2 \cdot a_2) = X_1 \cdot X_2 \cdot a_1 \cdot a_2 \quad (1.3)$$

Prin produs (cât) se obține o nouă mărime fizică, cu unitatea de măsurare  $a_1 \cdot a_2$ .

## 2. Dimensiune. Unități de măsurare. Sisteme de unități de măsurare

**Dimensiunea** exprimă, sub aspect calitativ, anumite proprietăți ale mărimilor fizice și este legată de **sistemele de măsurare**. Orice sistem de măsurare are câteva dimensiuni de bază. Sistemul internațional - S.I. (a fost introdus prin STAS 737-72) cuprinde 7 dimensiuni fundamentale, cu unitățile de măsurare aferente (tabelul 1.1.)

**Tabelul 1.1.** Dimensiuni și unități fundamentale în S.I.

Nr. crt.	Denumirea	Simbolul dimensiune	Unitate de măsurare
1.	Lungime	L	m
2.	Masă	M	kg
3.	Timp	T	s
4.	Intensitatea curentului	I	A
5.	Temperatura termodinamică	$\theta$	°K
6.	Intensitatea luminoasă	c	cd
7.	Cantitatea de substanță	mol	mol

Hidraulica făcând parte din mecanică operează cu cele trei dimensiuni specifice mecanicii - lungime, masă și timp. Uneori însă se mai utilizează și celelalte dimensiuni, în special la caracterizarea proprietății fluidelor.

Toate celelalte mărimi utilizate sunt derivate. În hidraulică se întâlnesc mărimile derivate din tabelul 1.2.

**Tabelul 1.2.** Mărimi fizice utilizate în hidraulică

Mărimea fizică	Simbol	Formula dimensională	Mărimea fizică	Simbol	Formula dimensională
Arie	A,	$L^2$	Momentul forței față de punct sau axă	$\overline{M}$	$L^2MT^{-2}$
Volum	W,	$L^3$	Cantitate de mișcare	$\overline{H}$	$LMT^{-1}$
Unghi, unghi solid	$\alpha, \beta, \theta$	-	Moment cinetic	$\overline{K}$	$L^2MT^{-1}$
Moment static al suprafeței plane	S, $M_1$	$L^3$	Lucrul mecanic, Energie	L,E,U	$L^2MT^{-2}$
Moment de inerție al suprafeței	I, $M_2$	$L^4$	Putere	P	$L^2MT^{-3}$
Viteză	$\vec{v}, \vec{V}$	$LT^{-1}$	Efort unitar	$\overline{\tau}$	$L^{-1}MT^{-2}$
			Presiune	p	

Accelerație	$\vec{a}$	$LT^{-2}$	Coefficient de compresibilitate izotermă	$\beta$	$LM^{-1}T^2$
Accelerație terestră	$\vec{g}$	$LT^{-2}$	Coefficient de vâscozitate dinamică	$\mu$	$L^{-1}MT^{-1}$
Viteză unghiulară	$\vec{\omega}$	$T^{-1}$	Coefficient de vâscozitate cinematică	$\nu$	$L^2T^{-1}$
Accelerație unghiulară	$\vec{a}_r$	$T^{-2}$	Coefficient de tensiune superficială	$\sigma$	$MT^{-2}$
Perioadă	$T_0$	$T$	Debit volumic	$Q$	$L^3T^{-1}$
Frecvență	$f$	$T^{-1}$			
Lungime de undă	$\lambda$	$L$	Debit masic	$Q_m$	$MT^{-1}$
Densitate	$\rho$	$L^{-3}M$	Debit de greutate	$Q_g$	$LMT^{-3}$
Forță	$\vec{F}, \vec{P}$	$LMT^{-2}$	Coefficient de dilatare volumică izobară	$\alpha$	$\theta$
Greutate	$\vec{F}_g, \vec{G}$	$LMT^{-2}$			
Greutate specifică	$\gamma$	$L^{-2}MT^{-2}$			

Pentru mărimile fizice  $x_i, y_i$  corespund dimensiunile  $A_i, B_i$ , unitățile de măsurare  $a_i, b_i$  și cantitățile  $X_i, Y_i$ .

**3. Reguli de formare a relațiilor fizice.** O relație fizică exprimă legea de desfășurare a unui fenomen sub forma unei dependențe funcționale:

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

Formularea matematică are doar rol de investigare, dar pentru a permite operațiile matematice, relația fizică trebuie să fie reductibilă la operații între numere. Acest deziderat este exprimat **de prima teoremă** a analizei dimensionale, "teorema omogenității" și anume: *Pentru ca o relație fizică să fie reductibilă la o relație între numere, aceasta trebuie să fie omogenă, din punct*

*de vedere dimensional, în raport cu un sistem coerent de dimensiuni fundamentale.*

În cazul modificării sistemului de unități de măsurare, ca o relație fizică să nu-și modifice forma trebuie să fie satisfăcută **a II-a teoremă** a analizei dimensionale: *Pentru ca o relație fizică, omogenă în raport cu un anumit sistem de unități de măsurare, să nu-și modifice forma la schimbarea sistemului de unități de măsurare este necesar ca dimensiunile mărimilor derivate în ambele sisteme să fie exprimate de formule dimensionale monome.*

**Exemplu:** Dacă  $B_i$  este dimensiunea unei mărimi derivate  $y_i$ , iar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt dimensiunile mărimilor fundamentale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , formula dimensională a lui  $y_i$  este:

$$y_i = B_i = A_1^{d_{1i}} \cdot A_2^{d_{2i}} \cdot \dots \cdot A_n^{d_{ni}} \quad (1.5)$$

$d_{ji}$  fiind exponenții dimensionali. Mărimea  $y_i$  se poate scrie

$$y_i = Y_i \cdot a_1^{d_{1i}} \cdot a_2^{d_{2i}} \cdot \dots \cdot a_n^{d_{ni}} \quad (1.6)$$

Monomul  $a_1^{d_{1i}} \cdot a_2^{d_{2i}} \cdot \dots \cdot a_n^{d_{ni}}$  este unitatea de măsurare derivată a mărimii  $y_i$ .

**Mărimi și complexe adimensionale** sunt mărimile care în relația lor dimensională au toți exponenții dimensionali nuli, deci

$$y_i = B_i = A_1^0 \cdot A_2^0 \cdot \dots \cdot A_n^0 = 1 \quad (1.7)$$

Această condiție este îndeplinită de rapoartele a două sau mai multor mărimi dimensionale care caracterizează un fenomen fizic concret. Numerele abstracte nu se încadrează în definiția de mai sus.

Complexele adimensionale care caracterizează fenomene fizice și au roluri speciale se numesc criterii. Valorile critice ale acestor complexe adimensionale sunt numere intrinseci ale fenomenelor. Complexele adimensionale pot fi privite și ca numere, fiindcă sunt raportul a unor mărimi cu aceleași dimensiuni și se notează cu  $\pi$ .

$$\pi = \frac{y_i}{y_0}, \text{ cu } [y_i] = [y_0] \quad (1.8)$$

**A III-a teoremă** a analizei dimensionale "teorema produselor" (teorema  $\pi$  sau teorema Vaschy-Buckingham) este o teoremă de inducție completă, folosită pentru descoperirea (și scrierea sub formă de relație fizică) a legilor unor fenomene care nu se cunosc. Există doar informații cu privire la mărimile care pot descrie fenomenele, dar nu se cunoaște legea însăși. Cu ajutorul teoremei produselor, relațiile pot fi scrise sub forme simple dacă la formarea lor se folosesc complexe adimensionale, definite în raport cu fenomenele studiate.

O relație fizică, constituită prin respectarea primelor două teoreme ale analizei dimensionale, de forma:

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_p, \dots, x_n), \quad (1.9)$$

care reflectă un fenomen concret dat și cuprinde  $n + 1$  mărimi  $(x_1, \dots, x_n, y_i)$ , exprimată în sistemul de măsurare  $x_1 \dots x_n$ , poate fi scrisă ca o relație între  $n + 1 - k$  complexe adimensionale și  $k(x_1, \dots, x_k)$  mărimi fundamentale, astfel:

$$x_p = X_p \cdot a_1^{e_{1p}} \cdot a_2^{e_{2p}} \dots a_k^{e_{kp}} \quad (1.10)$$

unde  $p = k + 1, \dots, n$ , respectiv

$$y_i = Y_i \cdot a_1^{d_{1i}} \cdot a_2^{d_{2i}} \dots a_k^{d_{ki}} \quad (1.11)$$

Monoamele formate cu ajutorul unităților de măsurare  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sunt mărimi determinante ale mărimii fizice studiate, iar  $X_p$  și  $Y_i$  sunt complexe adimensionale definite prin relațiile:

$$X_p = \pi_{xp} = \frac{x_p}{a_1^{e_{1p}} \cdot a_2^{e_{2p}} \dots a_k^{e_{kp}}} \quad (1.12)$$

și

$$Y_i = \pi_{yi} = \frac{y_i}{a_1^{d_{1i}} \cdot a_2^{d_{2i}} \dots a_k^{d_{ki}}} \quad (1.13)$$

Complexele adimensionale corespunzătoare mărimilor fundamentale sunt unitare, iar

$$Y_i = \pi_{y_i} = \phi_i \left( 1, 1, \dots, 1, \pi_{x_{k+1}}, \dots, \pi_{x_p}, \dots, \pi_{x_n} \right) \quad (1.14)$$

$$y_i = \phi_i \left( \pi_{x_{k+1}}, \dots, \pi_{x_p}, \dots, \pi_{x_n} \right) \cdot x_1^{d_{1i}} \cdot x_2^{d_{2i}} \cdot \dots \cdot x_k^{d_{ki}} \quad (1.15)$$

Astfel mărimea  $y_i$  este exprimată în funcție de  $x_1, \dots, x_k$  mărimi principale, iar influența mărimilor  $x_{k+1}, \dots, x_n$  este luată în considerare printr-o funcție globală  $\phi_i$ , determinată de complexe adimensionale  $\pi_{x_{k+1}}, \dots, \pi_{x_n}$ .

Teorema produselor are o largă întrebuințare la stabilirea formei relațiilor fizice când se cunosc factorii fizici de care depinde fenomenul, dar nu se cunoaște legea.

În probleme de mecanică (implicit și hidraulică) sunt trei mărimi fundamentale: lungimea [L], masa [M] și timpul [T]. Pentru ca trei mărimi derivate  $x_1, x_2, x_3$ , exprimate prin

$$x_1 = X_1 L^{a_1} M^{b_1} T^{c_1}; \quad x_2 = X_2 L^{a_2} M^{b_2} T^{c_2}; \quad x_3 = X_3 L^{a_3} M^{b_3} T^{c_3} \quad (1.16)$$

să fie mărimi fundamentale în descrierea fenomenului este necesar ca determinantul exponenților dimensionali să fie nenul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.17)$$

Dacă un fenomen fizic este caracterizat prin mărimile

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.18)$$

iar dimensiunile de bază sunt  $L, M$  și  $T$ , pe baza tabelului

	$x_1$	$x_2$	.	.	.	$x_n$	$y$
L	$a_1$	$a_2$	.	.	.	$a_n$	$a_0$
M	$b_1$	$b_2$	.	.	.	$b_n$	$b_0$
T	$c_1$	$c_2$	.	.	.	$c_n$	$c_0$

se poate forma matricea exponenților dimensionali

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

Din matricea  $A$  se extrag determinanți de ordin maxim nenuli. În funcție de mărimile care admit această condiție se compune, pe baza teoremei produselor, relația fizică care descrie fenomenul. Uneori aceste mărimi pot prezenta importanță diferențiată în descrierea fenomenului, iar din soluțiile multiple se reține una singură care caracterizează cel mai bine fenomenul.

Exemplu: Se cere stabilirea structurii relației pentru calculul debitului curs peste deversoare. Debitul specific curs (pe unitatea de lățime),  $q$  ( $\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ ), depinde de elementele geometrice ale deversorului ( $p$ ,  $p_1$ ,  $\delta$ ) de nivelul lichidului în amonte ( $H$ ) și în aval de deversor ( $h_n$ ), de natura lichidului ( $\rho$ ,  $\mu$ ), accelerația gravitațională ( $g$ ) ș.a., astfel:

$$q = f(p, p_1, \delta, H, \rho, \mu, g)$$

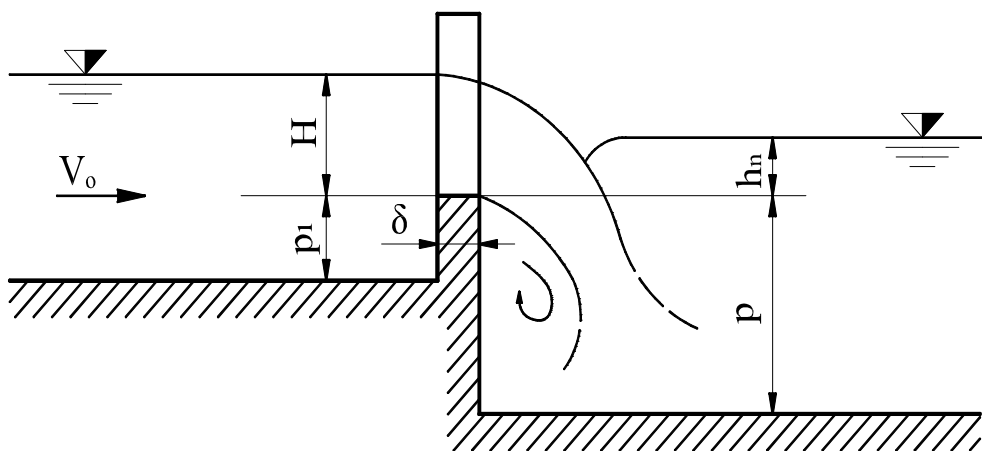


Fig. 1.1 Schema de curgere peste un deversor



Se formează tabelul

	p	p <sub>1</sub>	δ	H	h <sub>n</sub>	ρ	μ	g	q
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L	1	1	1	1	1	-3	-1	1	2
M	0	0	0	0	0	1	1	0	0
T	0	0	0	0	0	0	-1	-2	-1

Din tabel se pot forma următorii determinanți de ordin maxim nenuli, astfel:

coloana 4 6 7

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

coloana 4 7 8

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

coloana 4 6 8

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

coloana 6 7 8

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

Fenomenul poate fi descris de relații cu trei variabile independente. Alegând ca mărimi fundamentale  $H$ ,  $q$  și  $g$  (coloanele 4, 6, 8), se formează funcția complexelor adimensionale  $\varphi(\pi_p, \pi_{p_1}, \pi_\delta, \pi_{h_n}, \pi_\mu)$  și relația devine:

$$q = \varphi(\pi_p, \pi_{p_1}, \pi_\delta, \pi_{h_n}, \pi_\mu) \cdot H^{d_4} \cdot \rho^{d_6} \cdot g^{d_8}$$

Din condiția de omogenitate a relației (ecuația de dimensionare) se poate scrie:

$$[q] = L^2 T^{-1} = [H]^{d_4} \cdot [\rho]^{d_6} \cdot [g]^{d_8} = L^{d_4} (L^{-3} \cdot M^1)^{d_6} (L^1 T^{-2})^{d_8},$$

respectiv

$$L^2 M^0 T^{-1} = L^{(d_4 - 3d_6 + d_8)} \cdot M^{d_6} \cdot T^{-2d_8}$$

sau

$$d_6 = 0, d_8 = 1/2 \text{ și } d_4 = 3/2, \text{ Deci}$$

$$q = \varphi(\pi_p, \pi_{p_1}, \pi_\delta, \pi_{h_m}, \pi_\mu) g^{1/2} \cdot H^{3/2} = m \sqrt{2g} H^{3/2}$$

Influența parametrilor  $p$ ,  $p_1$ ,  $\delta$ ,  $h_m$ ,  $\mu$  se determină experimental și au valoarea  $m\sqrt{2}$ . Debitul specific nu depinde de densitate. Din determinantul al doilea se obține aceeași relație și informația, că debitul curs nu depinde de  $\mu$ . Din determinanții 1 și 4 rezultă

$$q = \varphi \frac{\mu}{\rho}$$

Cele două relații obținute sunt echivalente, dar este de preferat folosirea primei relații, elementele care intervin în aceasta având pondere mai mare în descrierea fenomenului.

### 1.2.3. Metoda experimentală

Această metodă se folosește sub două aspecte:

- ca **experiment** pentru studiul legilor generale ale fenomenelor, verificarea rezultatelor teoretice și stabilirea corecțiilor pentru legile determinate formal pe cale teoretică;

- ca **metodă directă** de rezolvare a unor probleme practice cu grad ridicat de complexitate și care nu permit încă soluționare teoretică.

Metodele experimentale de investigare se împart în:

- **metode directe** de studiu asupra fenomenelor fizice efective, în mărime naturală sau la diferite scări (redușe sau mărite);

- **metode indirecte-analogice** când se studiază fenomene din diferite domenii ale fizicii, descrise de legi formal asemenea.

**Exemplu:** Distribuția potențialului electric într-un domeniu fără surse electrice este dată de ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

O ecuație asemănătoare descrie potențialul hidraulic la mișcarea irotațională a fluidelor euleriene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Distribuția potențialului electric în valori relative este identic cu distribuția potențialului hidrodinamic relativ.

Ca metode analoge de studiu în hidraulică se utilizează metode reoelectrice (pe foi conductoare, în electrolit sau rețele de rezistențe), analogia Helle-Shaw (este o analogie între curgerea în medii poroase și între plăci plan paralele) și modelarea hidraulică în curenți de aer. Uneori fenomenele atmosferice (petrecute în aer) se modelează în curenți de apă.

Studiul fenomenelor la altă scară decât cea naturală este modelarea hidraulică și poate avea loc la scară normală sau distorsionată.

### 1.3. Similitudinea hidraulică

Teoria similitudinii hidraulice formează baza teoretică a modelării hidraulice, domeniu important de studiu direct a fenomenelor hidraulice.

Se știe că mulțimea fenomenelor fizice descrise de ecuații generale analoage, având condiții de unicitate de același tip formează o clasă de fenomene fizice. Între două fenomene de aceeași clasă există o similitudine fizică dacă există o corespondență biunivocă între punctele domeniilor lor și dacă raportul a două mărimi fizice scalare, de aceeași natură, din două puncte corespondente este constant.

Similitudinea se bazează pe două criterii și anume:

a) la două sau o serie de fenomene similare toate complexele adimensionale sunt identice;

b) pentru ca un fenomen "M" să fie similar cu un fenomen determinat "m" trebuie ca ambele să fie de aceeași natură și să aibă criterii determinante identice.

Similitudinea poate fi geometrică, cinematică sau dinamică în funcție de proporționalitatea mărimilor determinante.

### 1.3.1. Similitudinea geometrică (asemănarea)

Similitudinea geometrică se caracterizează prin raportul constant al tuturor coordonatelor punctelor analoage. Astfel,  $M(X,Y,Z)$  și  $m(x,y,z)$  sunt analoage dacă este satisfăcută condiția

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \pi_L = \text{const.} \quad (1.20)$$

Mai generală este **similitudinea afină** la care raportul coordonatelor punctelor omoloage este constant pentru fiecare axă de coordonate în parte:

$$\frac{x}{X} = \pi_x; \frac{y}{Y} = \pi_y; \frac{z}{Z} = \pi_z \quad (1.21)$$

În general, pentru similitudinea fizică trebuie să fie satisfăcută similitudinea geometrică, dar la modele fizice distorsionate este satisfăcută doar similitudinea afină.

### 1.3.2. Similitudinea cinematică

Între două fenomene fizice există similitudine cinematică, dacă este realizată similitudinea geometrică sau afină și raportul timpilor omologi este constant:

$$\frac{t}{T} = \pi_t = \text{const.} \quad (1.22)$$

În aceste condiții scările de similitudine pentru mărimile derivate sunt:

$$\text{- pentru viteze } \pi_v = \frac{v}{V} = \frac{\frac{l}{t}}{\frac{L}{T}} = \frac{l}{L} \frac{T}{t} = \pi_l \pi_t^{-1}$$

$$\text{- pentru accelerații } \pi_a = \frac{a}{A} = \frac{\frac{l}{t^2}}{\frac{L}{T^2}} = \frac{l}{L} \left( \frac{T}{t} \right)^2 = \pi_l \pi_t^{-2} \quad (1.23)$$

$$\text{- pentru debit volumic } \pi_Q = \frac{\frac{l^3}{t}}{\frac{L^3}{T}} = \left( \frac{l}{L} \right)^3 \frac{T}{t} = \pi^3 \pi_t^{-1}$$

### 1.3.3. Similitudinea dinamică

Între două fenomene fizice există similitudine dinamică dacă între forțele omoloage există raport constant:

$$\pi_F = \frac{f_x}{F_x} = \frac{f_y}{F_y} = \frac{f_z}{F_z} \text{ sau } \frac{\vec{f}}{\vec{F}} = \pi_F \quad (1.24)$$

Similitudinea dinamică are loc când există similitudinea cinematică și raportul intensității forțelor omoloage este constant:

$$\pi_F = \frac{f}{F} = \frac{m \cdot a}{M \cdot A} = \frac{\rho \cdot w \cdot a}{\rho \cdot W \cdot A} = \pi_\rho \cdot \pi_l^4 \cdot t^{-2} = \pi_\rho \cdot \pi_l^2 \cdot \pi_v^2 \quad (1.25)$$

sau

$$\frac{f}{F} = \frac{\rho \cdot l^2 \cdot v^2}{\rho \cdot L^2 \cdot V^2} \text{ sau } \frac{f}{\rho \cdot l^2 \cdot v^2} = \frac{F}{\rho \cdot L^2 \cdot V^2} \quad (1.26)$$

Relația (1.26) exprimă **criteriul Newton** al similitudinii mecanice, produsele adimensionale  $\pi$  fiind criterii de similitudine.

Conform principiului de formare a complexelor adimensionale și a numărului de mărimi fundamentale (în mecanică  $k=3$ ) se pot formula criteriile de similitudine dinamică folosite în hidraulică. În mișcarea lichidelor sunt caracteristice mărimile:  $x_1=l$  (lungimea);  $x_2=v$  (viteza); forțe masice, definite prin  $x_3=\rho$  (densitate);  $x_4=g$  (accelerația gravitațională);  $x_5=t$  (timp);  $x_6=p$  (presiune);  $x_7=\nu$  (coeficient de vâscozitate cinematic) pentru forțe tangențiale;

$x_8 = \sigma$  (coeficient de tensiune superficială) pentru forțe capilare;  $x_9 = c$  (viteza de propagare a sunetului în lichide) pentru caracterizarea compresibilității lichidelor. Rangul matricei dimensionale a mărimilor  $x_1, \dots, x_9$  este  $k=3$ , deci se pot forma  $n-k=6$  complexe adimensionale, care pot fi criterii de similitudine hidraulică. Alegând drept mărimi fundamentale  $l, v, \rho$  se obține:

$$\pi_{x_{i-3}} = l^\alpha \cdot v^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot x_i^\delta \quad (1.27)$$

cu  $i=4, \dots, 9$ . Considerând  $[x_i] = L^a \cdot M^b \cdot T^c$  dimensiunea ecuației de mai sus este:

$$[\pi_{i-3}] = L^0 M^0 T^0 = L^\alpha (LT^{-1})^\beta (ML^{-3})^\gamma L^{a\delta} M^{b\delta} T^{c\delta} \quad (1.28)$$

din care, prin egalarea exponenților dimensionali, obținem sistemul:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3\gamma + a\delta = 0 \\ \gamma + b\delta = 0 \\ -\beta + c\delta = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Pentru  $\beta = 1$  soluția sistemului este

$$\alpha = -\frac{a+3b+c}{c}; \beta = 1; \gamma = -\frac{b}{c}; \delta = \frac{1}{c} \quad (1.30)$$

Considerând succesiv  $x_i$  mărimile caracteristicilor enumerate, cu excepția celor considerate fundamentale, se obțin următoarele:

1) Pentru  $x_i = t$ , deci  $[x_i] = L^0 M^0 T^1$ , respectiv  $a=0; b=0; c=1$ , iar din (1.30) se găsește  $\alpha = -1; \gamma = 0; \delta = 1$ . Din (1.27) rezultă  $\pi_t = l^{-1} \cdot v \cdot t$ . Ca un criteriu de similitudine este utilizat

$$\frac{1}{\pi_t} = \frac{l}{v \cdot t} = Sh \quad (1.31)$$

numărul Strouhal. Numerele  $Sh$  ale fenomenului din natură și cel modelat trebuie să fie egale când se respectă criteriul Strouhal.

2) Pentru  $x_i=p$ , respectiv  $[x_i] = L^{-1}M^1T^{-2}$ , cu  $a = -1$ ;  $b = 1$ ;  $c = -2$  se obține  $\alpha = 0$ ;  $\beta = 1$ ;  $\gamma = 1/2$ ;  $\delta = -1/2$ . Complexul adimensional (1.27) pentru mărimea "presiune" devine:

$$\pi_p = v \cdot \rho^{1/2} \cdot p^{-1/2} = \frac{v \cdot \rho^{1/2}}{p^{1/2}}$$

Drept criteriu de similitudine se folosește numărul lui Euler:

$$\frac{1}{\pi_p^2} = \frac{p}{\rho \cdot v^2} = Eu \quad (1.32)$$

3) Pentru  $x_i=g$ , rezultă  $[x_i] = L^1M^0T^{-2}$ , cu  $a = 1$ ;  $b = 0$ ;  $c = -2$ , respectiv,  $\alpha = -1/2$ ;  $\beta = 1$ ;  $\gamma = 0$  și  $\delta = -1/2$ . Complexul adimensional pentru accelerație gravitațională devine:

$$g = l^{-1/2} \cdot v \cdot g^{-1/2} = \frac{v}{g^{1/2} \cdot l^{1/2}} \quad (1.33)$$

4) Pentru  $x_i=v$ , rezultă  $[x_i] = L^2M^0T^{-1}$ , cu  $a = 2$ ;  $b = 0$ ;  $c = -1$ , respectiv,  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 1$ ;  $\gamma = 0$ ;  $\delta = -1$  și se obține numărul Reynolds

$$\pi_v = l^1 \cdot v^1 \cdot v^{-1} = \frac{l \cdot v}{v} = Re \quad (1.34)$$

ca criteriu de similitudine.

5) Pentru  $x_i = \sigma$ , se obțin  $[x_i] = L^0M^1T^{-2}$ ;  $a = 0$ ;  $b = 1$ ;  $c = -2$ , respectiv,

$$\alpha = \frac{1}{2}; \beta = 1; \gamma = \frac{1}{2}; \delta = -\frac{1}{2}$$

După înlocuire în (1.27), se obține

$$\pi_\sigma = l^{1/2} \cdot v \cdot \rho^{1/2} \cdot \sigma^{-1/2}$$

Pătratul acestui complex adimensional este numărul Weber

$$\pi^2 = \frac{l \cdot \rho \cdot v^2}{\sigma} = W_e \quad (1.35)$$

6) Pentru  $x_i = c$  rezultă  $[x_i] = L^1 M^0 T^{-1}$ ,  $a = l$ ;  $b = 0$ ;  $c = -l$ , respectiv  $\alpha = 0$ ;  $\beta = 1$ ;  $\gamma = 0$ ;  $\delta = -1$ . În urma înlocuirii în (1.27), rezultă criteriul de similitudine prin numărul Mach

$$\pi_c = v^1 c^{-1} = \frac{v}{c} = M_a \quad (1.36)$$

Alte criterii de similitudine în hidraulică pot fi privite ca produs al celor 6 criterii de similitudine descrise.

Exemplu: Criteriul Mosony  $M_0 = F_r \cdot \text{Re}^{-1} = \frac{v \cdot \vartheta}{g \cdot l^2}$  sau criteriul Goudev

$$G_o = \frac{W_e}{Fr} = \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{\sigma}.$$



## CAPITOLUL 2

### PRINCIPALELE CARACTERISTICI FIZICE ALE FLUIDELOR

În cadrul studiului hidraulicii și aplicațiilor sale tehnice în majoritatea problemelor se utilizează caracteristicile fizice ale fluidelor sub formă de mărimi fizice sau legi ce descriu aceste caracteristici.

În acest capitol se încearcă a se da răspuns la întrebările: Ce este lichidul? Dar fluidul? Ce proprietăți fizice au și de ce? Ce legi guvernează aceste proprietăți?

#### 2.1. Structura materiei și stările de agregare

Materia în mod real (în prisma mecanicii) are structură discretă, este formată din particule individuale - molecule (formație chimică stabilă). Proprietățile fizice ale materiei sunt legate nemijlocit de această structură moleculară și de forțele cu care interacționează moleculele. Stările de agregare ale materiei - solid, lichid, gaz - precum și majoritatea proprietăților fizice se explică prin această structură moleculară.

Moleculele sunt sisteme care se supun legilor mecanicii cuantice. Forțele de interacțiune între molecule au caracter columbian, dar și caracter cuantic. Între molecule (dipoli) există în același timp forțe de atracție  $F_1$  și forțe de respingere  $F_2$ . Ambele forțe depind de distanța "r" intermoleculară și sunt invers proporționale cu aceasta, conform relațiilor:

$$F_1 = -\frac{C_1'}{r^{\kappa_1}} \text{ și } F_2 = -\frac{C_2'}{r^{\kappa_2}} \quad (2.1)$$

unde  $C_1'$ ,  $C_2'$ ,  $\kappa_1$  și  $\kappa_2$  sunt constante ce depind de natura materiei. Faptul că  $\kappa_2 > \kappa_1$  arată că forțele de respingere scad mai repede cu distanța  $r$  decât cele de atracție.

Forța totală,  $F=F_1+F_2$ , este de atracție pentru  $r$  mare, de respingere pentru  $r$  mic și se anulează pentru  $r=r_0$ .

Forțelor  $F_1$  și  $F_2$  dintre molecule corespund energiile potențiale  $E_{p1}$  și  $E_{p2}$ , cu

$$E_{p1} = -\frac{C_1}{r^{K_1}} \text{ și } E_{p2} = -\frac{C_2}{r^{K_2}} \quad (2.2)$$

unde,  $k_1 = \chi_1 - 1$  și  $k_2 = \chi_2 - 1$ ,  $C_1$  și  $C_2$  - constante și  $E_p = E_{p1} + E_{p2}$ .

Forma grafică a curbelor energiilor potențiale corespunde fig. 2.1

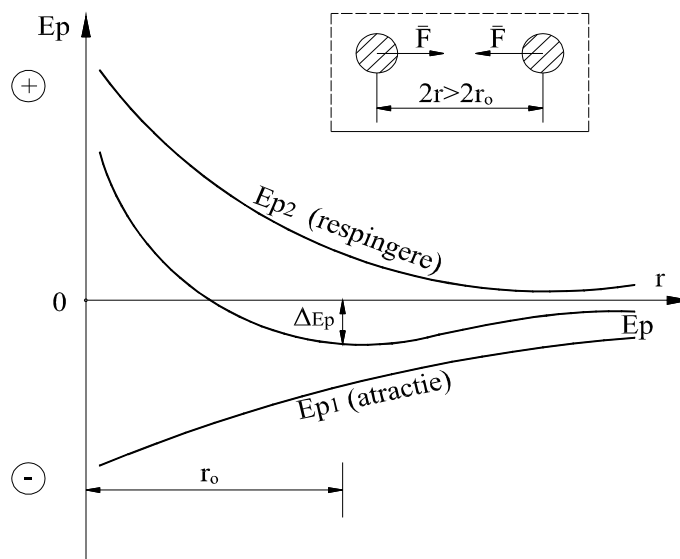


Fig. 2.1. Graficul energiilor potențiale ale moleculelor

Energia potențială minimă a moleculelor corespunde distanței intermoleculare  $r_0$ , poziție careia îi este caracteristică "groapa de potențial",  $\Delta E_p$ .

Pentru  $r=r_0$  se anulează forța  $F$ . În această poziție moleculele unei materii se află în echilibru. Moleculelor unei materii, la un moment dat, le mai este caracteristică și energia cinetică a agitației termice, care este condiționată (printre alți factori) de temperatură și presiune. Poziția reciprocă a moleculelor este stabilă când  $E_{cat} < \Delta E_p$ .

1. Când  $E_{cat} > \Delta E_p$  moleculele se mișcă liber datorită energiei cinetice a agitației termice superioare gropii de potențial. Moleculele se împrăștie, părăsesc poziția de echilibru; ele nu rămân așezate la distanța  $r = r_0$ , ci  $r > r_0$  și se mișcă liber ocupând tot spațiul ce le stă la dispoziție. Această situație este caracteristică **stării de agregare** gazoase, la care distanța intermoleculară este de ordinul  $2r \sim 10^{-8} \dots 10^{-9} \text{ m}$ , iar drumul liber parcurs de molecule de ordinul  $10^{-7} \text{ m}$ .

2. Când  $E_{cat} \sim \Delta E_p$  moleculele materiei sunt așezate la distanța medie temporară  $r_0$ , oscilând în jurul poziției de echilibru cu un drum liber parcurs de

ordinul  $10^{10}$  m. Datorită acestei mișcări a agitației termice moleculele individuale capătă energii cinetice superioare gropii de potențial (în detrimentul altor molecule), părăsesc poziția inițială de echilibru și ocupă alt loc între molecule (prin cedare din energia lor cinetică altor molecule), determinând o reșezare a lor. Distanța intermoleculară în acest caz este de ordinul  $2r \sim 10^{-10}$  m (la apă  $3,1 \cdot 10^{-10}$  m, cu diametrul moleculei  $d = 2,76 \cdot 10^{-10}$  m). Starea materiei când moleculele sale se pot reșeza continuu și relativ ușor, dar în medie păstrează distanța intermoleculară  $2r_0$  este caracteristică lichidelor. Aceasta determină faptul că starea de agregare lichidă este caracterizată de volum propriu.

3. Când  $E_{cat} < \Delta E_p$  moleculele sunt așezate la distanța medie temporară  $r_0$ , corespunzătoare gropii de potențial, iar agitația termică se reduce la vibrația moleculelor în jurul poziției de echilibru, amplitudinea vibrației fiind mult mai mică decât distanța intermoleculară. În condiții normale moleculele nu-și pot părăsi locul datorită interacțiunii lor. Cele arătate sunt caracteristice stării de agregare solide, cu mărimea moleculelor și a distanței intermoleculare de ordinul  $10^{-10}$  m.

Starea de agregare a materiei este determinată de parametrii de stare: temperatură, presiune și volum. În anumite condiții avem o singură stare de agregare, în anumite condiții două stări pot coexista și numai într-un singur punct al coordonatelor figurative  $p, w, T$  cele trei stări de agregare pot coexista - punctul triplu al materiei.

Lichidele, prin natura lor, au proprietăți apropiate atât de solide cât și de gaze. Trebuie subliniat faptul că deosebiri între lichide și gaze, ca și între lichide și solide sunt cantitative și nu calitative. Proprietățile fizice sunt comune tuturor stărilor de agregare, numai intensitatea lor de manifestare diferă (în unele cazuri chiar se poate anula).

Având în vedere dimensiunile foarte mici ale moleculelor, precum și a spațiilor dintre ele în raport cu volumul ocupat de fluidul în mișcare sau în stare de repaus, în hidraulică fluidele sunt considerate medii continui, medii deformabile. Volumele elementare cu care se operează - în explicarea unor fenomene, în deducerea unor relații în hidraulică - sunt suficient de mici pentru a se putea considera fluidul mediu continuu și suficient de mari față de dimensiunile moleculelor și a interspațiilor dintre ele.

Criteriul care stabilește dacă fluidul poate fi considerat mediu continuu este cel al lui Kundsén, numărul  $K_n = l / L$  ( $l$  - drum liber parcurs de moleculă datorită  $E_{cat}$ , iar  $L$  dimensiunea minimă a volumului ocupat de fluid). Pentru  $K_n \leq 0,1$ , fluidul poate fi considerat mediu continuu. Pentru gaze (caz nefavorabil)

$l \sim 10^{-7}$  m, deci volumul de gaz cu dimensiunea minimă  $L > 10^{-6}$  m poate fi considerat mediu continuu, deci volumele elementare trebuie să aibă dimensiunile minime peste  $10^{-6}$  m (microni).

## 2.2. Principalele proprietăți fizice ale fluidelor

Gazele și lichidele sunt fluide, au proprietatea de a-și schimba ușor forma fără să opună rezistențe apreciabile la modificarea acesteia. Faptul  $E_{eat} > \Delta E_p$  explică proprietatea de expansiune a gazelor, pe când la lichide  $E_{cat} \leq \Delta E_p$  și  $r=r_0$  arată că acestea au volum propriu.

Dintre principalele proprietăți fizice ale fluidelor se studiază aici mai pe larg densitatea, compresibilitatea izotermă, adeziunea la suprafețele solide, vâscozitatea, tensiunea superficială, absorbția și degajarea de gaze și cavitația. În privința hidraulicii importanță mai mică prezintă difuzia, dilatația termică, conductibilitatea termică, proprietăți electrice ș.a

### 2.2.1. Masa specifică-densitatea

**Masa specifică sau densitatea** ( $\rho$ ) reprezintă masa unității de volum și este definită de relația

$$\rho = \frac{dm}{dw} \quad (2.3)$$

Densitatea medie este:

$$\rho_m = \frac{m}{w} \quad (2.3')$$

Unitatea de măsurare rezultă din ecuația de dimensiune

$$[\rho] = \frac{[m]}{[w]} = M \cdot L^{-3}, \text{ deci unitatea de măsurare este } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

**Greutatea specifică** ( $\gamma$ ) se definește în mod asemănător

$$\gamma = \frac{dG}{dW} \quad (2.4)$$

sau greutatea specifică medie:

$$\gamma_m = \frac{G}{W} \quad (2.4')$$

Dimensiunea, respectiv unitatea de măsură este:

$$[\gamma] = \frac{[G]}{[W]} = \frac{[m \cdot g]}{W} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-1}}{L^3} = ML^{-2} \cdot T^{-1}, \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^3} \text{ sau } \frac{N}{m^3}$$

Atât densitatea cât și greutatea specifică a lichidelor este de același ordin de mărime cu cea a solidelor (moleculele ambelor stări de agregare se află la  $2r_0$ ) pe când la gaze cu circa  $10^3$  ori mai mică (moleculele de gaz la presiune și temperatură normală se află la distanțe  $2r$  cu circa  $10^1$  ori mai mari decât  $2r_0$ , deci într-un volum se află de circa  $10^3$  ori mai puține molecule).

**Exemplu:**  $\rho_{\text{gheata}} = 999,5 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_{\text{apa}} = 1000 \text{ kg / m}^3$ ;  $\rho_{\text{vapori}} = 0,804 \text{ kg / m}^3$ ;

Este cunoscut că densitatea depinde de poziția punctului unde se determină, de timp, de presiune și de temperatură:  $\rho = \rho(x, t, p, \theta)$ . Astfel, densitatea într-un punct, la temperatura  $\theta$ , se exprimă prin relația:

$$\rho_{\theta} = \rho_0 (1 + \beta_{\theta} \cdot \Delta\theta)^{-1} \quad (2.5)$$

unde:  $\beta_{\theta}$  este coeficientul de dilatație termică cubică

Legătura între densitatea și greutatea specifică este exprimată de relația:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (2.6)$$

La această transformare trebuie ținut seama de variația accelerației gravitaționale cu latitudinea  $l$  și cu altitudinea  $h$  după expresia:

$$g = 9.781031 + 0.050057 \sin l^2 \quad (2.7)$$

$$g = g \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-2} \quad (2.8)$$

în care  $R$  este raza pământului.

**Tabelul 2.1.** Densitatea unor lichide la presiune atmosferică (760 mmHg)

Nr. crt.	Lichidul	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°C)	Nr. crt.	Lichidul	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°C)
1.	apă	1000	4	7.	ulei dens	890-920	15
2.	alcool	790	10	8.	țiței	850-930	15
3.	bitum	1100-1500	15	9.	benzină	680-740	15
4.	mercur	13596	0	10.	petrol	790-820	15
5.	soluție saturată de NaCl	1210	17	11.	gudron de huilă	1200	15
6.	glicerina pură	1260	0	12.	tetraclorură de carbon CC1 <sub>4</sub>	1594	20

**Tabelul 2.2.** Densitatea unor gaze la presiune atmosferică (760 mmHg)

Nr.crt	Gazul	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°C)	Nr. crt.	Gazul	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°C)
1.	aer uscat	1,223	15	7.	heliu	0,170	15
2.	acetilenă	1,110	15	8.	bioxid de carbon	1,870	15
3.	amoniac	0,736	15	9.	bioxid de sulf	2,769	15
4.	oxigen	1,352	15	10.	metan	0,735	15
5.	azot	1,183	15	11.	etilena	1,191	15
6.	hidrogen	0,085	15				

**Tabelul 2.3.** Variația densității apei și aerului cu temperatura la presiune constantă  
( $p = 760 \text{ mmHg}$ )

Temperatură (°C)	-20	-10	0	4	10	20	30	40	50	60	80	100
$\rho_{\text{apă}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	-	-	999,9	1000	999,7	998,2	995,7	992,2	988,1	983,2	971,8	958,4
$\rho_{\text{aer}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,395	1,342	1,293	1,274	1,247	1,205	1,165	1,128	1,093	1,060	1,000	0,946

### 2.2.2. Compresibilitatea izotermă, elasticitatea

Compresibilitatea izotermă este proprietatea fluidelor de a-și modifica volumul sub acțiunea variației de presiune la temperatură constantă. Fenomenul de compresibilitate, atât calitativ cât și cantitativ se explică prin structura moleculară.

Gazele și parțial lichidele se supun legii lui Van der Waals

$$(p + p_i) (w_0 - b) = RT \quad (2.10)$$

care exprimă mai fidel transformarea decât legea gazelor perfecte.

S-au notat:

$p$  - presiunea;  $p_i$  - presiunea internă;  $w_0$  - volumul molar;  $b$  - volumul ocupat de molecule;  $R$  - constanta gazelor;  $T$  - temperatura. Analiza termenului  $(w_0 - b)$  din ecuație evidențiază rolul volumului ocupat de molecule. Valoarea lui  $b$  este mare față de  $w_0$  pentru lichide (distanța intermoleculară  $r_0$ ) și mică pentru gaze. Creșterea rapidă a forțelor de respingere pentru distanțe dintre molecule inferioare lui  $r_0$  arată compresibilitatea mică a lichidelor față de gaze. Forțele exterioare aplicate lichidului sunt echilibrate de creșterea forțelor de respingere dintre molecule la o apropiere relativ mică a acestora. Distanțele intermoleculare la gaze fiind de cea. 10 ori mai mari decât la lichide explică compresibilitatea mare a gazelor.

Variația volumului la gaz, sub acțiunea presiunii depinde de procesul după care are loc comprimarea:

- la **proces izoterm** este valabilă legea lui Clapeyron:

$$pW = RT \quad (2.11)$$

- la **proces adiabatic** (fără schimb de căldură)

$$pW^k = \text{const.} \quad (2.12)$$

unde  $k$  este indicele adiabatic

- la **proces politropic**

$$pW^n = \text{const.} \quad (2.13)$$

unde  $n$  este indicele politropic.

Indicele adiabatic se definește ca raportul între căldura specifică la presiune constantă și căldură specifică la volum constant

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.14)$$

**Tabelul 2.4.** Valorile indicelui adiabatic pentru câteva gaze:

Gazul	Aer	CO <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	CO	NH <sub>4</sub>	CH <sub>4</sub>
k	1,401	1,293	1,396	1,401	1,407	1,400	1,310	1,320

Compresibilitatea lichidelor se caracterizează cantitativ prin **coeficientul de compresibilitate**  $\beta$ , definit prin relația:

$$\beta = -\frac{1}{dp} \cdot \frac{dW}{W} \quad (2.15)$$

care arată variația  $dW$  a volumului de lichid  $W$  sub acțiunea variației de presiune  $dp$ . Dimensional  $[\beta] = L \cdot T^2 \cdot M^{-1}$  și are unitatea de măsurare  $\text{ms}^2/\text{kg}$ , sau  $\text{m}^2/\text{N}$ .

Pentru lichide valoarea lui  $\beta$  este de ordinul  $10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$  (tabelul 2.5). Inversul coeficientului de compresibilitate este coeficientul de elasticitate,  $\varepsilon = 1 / \beta$ .

Ținând seama că prin comprimare masa de lichid nu variază se poate scrie:

$$M = \rho W = \text{const}$$



După diferențierea relației:

$$dM = \rho dW + W d\rho = 0$$

rezultă  $-dW / W = d\rho / \rho$ , care înlocuită în (2.15), conduce la

$$\beta = \frac{1}{dp} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.16)$$

ceea ce exprimă modificarea relativă a densității lichidului prin comprimare. Valorile coeficientului  $\beta$  și  $\varepsilon$  pentru câteva lichide corespund tabelului 2.5.

**Tabelul 2.5.** Coeficientul de compresibilitate și elasticitate

Nr. crt.	Lichidul	T(°C)	$10^{10} \beta$ (m <sup>2</sup> /N)	$10^9 \varepsilon$ (N/m <sup>2</sup> )
1.	apă	0	5,12	1,95
2.	apă	10	4,92	2,03
3.	apă	20	4,74	2,11
4.	apă	30	4,65	2,15
5.	petrol	0	8,68	1,15
6.	glicerina	0	2,55	3,92
7.	mercur	0	0,30	33,3

Legea de variație a volumului și densității lichidelor cu presiunea, se obține prin integrarea ecuațiilor (2.15 și 2.16) pentru domeniul  $[p_0, p]$  considerând  $\beta = \text{constant}$ :

$$\int_{p_0}^p \beta dp = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{W} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

după integrare avem:

$$W = W_0 \cdot e^{-\beta(p-p_0)} \text{ și } \rho = \rho_0 \cdot e^{-\beta(p-p_0)} \quad (2.17)$$

Dezvoltarea în serie Taylor a ecuațiilor (2.17) conduce la:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \left[ 1 - \frac{\beta(\rho - \rho_0)}{1!} + \frac{\beta^2(\rho - \rho_0)^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{\beta^n(\rho - \rho_0)^n}{n!} + \dots \right] W_0 \\ \rho &= \rho_0 \left[ 1 + \frac{\beta(\rho - \rho_0)}{1!} + \frac{\beta^2(\rho - \rho_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\beta^n(\rho - \rho_0)^n}{n!} + \dots \right] \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

din care, prin neglijarea termenilor care conțin pe  $\beta$  la puteri supraunitare, se obțin:

$$W = [1 - \beta(\rho - \rho_0)] W_0 \quad (2.19)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(\rho - \rho_0)] \quad (2.20)$$

Compresibilitatea lichidelor se poate aprecia și prin viteza de propagare a sunetului în acel lichid (celeritate), care este exprimată de relația lui Newton:

$$C = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2.21)$$

Această expresie arată că orice variație de presiune în lichide se propagă cu celeritatea  $c$  și produce modificarea densității cu  $d\rho$ . Un model de lichid incompresibil poate fi admis numai în cazul când dimensiunile volumului de lichid după toate direcțiile sunt mici.

### 2.2.3. Vâscozitatea

Vâscozitatea este proprietatea fluidelor de a opune rezistență la deformare (mișcare relativă de alunecare a particulelor de fluid unele față de altele), căreia îi corespund forțe tangențiale, ca rezultat al frecărilor interne. Aceste forțe tangențiale depind de viteza relativă a straturilor de lichid, frânează mișcarea, modifică repartiția vitezelor.

Într-un curent de fluid în mișcare, toate particulele din planul  $P$  au viteza  $v$ , iar în planul  $P'$  - situat la echidistanța  $dz$  de  $P$ ,  $v + dv$  (fig. 2.2). Conform ipotezei lui Newton între două suprafețe  $A$  și  $A'$  (de aceeași mărime) din cele două

planuri se exercită o forță tangențială  $T$  proporțională cu suprafața  $A$ , cu viteza de alunecare  $dv/dz$  și cu coeficientul vâscozității dinamice,  $\mu$ .

$$T = \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dz} \quad (2.22)$$

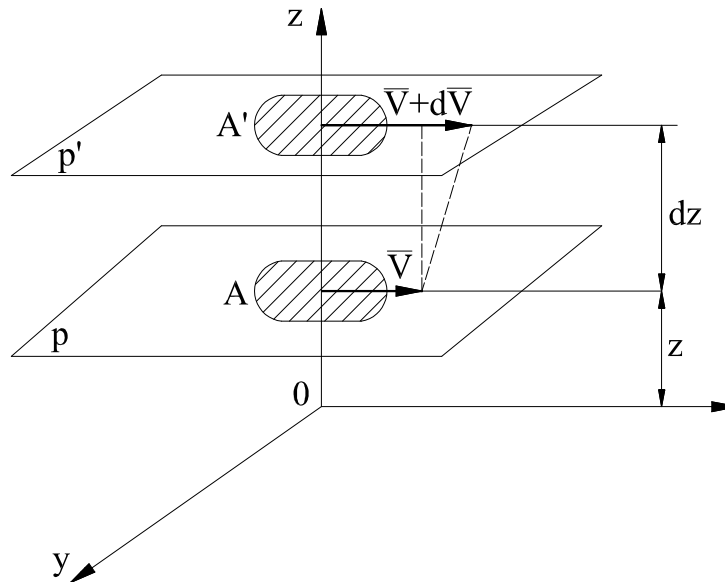


Fig. 2.2. Schemă pentru evidențierea frecărilor vâscoase

Trecând la limită, când  $A \rightarrow 0$ , se obține efortul unitar tangențial:

$$\tau = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{T}{A} = \mu \frac{dv}{dz} \quad (2.23)$$

Uneori în ecuațiile (2.22 și 2.23) se evidențiază semnul negativ al părții din dreapta, indicând sensul fizic al forței care se opune mișcării.

Vâscozitatea se caracterizează cantitativ prin coeficientul vâscozității dinamice  $\mu$ , cu dimensiunea  $\mu = ML^{-1}T^{-1}$  și unitatea de măsurare  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$ . Subunitate a acestei unități,  $\text{dyn} \cdot \text{s} / \text{cm}^2$  poartă denumirea **poise**.

Se mai utilizează coeficientul de vâscozitate cinematic

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.24)$$

cu dimensiuni cinematice  $[\nu] = L^2 \cdot T^{-1}$  și unitate de măsurare  $m^2/s$  (subunitate a acesteia  $cm^2/s$  se numește **stokes**).

Determinarea experimentală a coeficientului de vâscozitate dinamic se face diferențiat la lichide și gaze; la lichide se utilizează legea căderii uniforme a corpurilor solide în acestea (vâscozimetre cu un corp căzător - Höppler), iar la gaze se măsoară forța dintr-un fir de torsiune de care este suspendat un cilindru, în interiorul său rotindu-se alt cilindru cu viteză unghiulară constantă. Se mai poate determina coeficientul de vâscozitate dinamic din legea pierderilor de sarcină în regim laminar. Deseori în tehnică se utilizează vâscozimetrie relativă - Engler sau Ostwald - bazată pe curgerea prin ajutaje sau tuburi capilare sub sarcină variabilă, când numărul de grade Engler ( $^{\circ}E$ ) sau Ostwald ( $^{\circ}O$ ) al vâscozității relative rezultă ca raport al timpului de curgere al unui volum dat de lichid și timpul de curgere al aceluiași volum de apă la  $20^{\circ}C$ , având vâscozitate cunoscută. Prin relații empirice gradele de vâscozitate relativă se transformă în valori ai coeficientului de vâscozitate cinematic.

Coeficientul de vâscozitate variază cu temperatura: - în cazul lichidelor scade cu creșterea temperaturii (crește  $E_{cat}$  și se ușurează mișcarea reciprocă a moleculelor). Experiențele lui Poiseuille arată

$$\nu(\theta) = \nu_0 \left( 1 + 0,0337\theta + 0,000222\theta^2 \right)^{-1} \quad (2.25)$$

- în cazul gazelor coeficientul de vâscozitate crește cu creșterea temperaturii, fapt explicat prin creșterea  $E_{cat}$ , care conduce la sporirea numărului de ciocniri dintre molecule, creșterea vitezei agitației termice și a drumului liber parcurs. În fizica moleculară coeficientul de vâscozitate dinamic pentru gaze se exprimă prin relația:

$$\mu = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{\nu} \cdot \bar{\lambda}}{3} \quad (2.26)$$

unde:  $\bar{v}$  este viteza medie a agitației termice după Maxwell, iar  $\bar{\lambda}$  - drumul mediu parcurs de molecule între două ciocniri. Din această formă se poate ajunge la relația lui Southerland

$$\mu = \frac{a \cdot \theta^{3/2}}{\theta + b} \text{ (poise)} \quad (2.27)$$

sau

$$\mu = A \cdot \theta^n \text{ (poise)} \quad (2.28)$$

Valorile parametrilor  $a$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $n$  sunt în tabelul 2.6. Coeficienții de vâscozitate pentru câteva lichide sunt în tabelul 2.7, iar pentru apă și aer în funcție de temperatură în tabelul 2.8.

Trebuie remarcat că vâscozitatea caracterizată de legea lui Newton se referă la o mișcare ordonată a particulelor de fluid, în straturi, amestecul având loc numai datorită difuziei. Aceasta are loc numai la mișcarea **laminară** a fluidelor newtoniene.

La mișcarea **turbulentă** are loc un schimb intens de particule între straturi (caracteristica principală a acestei mișcări) și eforturile unitare care apar sunt superioare regimului laminar. Ele se datoresc amestecului turbulent de particule (grupuri de molecule) și sunt asimilate cu o creștere "aparentă" a vâscozității.

**Tabelul 2.6.** Parametrii caracteristici vâscozității gazelor ( $0 = -20 \dots 500^\circ\text{C}$ )

Nr. crt.	Gazul	$10^6 a$	b	n	$10^6 A$
1.	aer	117,9	117,9	0,754	2,490
2.	oxigen	16,49	110,0	0,721	3,355
3.	azot	13,85	102,0	0,702	3,213
4.	hidrogen	6,48	70,6	0,678	1,860
5.	abur	18,31	659,0	1,116	0,170
6.	amoniac	15,42	472,0	1,041	0,274

**Tabelul 2.7.** Coeficientul vâscozității dinamice al unor lichide  $10^3 \mu(\text{N.s.m}^{-2})$  diferite temperaturi

Nr. crt.	Temperatura (°C)	0	10	20	30	40	50	60
	Lichidul							
1.	alcool etilic	1,856	1,520	1,234	1,040	0,857	0,734	0,612
2.	glicerina	-	41,08	15,60	6,49	-	-	-
3.	mercur	0,130	-	0,121	-	-	-	0,108
4.	$\text{CCl}_4$	1,408	1,173	1,010	0,877	0,775	0,673	0,612

**Tabelul 2.8.** Coeficienții de vâscozitate ai apei și aerului la diferite temperaturi și presiune atmosferică normală

Temperatura (°C)		-10	0	10	20	40	60	80	100	200
$10^3 \mu$ $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$	aer	0,162	0,172	0,175	0,181	0,191	0,200	0,209	0,218	0,261
	apă	-	1,79	1,31	1,01	0,658	0,478	0,366	0,295	-
$10^6 \nu$ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	aer	12,6	13,3	14,1	15,1	16,9	18,9	20,9	23,1	35,0
	apă		1,79	1,31	1,01	0,658	0,478	0,366	0,295	-

În reologie efortul unitar tangențial se definește prin:

$$\tau = \tau_0 + k(dv / dz)^n \quad (2.29)$$

unde:  $\tau_0$  - este efortul tangențial inițial de la care pornește curgerea;  $k$  - indicele de consistență, iar  $n$  - coeficientul de comportare la curgere (fig.2.3).

1.  $\tau_0=0$ ;  $k = \mu$ ;  $n = 1$  fluid Newtonian
2.  $\tau_0=0$ ;  $k \neq \mu$ ;  $n > 1$  fluid pseudoplastic
3.  $\tau_0 \neq 0$ ;  $k = \mu$ ;  $n = 1$  fluid Bingham
4.  $\tau_0 \neq 0$ ;  $k \neq \mu$ ;  $n > 1$  fluid plastic generalizat
5.  $\tau_0=0$ ;  $k \neq \mu$ ;  $n < 1$  fluid dilatant

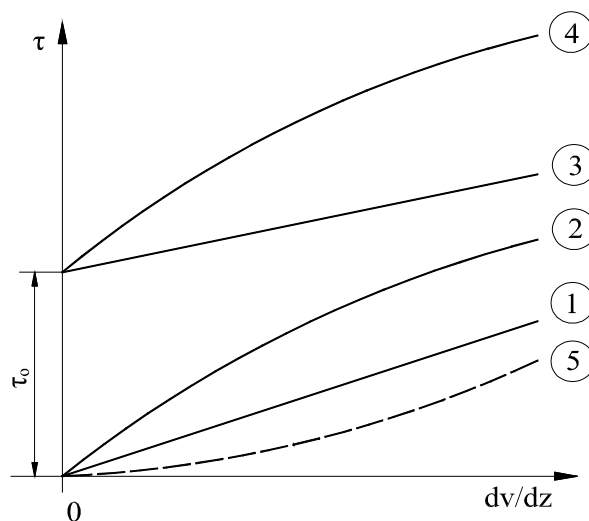


Fig. 2.3. Caracterizarea reologică a fluidelor

Apa, aerul sunt fluide newtoniene, apă cu aluviuni în concentrații mari -fluid pseudoplastic, argilă curgătoare, beton sau mortar proaspăt - fluid Bingham sau plastic generalizat.

#### 2.2.4. Adeziunea la suprafețe solide

Adeziunea unui fluid la o suprafață solidă este un fenomen fizic de atracție a moleculelor fluidului și solidului care se manifestă la nivelul moleculelor de contact. Forța de adeziune depinde de natura suprafeței, de compoziția chimică a solidului și fluidului, de temperatură etc. Experimental s-a dovedit că în jurul corpurilor solide există un strat de fluid aderent, având grosimea de ordinul sutimilor de milimetru (fig.2.4).

Particulele din stratul aderent nu participă la mișcarea fluidului, viteza relativă între solid și lichid fiind nulă.

Experiențele efectuate pentru lichide și gaze au condus la rezultate identice.

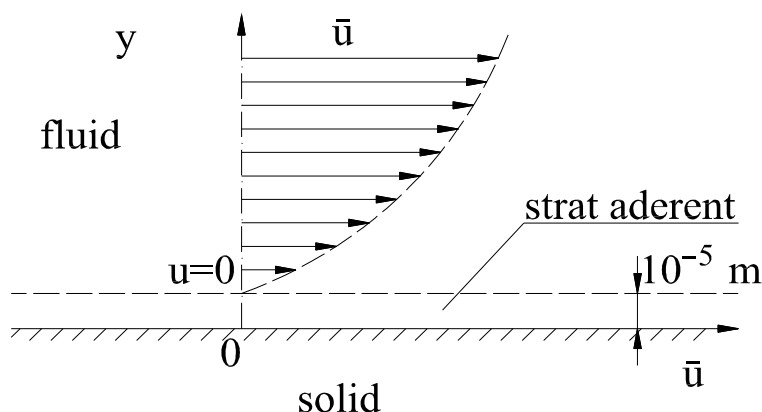


Fig. 2.4. Adeziunea fluidelor la suprafețele solide

### 2.2.5. Tensiunea superficială. Capilaritatea.

Moleculele de lichid de la suprafața volumului ocupat se află în condiții de tensiune diferite față de moleculele din interiorul lichidului. Ținând seama de distanța de interacțiune a moleculelor, pentru studiul tensiunii superficiale este suficientă analizarea stratului superficial de grosime " $\delta$ " în care apar forțele neechilibrate (fig.2.4').

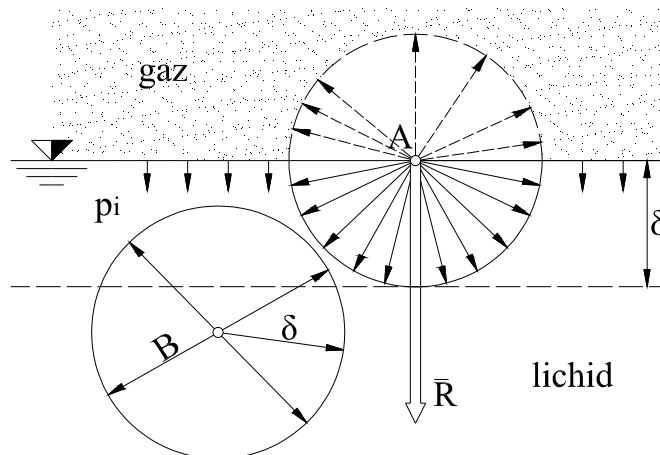


Fig. 2.4'. Presiunea internă în lichide

Forțele care acționează din diverse direcții asupra moleculei din punctul B se compensează, în schimb, în cazul moleculelor din stratul de grosime " $\delta$ " de la suprafață, forțele care acționează nu sunt compensate (ex. molecula din pct. A) și există o rezultantă  $R$ , orientată spre interiorul lichidului.

Asupra întregului strat de grosime  $\delta$  acționează forțe normale la suprafață. În consecință, stratul superficial exercită asupra întregului lichid o



presiune, numită "presiune internă -  $p_i$ ". Sub acțiunea acestei presiuni interne moleculele de lichid se apropie până la limita când forțele de respingere intermoleculară echilibrează forța rezultantă.

Termenul

$$p_i = \frac{a \cdot N}{W_0^2} \quad (2.30)$$

din ecuația lui Van der Waals (2.10) definește presiunea internă, și are valori considerabile. De exemplu, pentru apă

$$p_i = \frac{5,366 \text{ bar} \cdot \text{l}^2 \cdot \text{mol}^{-2}}{(0,0181 \cdot \text{mol}^{-1})^2} \cong 16562 \text{ bar}$$

S-au notat:  $N$  - numărul lui Avogadro;  $W_0$  - volum molar;  $a$  - constantă.

Pentru alte lichide presiunea internă are mărime de ordinul menționat (la temperatură și presiune normală).

Dacă asupra lichidului nu acționează forțe exterioare, sub acțiunea presiunii interne lichidul ia forma sferică. Aceasta se verifică ușor introducând ulei în amestec de apă - alcool (cu densitatea egală cu cea a uleiului). Prin forța arhimedică se echilibrează greutatea și picăturile de ulei iau formă sferică în acel amestec. Lichidul de volum dat tinde să-și minimalizeze suprafața, prin aceasta minimizându-și energia potențială rezultată din tensiunea superficială.

Acțiunea forțelor rezultate din presiunea internă este analoagă acțiunii care ar apărea dacă suprafața lichidului ar fi acoperită cu o membrană elastică întinsă și care, prin acțiunea sa, "strânge" lichidul. Toate fenomenele determinate de presiunea internă pot fi explicate prin studiul acțiunii unei astfel de membrane virtuale.

Dacă s-ar secționa (imaginar) această membrană, pentru a o menține în echilibru pe linia de tăietură trebuie introdusă o forță  $F$ , pe lungimea  $L$ , care înlocuiește influența reciprocă a părților tăiate. Această forță este proporțională cu lungimea  $L$  și cu coeficientul tensiunii superficiale  $\sigma$ :

$$F = \sigma \cdot L \quad (2.31)$$

Coeficientul tensiunii superficiale ( $\sigma = F/L$ ) depinde de natura lichidului și de temperatură - scade cu creșterea temperaturii, ajungând la zero la punctul de

fierbere. Forța de tensiune superficială se mai numește și forță de **coeziune**, ca rezultat al interacțiunii moleculelor de lichid.

Dimensional  $[\sigma] = M \cdot T^{-2}$  și are unitatea de măsurare N/m.

**Tabelul 2.9.** Coeficientul tensiunii superficiale pentru câteva lichide în contact cu aerul, la temperatura  $\theta = 18^\circ\text{C}$

Nr. Crt.	Lichidul	$\sigma$ (N/m)
1	apă	0.0730
2	mercur	0.4700
3	alcool	0.0253
4	untdelemn	0.0327
5	glicerină	0.0650

**Tabelul 2.10.** Variația coeficientului tensiunii superficiale cu temperatura pentru apă – aer

$\theta$ ( $^\circ\text{C}$ )	0	10	20	30	40	50
$\sigma$ (N/m)	0,0755	0,0741	0,0726	0,0711	0,0696	0,0680

Când suprafața de contact a două fluide imiscibile este plană atunci tensiunea superficială nu este pusă în evidență, însă când suprafața menționată este curbă tensiunile superficiale nu se echilibrează reciproc și pentru starea de repaus trebuie să intervină alte forțe, rezultate din diferența de presiune pe cele două fețe ale suprafeței curbe. Pentru a calcula diferența de presiune ( $p_1 - p_2$ ) într-un punct A al suprafeței de contact (fig. 2.5) se delimitează în jurul punctului considerat un element de suprafață (dreptunghi curbiliniu), având laturile  $ds_1$  și  $ds_2$ .

După o direcție suprafața are raza de curbura  $R_1$  cu centrul în  $O_1$ , iar în direcție perpendiculară  $R_2$  cu centrul în  $O_2$ . Datorită diferenței de presiune pe elementul de suprafață curbă acționează forța  $(p_1 - p_2)ds_1ds_2$ . Tensiunea superficială, care acționează pe fiecare latură  $\sigma ds_1$  și  $\sigma ds_2$ , echilibrează forța rezultată din diferența de presiune.

Din figură rezultă  $d\alpha = ds_1 / R_1$  și  $d\beta = ds_2 / R_2$ . Rezultanta celor două forțe pe direcția normală la suprafață este  $\sigma ds_1 d\beta = \sigma ds_1 ds_2 / R_2$  pentru forța  $\sigma ds_1$  și  $\sigma ds_2 d\alpha = \sigma ds_2 ds_1 / R_1$  pentru forța  $\sigma ds_2$ .

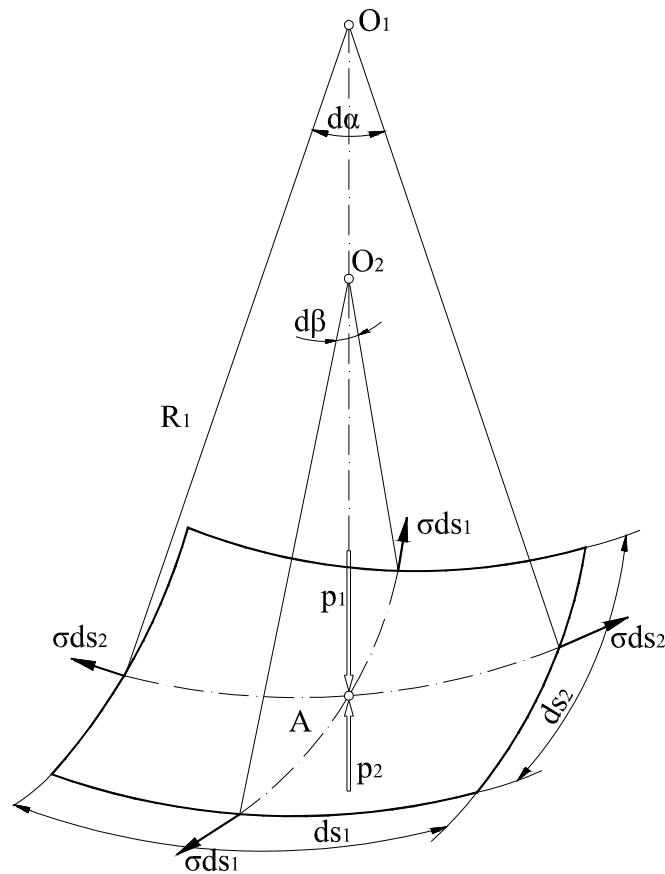


Fig. 2.5. Schemă pentru demonstrarea legii lui Laplace

Din condiția de echilibru rezultă ecuația lui Laplace:

$$p_1 - p_2 = \sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.32)$$

care arată că diferența de presiune într-un punct al suprafeței curbe de separație a două fluide imiscibile este egală cu dublul produsului dintre coeficientul de tensiune superficială și curbura medie a suprafeței.

Presiunea este mai mare spre concavitatea suprafeței curbe.

Efecte de manifestare a tensiunii superficiale sunt: spuma, "plutirea" corpurilor solide cu densitate superioare lichidelor; formarea și forma picăturilor; ascensiune în capilare și la pereți solizi etc.

a) Tensiunea superficială explică echilibrul unei picături din lichidul *B* pe suprafața lichidului *A*, ambele în contact cu un gaz *C* (fig.2.6).

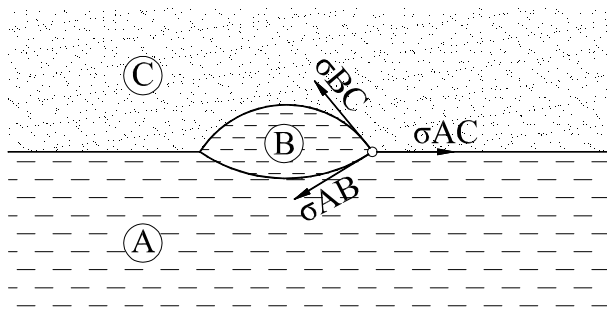


Fig. 2.6. Condiția de repaus a liniei comune a trei fluide imiscibile (tensiune interfacială)

Fie  $\sigma_{AB}$ ,  $\sigma_{AC}$  și  $\sigma_{BC}$  tensiunile superficiale între fluidele  $AB$ ,  $AC$  și  $BC$ ; condiția de repaus a liniei comune celor trei fluide este:

$$\bar{\sigma}_{AB} + \bar{\sigma}_{AC} + \bar{\sigma}_{BC} = 0 \quad (2.33)$$

Dacă  $\left| \bar{\sigma}_{AC} \right| > \left| \bar{\sigma}_{AB} \right| + \left| \bar{\sigma}_{BC} \right|$  repausul nu poate avea loc deoarece ecuația (2.33) nu poate fi satisfăcută.

Exemplu: A-apa; B-ulei; C-aer, cu  $\sigma_{\text{aer-aer}} = 0,073 \text{ N/m}$ ,  $\sigma_{\text{apă-ulei}} = 0,02 \text{ N/m}$  și  $\sigma_{\text{ulei-aer}} = 0,03 \text{ N/m}$ , deci picătura de ulei se întinde pe suprafața apei, având tendința de a o acoperi complet (se tinde la strat monomolecular de ulei pe apă), fapt ce explică tendința întinderii în spațiu a poluării apei cu produse petroliere.

b) Fie  $\sigma_{AB}$  tensiunea superficială între un lichid și gaz,  $\sigma_{AC}$  între lichid și solid și  $\sigma_{BC}$  între gaz și solid (fig. 2.7.a,b). Condiția de repaus a liniei comune de contact este:

$$\sigma_{AB} \cdot \cos \alpha - \sigma_{BC} + \sigma_{AC} = 0 \quad (2.33')$$

care determină unghiul de racordare dintre fluid și solid:

$$\alpha = \arccos \frac{\sigma_{BC} - \sigma_{AC}}{\sigma_{AB}} \quad (2.34)$$

Dacă  $\left| \bar{\sigma}_{BC} \right| > \left| \bar{\sigma}_{AB} \right| + \left| \bar{\sigma}_{AC} \right|$ , din ecuația (2.33) rezultă că repausul nu poate avea loc;

lichidul se întinde pe toată suprafața solidă. Într-un asemenea caz lichidul udă perfect peretele.

Când  $\left| \bar{\sigma}_{BC} \right| < \left| \bar{\sigma}_{AB} \right| + \left| \bar{\sigma}_{AC} \right|$  repausul este posibil. Astfel, dacă  $\left| \bar{\sigma}_{BC} \right| > \left| \bar{\sigma}_{AC} \right|$  rezultă  $\alpha < 90^\circ$  (fig. 2.7.a), lichidul udă imperfect peretele (ex. apă-sticlă murdară).

Dacă  $\left| \bar{\sigma}_{BC} \right| < \left| \bar{\sigma}_{AC} \right|$ ,  $\alpha > 90^\circ$  (fig. 2.7. b), lichidul nu udă peretele (ex. mercur-sticlă).

Forma picăturii de lichid care nu udă suprafața este folosită pentru construirea unor rezervoare mari, cu pereți subțiri în care iau naștere numai eforturi de întindere, analoage tensiunii superficiale.

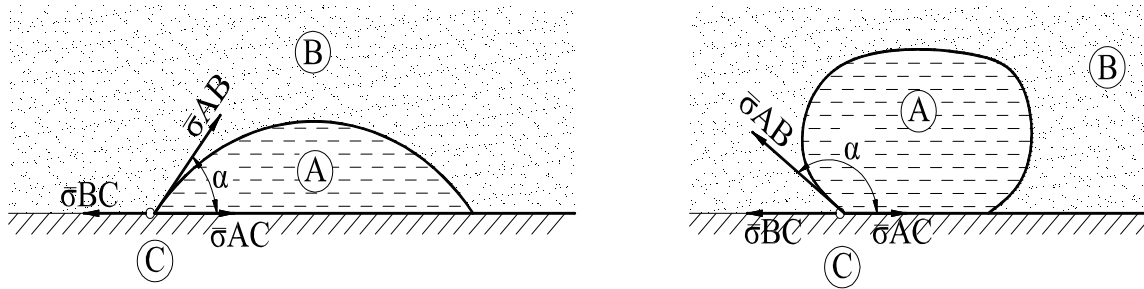


Fig. 2.7. Echilibrul picăturilor pe suprafețe solide.

a - lichidul ce udă peretele,  $\alpha < 90^\circ$ ; b - lichidul ce nu udă peretele,  $\alpha > 90^\circ$

c) Tensiunea superficială și greutatea fluidului explică formarea și dimensiunile ascensiunii lichidului la un perete, ascensiunea între doi pereți paraleli și apropiati și ridicarea lichidelor în tuburi capilare.

Asemănător celor descrise anterior are loc racordarea lichidului la perete solid vertical în prezența unui gaz (fig. 2.8. a, b).

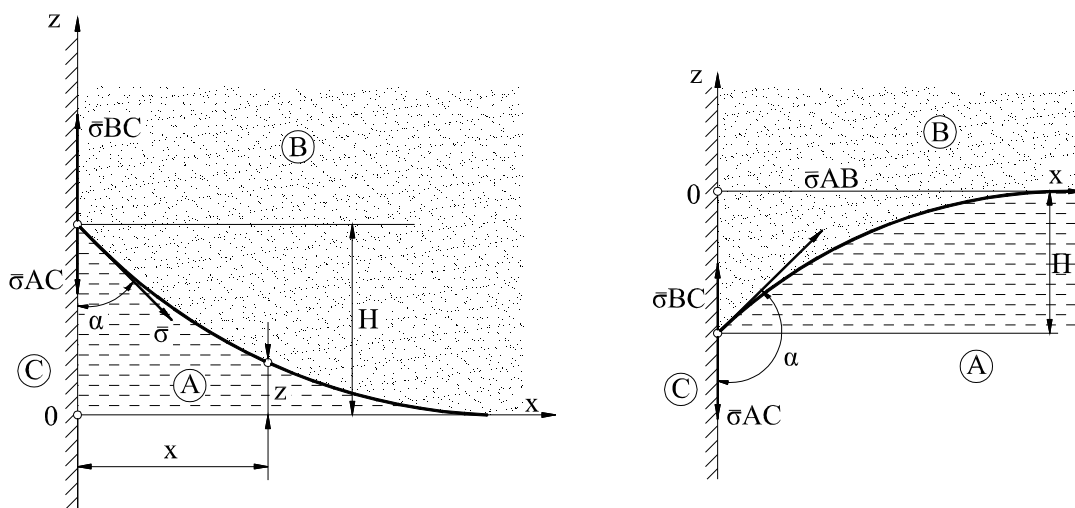


Fig. 2.8. Racordarea meniscului la perete vertical, a-lichidul udă peretele;  
b-lichidul nu udă peretele

Ecuția diferențială a echilibrului (a formei lângă perete) este:

$$\frac{\gamma}{\sigma} \cdot z = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} = 0 \quad (2.35)$$

care are soluția

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot x = \arg ch \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma \cdot z^2}} - \arg ch \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma \cdot H^2}} - \left(4 - \frac{\gamma}{\sigma} \cdot z^2\right)^{1/2} + \left(4 - \frac{\gamma}{\sigma} \cdot H^2\right)^{1/2} \quad (2.36)$$

Înălțimea de ridicare maximă ( $H$ ) este:

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sin \varepsilon)}{\gamma}} \quad (2.37)$$

d) Ascensiunea  $h_m$  a lichidelor între doi pereți plani, verticali, paraleli la distanța "a" mică (fig.2.9) se poate obține cu suficientă precizie dacă se admite meniscul cilindric de rază  $r$ .

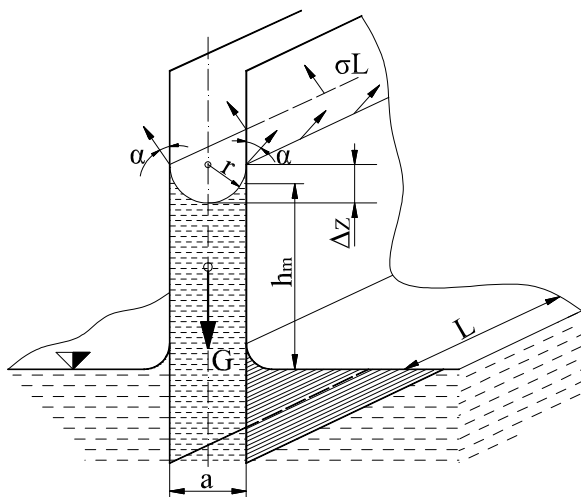


Fig.2.9. Ascensiunea lichidelor între pereți verticali paraleli

Din condiția de echilibru, greutatea lichidului în ascensiune, egală cu proiecția forței rezultată din tensiunea superficială, rezultă înălțimea de ridicare capilară:

$$\gamma \cdot L \cdot a \cdot h_m = 2 \cdot \sigma \cdot L \cdot \cos \alpha$$

sau

$$h_m = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\gamma a} \quad (2.38)$$

e) Ridicarea în tuburi cilindrice verticale de diametre mici – **ascensiunea capilară** - se calculează asemănător cazului precedent, înlocuind  $a = d$ , iar tensiunea superficială acționează pe perimetrul  $\pi \cdot d$ , deci:

$$\begin{aligned} \gamma h_m \frac{\pi d^2}{4} &= \pi d \sigma \cos \alpha, \text{ sau} \\ h_m &= \frac{4\sigma \cos \alpha}{\gamma d}, \text{ sau} \\ h_m d &= \frac{4\sigma \cos \alpha}{\gamma} = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ecuția (2.39) este legea Jurin-Borelli de ascensiune capilară.

Trebuie specificat că ascensiunea are loc pentru  $\alpha < 90^\circ$ , deci  $\cos \alpha > 0$ , deci în cazul lichidelor care udă peretele. Pentru lichide care nu udă peretele  $\alpha > 90^\circ$ ,  $\cos \alpha < 0$ , ascensiunea capilară va fi negativă - lichidul coboară în tub.

**Exemplu:** - pentru apă în tub de sticlă curat

$$h_m \cdot d = 30 \text{ mm}^2 \text{ la } \theta = 0^\circ \text{C};$$

$$h_m \cdot d = 31 \text{ mm}^2 \text{ la } \theta = 20^\circ \text{C}$$

- pentru mercur în tub de sticlă curat

$$h_m \cdot d = -14 \text{ mm}^2.$$

În practica hidrotehnică în general, dar în hidroameliorații în special, fenomenul de capilaritate are o importanță deosebită. Umiditatea solului la capacitatea de câmp corespunde apei reținute prin capilaritate. Apa capilară - sprijinită sau suspendată - are rolul primordial pentru accesibilitatea asimilării de către plante. Apa capilară sprijinită, cu ridicare până la suprafață și apa freatică mineralizată conduce - prin evaporare la suprafață - la salinizare secundară a solului. Inginerul hidroameliorator trebuie să opereze și cu apă capilară a solului pe lângă apa liberă. În meseria de constructor apa capilară (tot prin ridicare) pune probleme la izolații în scopul combaterii fenomenelor de **igrasie** și a celor asociate cu aceasta.

f) **Picăături.** Alt fenomen în care intervin forțele rezultate din tensiunea superficială îl constituie formarea picăturilor. Se presupune că la vârful unei pipete se formează o picătură (fig. 2.10). Aceasta se desprinde de coloana de lichid de-a lungul circumferinței  $MN$ , de rază  $r_0$ . Desprinderea are loc în momentul când greutatea  $\bar{G}$  echilibrează forța de tensiune superficială pe linia  $MN$ . Notând  $r_0 = \varkappa R$ , rezultă:

$$\bar{G} = 2\pi \varkappa \sigma R \quad (2.40)$$

care este legea lui **Tate** și care arată că, greutatea picăturii este proporțională cu raza tubului și coeficientul tensiunii superficiale. în condiții uzuale de formare a picăturilor în aer  $\varkappa=0,54...0,73$ .

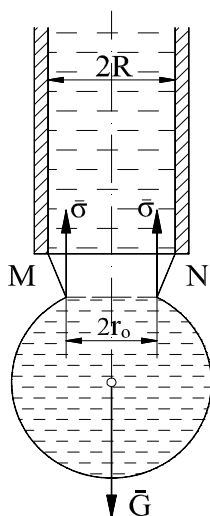


Fig. 2.10. Shemă privind formarea picăturii



### 2.2.6. Absorbția gazelor

Absorbția, în general, este un proces fizico-chimic în care gazele și vaporii (faza absorbată) pătrund prin difuzie în masa unui lichid (faza absorbantă) prin suprafața de separație a celor două faze. Fenomenul are loc dacă concentrația componentelor fazei absorbate este mai mică decât cea corespunzătoare echilibrului față de faza absorbantă. Absorbția este fizică dacă se produce numai o dizolvare a gazului în lichid și chemosorbție dacă fenomenul este urmat de proces chimic între cele două faze. Absorbția crește odată cu presiunea. Raportul dintre volumul de gaz dizolvat și volumul de lichid se numește coeficient de solubilitate. Conform **legii lui Henry**, coeficientul de solubilitate rămâne constant la temperatură constantă. La amestec de gaz, conform **legii lui Dalton**, fiecare gaz se comportă ca și cum ar fi singur în prezența lichidului.

Apa în stare naturală, presiune normală și temperaturi obișnuite (760 mm Hg, 20°C), conține circa 2% aer din volumul său.

Aerul absorbit este compus din 34% O<sub>2</sub>, 66% N<sub>2</sub> față de aerul atmosferic 21 % O<sub>2</sub> și 79% N<sub>2</sub>. Aerul absorbit se găsește în apă sub forma unor bule mici legate de particule solide (impurități).

### 2.2.7. Cavitația

Un gaz dacă se află la o temperatură  $\theta$  inferioară temperaturii critice  $\theta_{cr}$  prin comprimare se poate lichefia. La aceasta temperatură  $\theta < \theta_{cr}$  există o anumită presiune  $p_v$  la care se produce lichefierea (fig.2.11). Temperaturii critice îi corespunde izoterma critică.

La  $p_v$  o parte din lichid se lichefiază, altă parte rămâne sub formă gazoasă.

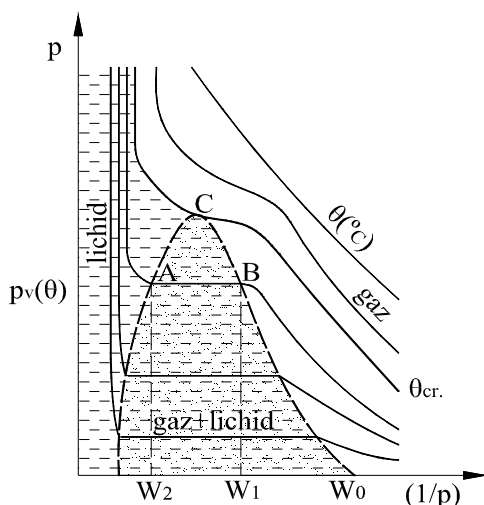


Fig. 2.11. Izotermele experimentale ale unui gaz

**Exemplu:** pentru izoterma  $\theta$  creșterea presiunii conduce la reducerea volumului, ajungând la un moment dat la punctul  $B$  unde începe lichefierea gazului. Pe curba  $AB$ , la presiunea  $p_v$  și temperatură  $\theta$ , faza lichidă și gazoasă coexistă pentru volume  $W \in (W_2; W_1)$ .

Echilibrul acestei stări bifazate este instabil: orice creștere de presiune produce fază lichidă omogenă, pe când o scădere a presiunii implică fază gazoasă omogenă. Valoarea  $p_v$  – **presiunea vaporilor saturați** sau **presiunea de vaporizare** - depinde de temperatură; fiecărei izoterme inferioare celei critice îi corespunde o astfel de presiune la valoarea palierului curbei.

Dacă presiunea unui lichid coboară sub  $p_v$  atunci în interiorul lichidului apare tendința de formare a unor cavități. Considerând ecuația de stare  $f(p, W, T) = 0$ , scrisă sub forma dată de Clapeyron-Mendeleev,

$$p \cdot W = g \cdot R \cdot T \text{ sau } p \cdot \rho^{-1} = g \cdot R \cdot T, \quad (2.11)$$

cele afirmate devin evidente; pentru orice scădere a presiunii  $p$  trebuie să crească  $W$ . Într-un lichid de masă dată creșterea de volum are loc prin eliberarea gazelor absorbite sub formă de bule. O scădere și mai accentuată a presiunii (care nu mai poate fi compensată de eliberarea de gaze) produce evaporarea lichidului și apariția bulelor cu vaporii (și bulele de gaz conțin vaporii). Acest fenomen produs într-un lichid este **explozia** - degajarea de gaze și evaporare. Acest bule, cavități cu gaz și vaporii, într-un lichid în mișcare pot ajunge în zone unde presiunea este superioară presiunii de vaporizare, sau chiar în același loc presiunea poate crește datorită pulsațiilor de presiune, iar aceste cavități dispar prin "**implozie**". Are loc condensarea vaporilor și reabsorbirea gazelor. Fenomenul de implozie, de surpare a cavităților este însoțit de fenomene fizice și chimice doar parțial elucidate. Implozia are efecte importante asupra pereților solizi atât prin acțiune directă, cât și indirectă (unde de presiune). La implozie, prin calcule și măsurători s-au evidențiat presiuni de circa 200 bar, dar este posibilă și realizarea unor presiuni mult mai mari. La implozie s-au remarcat unele protuberante - posibil că este eliminarea din cavități a vaporilor condensați sub formă de microjet.

Fenomenul complex de apariție și dispariție a bulelor cavitaționale în interiorul unui lichid se numește cavitație (fig. 2.12).

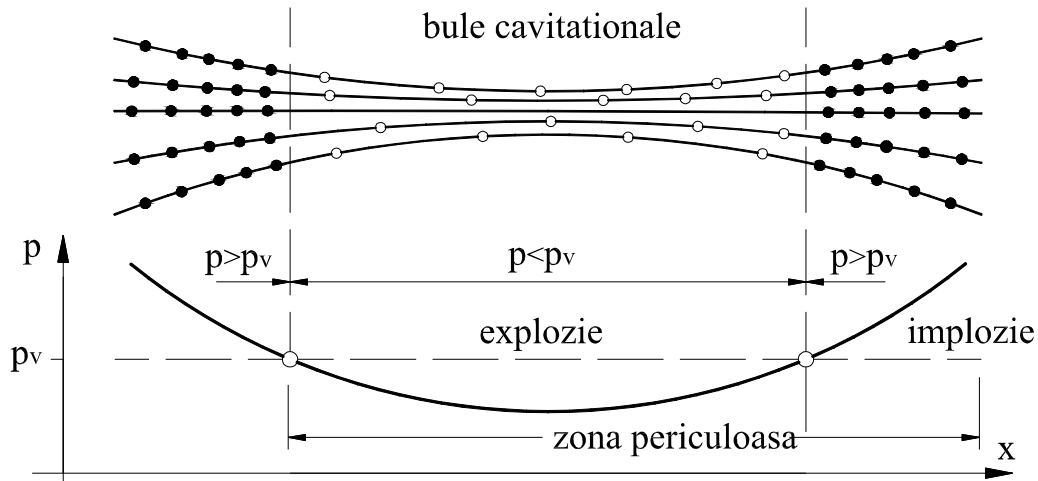


Fig.2.12. Schema producerii fenomenului de cavitație.

Suprapresiunile la implozie solicită mecanic materialul și produc zgomote puternice. Această ipoteză mecanică nu explică de ce materialele cu rezistență mecanică mai mică sunt mai rezistente la cavitație decât altele cu rezistență mai mare (ex. bronz și oțel). Ipoteza chimică explică distrugerea metalelor prin efectul chimic al fenomenului: gazele degajate pun în libertate oxigenul atomic, foarte activ chimic, care produce coroziune. Ipoteza termodinamică atribuie cavitației realizarea unor temperaturi mari (mii de grade) prin recondensarea vaporilor, care slăbesc rezistența materialului. Ipoteza electrică atribuie cavitației fenomene electrice (s-au observat la implozie scânteii) prin diferența de potențial dintre bulele de gaz și lichid.

Cavitația distruge materialele cu care vine în contact prin efectele menționate cumulate. Suprafețele supuse cavitației după un timp prezintă fenomene de eroziune, sub forma unor caverne de adâncime neregulate (asemănătoare unui burete). Nici un material cunoscut până azi nu rezistă la efectele cavitației.

Fenomenul se caracterizează cantitativ prin cifra de cavitație

$$\sigma_{cavit.} = \frac{p - p_v}{\gamma} \frac{2g}{v^2} \quad (2.41)$$

Studiul cavitației este unul dintre preocupările intense ale cercetărilor hidraulice.

### 2.2.8. Difuzia

Difuzia este proprietatea de amestecare a moleculelor unei materii datorită energiei cinetice a agitației termice. Tot structura moleculară a stărilor de agregare explică această proprietate, precum și viteza difuziei. Astfel  $E_{cat} \gg \Delta E_p$  arată viteza apreciabilă a difuziei în gaze, iar  $E_{cat} \approx \Delta E_p$  scoate în evidență viteza redusă a difuziei în lichide. La solide  $E_{cat} < \Delta E_p$ , deci difuzia este redusă la zero.

**Difuzia masică** este transportul de masă într-un mediu de fluid în repaus datorită agitației termice dacă în diferite puncte ale mediului există diferență de densitate. Agitația termică prin difuzie tinde să restabilească uniformitatea densității fluidului.

Se consideră, pentru exemplificare (fig.2.13), un amestec format din două fluide  $G_1$  și  $G_2$ , presupunându-se totodată că fluidul  $G_1$  este în cantitate mică în raport cu fluidul  $G_2$  ( $G_1$  vapori de apă,  $G_2$  aer).

Într-un punct  $M$ , din domeniul ocupat de amestec, concentrația  $C$  a fluidului  $G_1$  în  $G_2$  este raportul dintre masa de fluid  $dm_1$  și  $dm_1 + dm_2$  din volumul  $dW$  din jurul punctului  $M$ ,

$$C = \frac{dm_1}{dm_1 + dm_2} \quad (2.42)$$

La suprafața lichidului (apei) se poate considera că valoarea concentrației este la saturație  $C_s$ , iar la distanța  $H$ , (unde nu se resimte influența vaporilor)  $C_\infty$

Știind că  $C_s > C_\infty$ , vaporii  $G_1$  difuzează natural în  $G_2$ . După un timp suficient de lung - la distanța  $y$  de suprafața liberă a lichidului concentrația este  $C$  - se constată că între elementele menționate există relația:

$$\frac{C_s - C}{C_s - C_\infty} = \frac{y}{H} \quad (2.43)$$

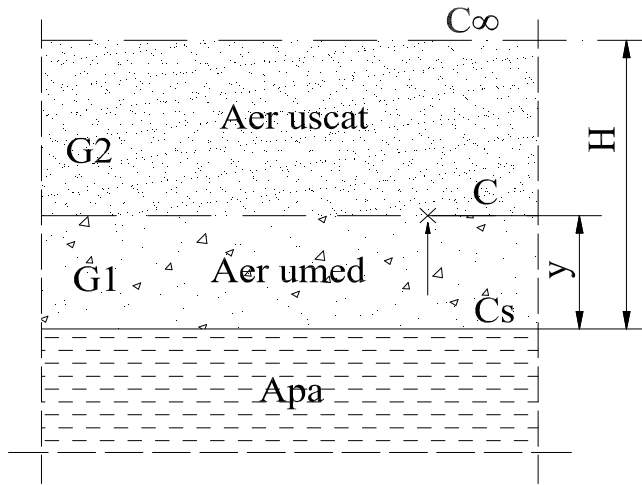


Fig. 2.13. Difuzia vaporilor de apă în aer.

Fluxul masic care traversează unitatea de suprafață din jurul punctului M, în unitatea de timp, este dată de legea lui Fick:

$$\varphi_c = -D_m \frac{\Delta C}{H} \quad \text{sau} \quad \varphi_c = -D_m \frac{dC}{dy} \quad (2.44)$$

unde:  $\varphi_c$ - este fluxul masic;  $D_m$  - coeficient de difuzie masică;  $\Delta C/H$ - gradientul concentrației. Semnul minus din relație arată că transportul de masă are loc în sensul descreșterii concentrației. Dimensional coeficientul difuziei masice este  $[D]=L^2T^{-1}$ , având unitate de măsurare  $m^2/s$ . Ex: coeficientul difuziei masice a vaporilor de apă în aer, la  $16^\circ C$  este  $0,0092 \text{ cm}^2/s$ .

### 2.2.9. Dilatația termică

Modificarea relativă a volumului unui fluid este proporțională cu modificarea temperaturii.

$$\frac{\Delta W}{W} = \beta_t \Delta \theta \quad (2.45)$$

unde:  $\frac{\Delta W}{W}$  este modificarea relativă de volum la variația temperaturii cu  $\Delta \theta$ , iar factorul de proporționalitate  $\beta_t$ -coeficient de dilatare termică (având dimensiunea  $[\beta_t] = \theta^{-1}$  și unitatea  $\text{grad}^{-1}$ . Valoarea lui  $\beta_t$  practic este constantă, depinzând puțin de temperatură (tabel 2.11).

**Tabelul 2.11.** Coeficienții de dilatare termică ai unor lichide

Lichidul	$10^2 \cdot \beta_t (^\circ\text{C}^{-1})$	Lichidul	$10^2 \cdot \beta_t (^\circ\text{C}^{-1})$
Apă	0,207	Mercur	0,0181
Alcool etilic	0,110	Petrol lampant	0,09 ... 0,095
Glicerină	0,051	Soluție NaCl 20%	0,041

În ipoteza presiunii constante (atmosferică), în intervalul de temperatură 0...100°C, pentru dilatația gazelor se poate folosi relația (2.45), cu valorile din tabelul 2.12.

**Tabelul 2.12.** Coeficientul de dilatație termică al unor gaze

Gazul	$10^3 \cdot \beta_t (^\circ\text{C}^{-1})$	Gazul	$10^3 \cdot \beta_t (^\circ\text{C}^{-1})$
Azot	3,674	Oxigen	3,665
Hidrogen	3,661	Heliu	3,658
Aer (fără CO <sub>2</sub> )	3,671	Oxid de carbon	3,669
Amoniac	3,804	Bioxid de carbon	3,741

Valoarea lui  $\beta_t$  la gaze depinde de presiunea inițială.

Apa, din punct de vedere al dilatației termice, prezintă anomalie, la circa 4°C (3,98°C) are volum specific minim. Dilatarea termică a apei este caracterizată de următoarele relații empirice.

- pentru  $\theta \in (-10...4^\circ\text{C})$

$$W = W_0(1 - 6,4085 \cdot 10^{-5} \cdot \theta + 8,6697 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^2 - 2,6211 \cdot 10^{-7} \cdot \theta^3), \quad (2.46)$$

- pentru  $\theta \in (0...33^\circ\text{C})$

$$W = W_0(1 - 6,4268 \cdot 10^{-5} \cdot \theta + 8,50526 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^2 - 6,78977 \cdot 10^{-8} \cdot \theta^3 + 4,01209 \cdot 10^{-10} \cdot \theta^4) \quad (2.46')$$

- pentru  $\theta \in (0...80^\circ\text{C})$

$$W = W_0(1 - 5,3255 \cdot 10^{-5} \cdot \theta + 7,61532 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^2 - 4,37217 \cdot 10^{-8} \cdot \theta^3 + 1,64322 \cdot 10^{-10} \cdot \theta^4) \quad (2.46'')$$

Temperatura volumului specific minim depinde de presiune (ex. Pentru

$p = 41,1 \text{ bar}$ ,  $\theta = 3,3^\circ\text{C}$ ). La apă grea ( $\text{D}_2\text{O}$ ) temperatura densității maxime la presiune normală este  $\theta = 11,6^\circ\text{C}$ .

În cazul mercurului dependența coeficientului de dilatare cu temperatura (între  $-20 \dots 100^\circ\text{C}$ ) este

$$\beta_t = 1,815405 \cdot 10^{-4} + 0,19513 \cdot 10^{-8} \cdot \theta + 1,00917 \cdot 10^{-10} \cdot \theta^2 - 2,0386 \cdot 10^{-13} \cdot \theta^3 \quad (2.47)$$

### 2.2.10. Conductibilitatea termică

Conductibilitatea termică este proprietatea fluidelor de a transmite căldura. Pentru a evidenția această proprietate se consideră un fluid în repaus aflat între două plăci plan paralele  $P_1$  și  $P_2$  situate la distanța  $H$ , caracterizate prin temperaturile  $\theta_1$  și  $\theta_2$  (fig. 2.14).

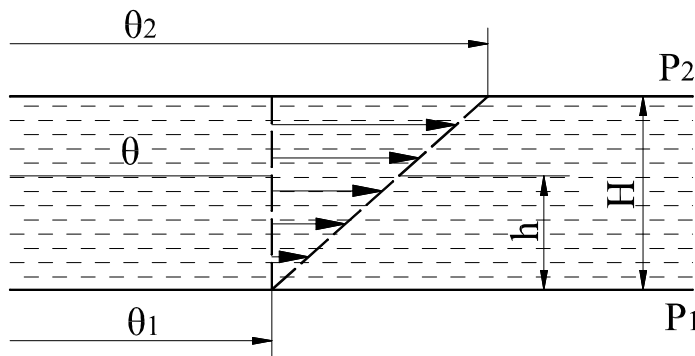


Fig. 2.14. Schema distribuției temperaturii fluidelor în repaus.

Experiența arată că după un timp fluidul în contact cu placa are temperatura acestuia, iar între plăci repartitia temperaturii este liniară, descrisă de relația:

$$\frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{h}{H} \quad (2.48)$$

Căldura traversează lichidul, fluxul de căldură ce trece prin unitatea de suprafață în unitatea de timp este descrisă de legea lui Fourier,

$$\varphi_t = -k_t \frac{\Delta\theta}{H} \text{ sau } \varphi_t = -k_t \frac{d\theta}{dh} \quad (2.49)$$

unde:  $k_t$  este coeficientul de conductivitate termică. Semnul minus din relație arată că transmisia de căldură, are loc în sensul descreșterii temperaturii. Când  $k_t$  este constant pentru întreaga masă fluidă, se poate scrie

$$\frac{d\theta}{dh} = k_t \frac{d^2\theta}{dh^2} \quad (2.50)$$

unde  $\theta$  este temperatura absolută, iar  $k_t$  coeficient al difuziei termice  $\left( k_t = \frac{k_t}{\rho \cdot c_p} \right)$ .

Tabelul 2.13 Conductibilitatea termică a lichidelor

Nr. crt.	Lichidul	$\theta$ (°C)	$10^2 k_t$ (cal/cm·s °C)	$k_t$ (J/m s °C)	Nr. crt.	Lichidul	$\theta$ (°C)	$10^2 k_t$ (cal/cm·s °C)	$k_t$ (J/cm·s·°C)
1.	apă	4,1	0,129	0,540	6.	alcool etilic	33	0,035	0,146
2.	apă	20	0,142	0,594	7.	glicerina	20	0,068	0,285
3.	apă	80	0,154	0,645	8.	petrol lam-pant	13	0,035	0,146
4.	apă	90	1,160	0,670	9.	soluție NaCl 10%	32	0,148	0,619
5.	alcool etilic	12	0,042	0,176	10.	tetra-cloură de carbon Cl <sub>4</sub> C	23	0,028	0,117

Tabelul 2.13'. Conductibilitatea termică a unor gaze

Nr. crt.	Gazul	$10^5 \cdot k_t$ cal/mol · cm · °C	$k_t$ j/m·s °C	Nr. crt.	Gazul	$10^5 \cdot k_t$ cal/mol · cm · °C	$k_t$ j/m·s °C
1.	Oxygen	5,84	0,0244	5.	Metan CH <sub>4</sub>	7,34	0,0307
2.	Monoxid de carbon	5,52	0,0231	6.	Bioxid de carbon	3,48	0,0146
3.	Heliu	33,90	0,1419	7.	Bioxid de azot	3,62	0,0152
4.	Hidrogen	39,65	0,1660	8.	Aer	5,66	0,0237



### 2.2.11. Proprietățile electrice ale apei

Apa este dielectrică, deci așezată între armăturile unui condensator mărește capacitatea acestuia de la  $C_1$  la  $C_2$ . Raportul  $\varepsilon = C_2 / C_1$  este constanta dielectrică a apei și depinde de temperatură și presiune, astfel:

$$\varepsilon = 80 - 0,4 (\theta + 20) \quad (2.51)$$

iar la  $\theta = 16^\circ\text{C}$

$$\varepsilon = 81,5 + 0,0045 p \quad (2.52)$$

Relațiile sunt valabile pentru  $\theta$  în  $^\circ\text{C}$  și  $p$  în bar.

Rezistivitatea dezvoltată de apă cu secțiunea  $A$ , pe lungimea  $L$  este:

$$R = \rho_e \frac{L}{A} \quad (2.53)$$

unde:  $\rho_e$  este rezistența specifică a apei. Inversul rezistenței specifice este conductivitatea specifică  $\sigma_e = 1/\rho_e$  ( $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Rezistența specifică a apei distilate este  $\rho_e = (1 \dots 7,15) \cdot 10^3 \Omega \cdot \text{m}$ , iar a apei de râu  $50 \Omega \cdot \text{m}$  față de  $10^{-4} \Omega \cdot \text{m}$  a mercurului.

### 2.3. Modele de lichid

Simplificarea fenomenelor din hidraulică, în scopul găsirii soluțiilor matematice pentru acestea, necesită neglijarea anumitor proprietăți ale fluidelor. În funcție de proprietățile: densitate, compresibilitate și vâscozitate - de care se ține seama (+) sau se neglijează (-) - definim modelele de fluid din tabelul 2.14.

Tabelul 2.14. Modele de fluid

Modelul/ Proprietatea	Ideal	Euler	Pascal	Newton	Real
Densitatea	-	+	+	+	+
Compresibilitatea	-	-	+	-	+
Vâscozitatea	-	-	-	+	+

### 2.4. Aplicații privind caracteristicile fizice ale fluidelor

2.1. Să se calculeze creșterea presiunii dintr-o autoclavă plină, cu apă, închisă ermetic, dacă temperatura crește cu  $\Delta\theta$ . Coeficientul de dilatare termică medie

a apei este  $\beta_\theta$ , iar coeficientul de compresibilitate  $\beta$ . Se neglijează deformarea autoclavei.

**Rezolvare:** Volumul apei după dilatare termică, în ipoteza unei deformabilități perfecte ale autoclavei este:  $W_1 = W_0 (1 + \beta_\theta \cdot \theta)$ .

În realitate autoclavă este nedeformabilă, deci presiunea crește conform legii compresibilității:

$$\Delta_p = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Delta W}{W_0} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{W_1 - W_0}{W_0} = \frac{\beta_\theta}{\beta} \cdot \Delta \theta$$

2.2. Distribuția vitezelor în mișcarea laminară a unui fluid real într-o conductă circulară este dată de legea Hagen-Poiseuille:  $u = u_{\max} (1 - r^2 / r_0^2)$ , unde  $r_0$  este raza conductei,  $r$  - o rază oarecare  $r \in [0, r_0]$ , iar  $u_{\max}$  este viteza maximă ce se realizează în axa conductei (fig.2.15). Să se stabilească distribuția efortului unitar tangențial.

**Rezolvare:** Efortul unitar tangențial după Newton este:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

semnul negativ arătând că  $u$  scade la creșterea razei. Din cele două relații rezultă:

$$\tau = \frac{2\mu \cdot u_{\max} \cdot r}{r_0^2}$$

deci  $\tau$  după raza conductei se repartizează liniar. Efortul maxim este la perete, pentru  $r=r_0$ , rezultă  $\tau_{\max} = 2\mu u_{\max} / r_0$ , respectiv distribuția relativă a efortului este:  $\tau / \tau_{\max} = r / r_0$ .

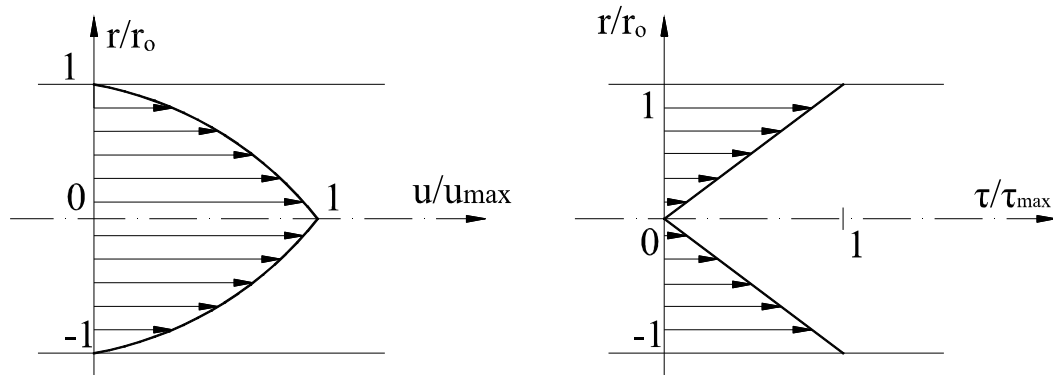


Fig. 2.15. Schema distribuției vitezei și efortului tangențial

**2.3.** Diametrul axului unei pompe este  $D$ , iar al cuzineților celor două lagăre cu  $2\delta$  mai mare. Lagărele au lungimea  $L$  (fig. 2.16). Ungerea se realizează cu apă la temperatura de funcționare  $\theta$ . Să se determine pierderea de putere în lagăre pentru turația  $n$  a rotorului.

**Rezolvare:** Axul are viteza periferică

$$u = \omega \cdot D/2 = (\pi \cdot n \cdot D)/60$$

Efortul unitar tangențial între ax și bucșă este  $\tau = \mu \cdot u / \delta$ , de unde rezultă forța de frecare în cele două lagăre:

$$F = 2 \cdot \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = 2 \cdot \mu \cdot u / \delta \cdot \pi \cdot D \cdot L$$

Puterea disipată pentru învingerea frecărilor vâscose:

$$P = F \cdot u = 2 \cdot \mu \cdot u^2 / \delta \cdot \pi \cdot D \cdot L = (2 \cdot \mu \cdot \pi^3 \cdot D^3 \cdot n^2 \cdot L) / (3600 \cdot \delta).$$

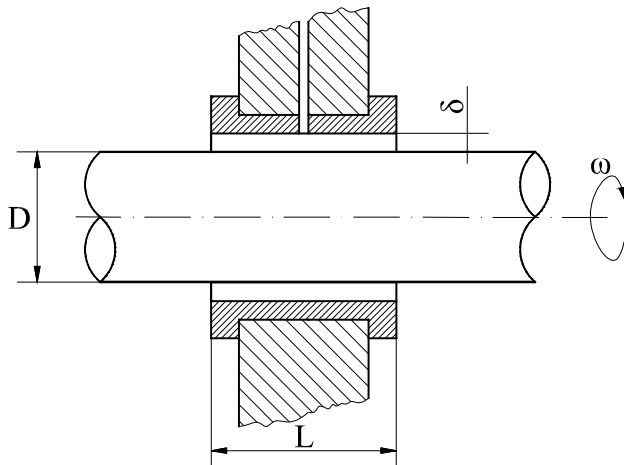


Fig. 2.16. Schema unui lagăr de alunecare

**2.4.** Un picurător are diametrul duzei de ieșire  $d=2R$ . Să se determine diametrul echivalent  $D$  al picăturilor de apă rezultate dacă se cunoaște coeficientul tensiunii superficiale  $\sigma$ , greutatea specifică a apei  $\gamma$  și  $\chi$  (v.fig. 2.10).

**Rezolvare:** Conform legii lui Tate desprinderea are loc când greutatea picăturii echivalează forța rezultată din tensiunea superficială:

$$G = \gamma (\pi D^3) / 6 = 2 \pi R \sigma \chi,$$

deci :

$$D = \sqrt[3]{\frac{12R\sigma\chi}{\gamma}} = \sqrt[3]{\frac{6d\sigma\chi}{\gamma}}$$

**2.5.** Să se calculeze eroarea relativă ce se introduce la măsurarea indirectă a debitului cu deversor dreptunghiular și triunghiular dacă sarcina pe acestea se determină cu tub piezometric și se neglijează ridicarea capilară (fig. 2.17).

Se cunosc:  $\sigma \cdot \cos\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $H$ ,  $d$  și ecuațiile:

- pentru deversor dreptunghiular  $Q = m \cdot b \sqrt{2g} \cdot H^{3/2}$
- pentru deversor triunghiular  $Q = MH^{5/2}$

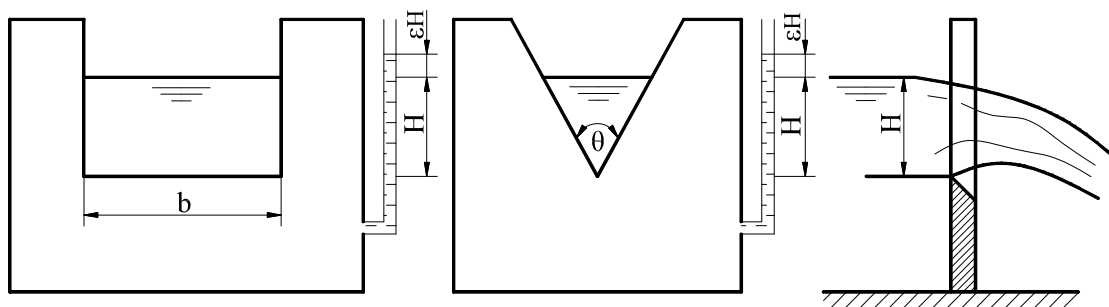


Fig. 2.17. Schema măsurării debitului cu deversoare

**Rezolvare:** Eroarea relativă este:

$$\delta Q = \frac{\epsilon Q}{Q} = \frac{dQ}{Q}$$

Pentru deversorul dreptunghiular:

$$\delta Q = \frac{d(m \cdot b \sqrt{2g} \cdot H^{3/2})}{m \cdot b \sqrt{2g} \cdot H^{3/2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{dH}{H} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon H}{H}$$

Pentru deversorul triunghiular:

$$\delta Q = \frac{d(M \cdot H^{5/2})}{M \cdot H^{5/2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{dH}{H} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\varepsilon H}{H}.$$

Eroarea absolută  $\varepsilon H$  respectiv  $\varepsilon Q$  este privită ca variație  $dH$  respectiv  $dQ$  a mărimilor continui  $H$  și  $Q$ . Eroarea absolută este ridicarea capilară în tubul piezometric de diametru  $d$ :

$$\varepsilon H = \frac{4\sigma \cos \alpha}{\gamma d},$$

eroarea relativă a debitului devenind:

- pentru deversor dreptunghiular

$$\delta Q = \frac{6\sigma \cos \alpha}{\gamma d H}$$

- pentru deversor triunghiular

$$\delta Q = \frac{10\sigma \cos \alpha}{\gamma d H}$$

## CAPITOLUL 3

### ECUAȚIILE GENERALE DE MIȘCARE ALE MEDIILOR CONTINUU

Studiul mișcării și stării de echilibru a fluidelor are ca bază ecuațiile diferențiale generale ale mișcării. Se acceptă ipoteza că fluidul este format dintr-o mulțime de particule suficient de mici care se mențin în contact prin acțiunea și reacțiunea unor forțe. Particula de fluid se consideră suficient de mică pentru ca să putem considera fluidul mediu continuu.

#### 3.1. Ecuațiile diferențiale de mișcare ale mediilor continui

Fluidul poate fi considerat un caz particular al unui mediu continuu, posedând proprietăți mecanice ce sunt comune materiei sub orice stare. Forțele prin care particulele fluidului rămân în legătură sunt unele proporționale cu volumul (forțele masice și de inerție), altele cu suprafața particulelor (forțe elastice și de frecare).

Forțele **masice** sunt proporționale cu masa particulei și se datoresc unui câmp de forțe de atracție (gravitațional, magnetic etc). Forțele de **inerție** sunt proporționale cu masa particulei și se resimt numai în cazul mișcărilor accelerate.

Forțele **elastice** sunt normale la suprafața particulelor și sunt de natura compresiilor sau întinderilor.

Forțele de **frecare** (tangențiale) asigură continuitatea fluidului.

Forțele care acționează asupra particulei fluide sunt în echilibru, deci se poate scrie:

$$\int_w \bar{f} \rho dw + \int_w \bar{a} \rho dw + \int_A \bar{p} dA + \int_A \bar{\tau} dA = 0 \quad (3.1)$$

unde:  $\bar{f}$  este versorul forței masice;  $\bar{a}$  - accelerația inerțială;  $\rho$  – densitatea fluidului din volumul  $w$ ;  $\bar{p}$  - efortul unitar al forțelor elastice;  $\bar{\tau}$  - efortul unitar al forțelor tangențiale care acționează pe suprafața  $A$  a particulei de fluid.

Exprimarea ecuațiilor mișcării în coordonate carteziene are la bază exprimarea echilibrului unei particule, virtual detașată din acel mediu continuu, înlocuite fiind acțiunile mediului asupra particulei. Se consideră o particulă fluidă infinitesimală într-un mediu continuu cu densitatea  $\rho$ , de forma unui paralelipiped elementar, cu laturile  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$ , al cărui vârf este animat de viteza  $\vec{V}$ , cu componentele  $u$ ,  $v$  și  $w$ , de accelerația  $\vec{a}$ , cu componentele  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$ . Forța masică este generată de câmpul  $\vec{f}$  cu componentele  $F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$  (fig. 3.1).

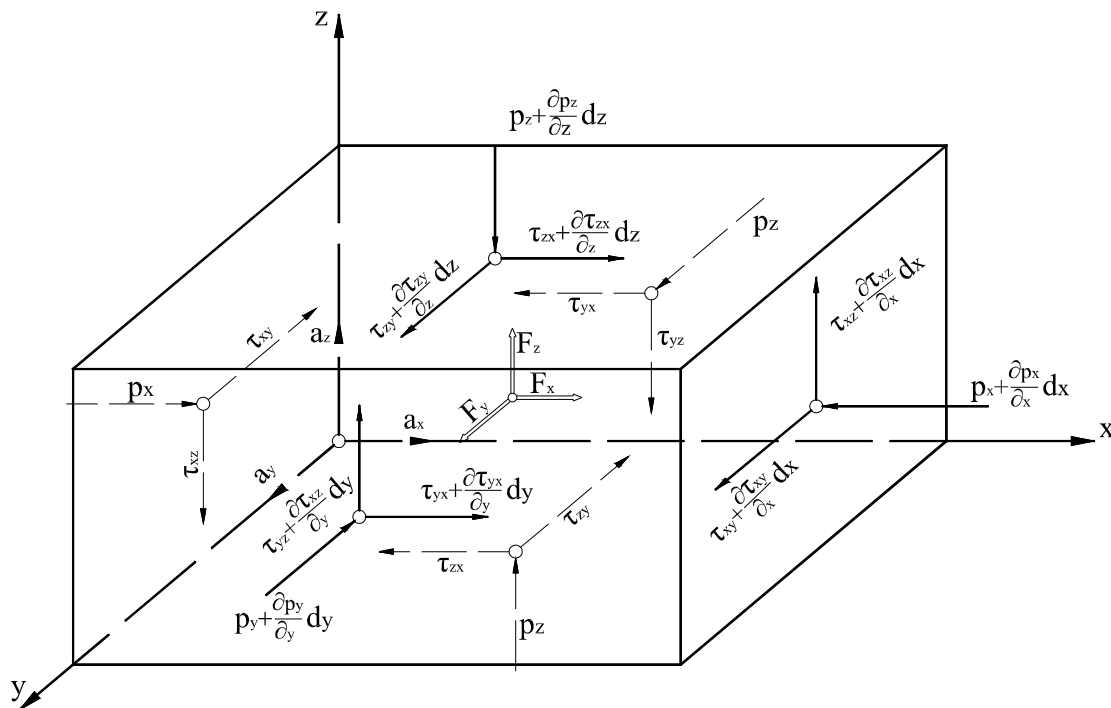


Fig. 3.1. Echilibrul unei particule fluide

Pe cele trei fețe concurente în  $O$  ale paralelipipedului elementar se consideră tensiunile normale  $p_x$ ,  $p_y$  și  $p_z$  uniforme pe fiecare față, de natura compresiunilor, orientate spre particulă. Indicele arată direcția cu care este paralel efortul. Tot pe aceste fețe acționează și eforturile unitare tangențiale  $\vec{\tau}$ , ale căror componente sunt afectate de doi indici - primul arată direcția normalei planului în care acționează efortul, iar al doilea, direcția cu care este paralel  $\tau$ . Conform principiului dualității eforturilor, cele șase eforturi unitare tangențiale practic se reduc la 3.

Pe celelalte fețe ale paralelipipedului elementar se consideră creșteri diferențiale ale eforturilor unitare în funcție de creșterile laturilor. Toate variabilele considerate sunt în funcție de spațiu și timp, deci  $f(x, y, z, t)$ .

Ecuatiile diferențiale ale mișcării se obțin prin scrierea echilibrului particulei din fig. 3.1, echivalent cu anularea proiecției după axele de coordonate ale tuturor forțelor. După axa  $x$ , se obține:

- forțe masice:  $\rho F_x dx dy dz$
- forțe de inerție:  $-\rho a_x dx dy dz$
- forțe elastice:

$$-(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx) dy dz + p_x dy dz = -\frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy dz$$

- forțe tangențiale:

$$\left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

Din condiția de echilibru a forțelor rezultă:

$$\begin{aligned} \rho(F_x - a_x) - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \rho(F_y - a_y) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \rho(F_z - a_z) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Acest sistem, dat de Cauchy, reprezintă ecuațiile diferențiale de mișcare ale mediilor continue.

**Observație.** După cum s-a enunțat, conform principiului dualității, **eforturile unitare tangențiale pe suprafețe normale și pe direcții normale** sunt egale:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ și } \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3.3)$$

Acestă proprietate se demonstrează aplicând ecuația momentelor forțelor care acționează particula elementară în raport cu axele care trec prin centrul geometric al particulei și sunt paralele cu axele de coordonate.



În raport cu paralele la axa  $OX$  avem:

$$\tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

sau

$$2\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - 2\tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz = 0$$

Momentul forței masice și de inerție reprezintă infiniți mici de ordin superior față de momentul celorlalte forțe și se pot neglija, iar suma momentului celorlalte forțe este nulă. Și termenii ce conțin pe  $\partial \tau_{ij}$  se pot neglija fiind infinit mai mici față de  $\tau_{ij}$ , rezultând:  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

În mod analog, se demonstrează  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  și  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

Ținând seama că accelerația este derivata vitezei în raport cu timpul, dar viteza este  $\bar{v}(x, y, z, t)$ , componentele accelerației devin:

$$\begin{cases} a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Înlocuirea sistemului (3.4) și (3.2) evidențiază forma generală a mișcării mediilor continue. Integrarea ecuațiilor permite stabilirea parametrilor mișcării. Probleme diferite și dificile intervin atât la integrarea ecuațiilor cât și la găsirea condițiilor de margine. Pe lângă ecuațiile de mișcare se consideră relațiile pentru a exprima:

- conservarea masei (continuitatea);
- continuitatea de formă;
- legătura între deformații și eforturi;
- starea fizică a materiei,  $f(p, \rho, T)$ ;
- transferul de căldură și conservarea energiei;
- funcția de vâscozitate.

În funcție de tipul de mișcare și modelul de fluid admis în rezolvarea ecuațiilor mișcării se întâlnesc mai multe situații particulare, fiecare caz prezentând importanța sa practică. Particularizările conduc la diferite grade de aproximare ale fenomenelor hidraulice. Trebuie remarcat faptul că sistemul (3.2) cu (3.4) conține un mare număr de necunoscute și trebuie completat cu condițiile anterior menționate. Problematika iese din cadrul unui curs de hidraulică, dar contribuie la înțelegerea fenomenelor.

### 3.2. Starea de tensiune în jurul unui punct

Starea de tensiune în jurul unui punct se poate afla din izolarea virtuală din masa fluidă a unui volum elementar, de forma unui tetraedru și considerarea pe fețele acestuia a eforturilor cu care această masă elementară de fluid este în contact cu restul (fig. 3.2). Se presupune că mărimea tetraedrului se reduce în jurul punctului O.

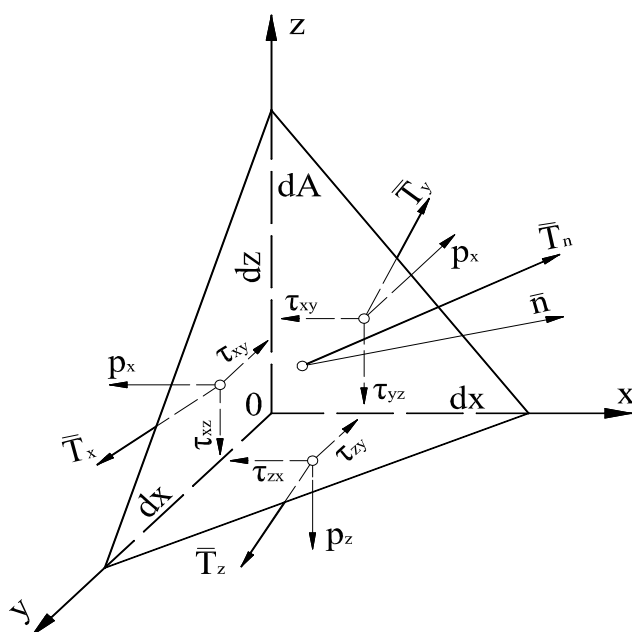


Fig. 3.2. Schemă pentru calculul stării de tensiune în jurul unui punct.

Efortul unitar  $\bar{T}_n$  care acționează pe fața  $dA$  (suprafață orientată oricum) se poate calcula cu ajutorul eforturilor totale  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{T}_y$  și  $\bar{T}_z$ , care acționează pe celelalte fețe ale tetraedrului elementar. Fiecare dintre aceste eforturi este rezultanta eforturilor normale și tangențiale corespunzătoare fețelor respective, astfel:

$$\begin{cases} \bar{T}_x = \bar{p}_x + \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{T}_y = \bar{\tau}_{xy} + \bar{p}_y + \bar{\tau}_{zy} \\ \bar{T}_z = \bar{\tau}_{xz} + \bar{\tau}_{yz} + \bar{p}_z \end{cases} \quad (3.5)$$

Dacă  $\bar{n}$  este normala la suprafața  $dA$ , forța totală din eforturi pe fața  $dydz$  este:

$$\bar{T}_x \frac{dydz}{2} = \bar{T}_x dA \cos(\widehat{\bar{n}, x}) \quad (3.6)$$

deoarece proiecția suprafeței  $dA$  pe planul  $x = 0$  este  $1/2 dydz$ .

Pentru celelalte fețe forțele rezultate din tensiune se determină analog. Din echilibrul forțelor pentru tetraedru rezultă:

$$\frac{1}{6} \rho (\bar{f} - \bar{a}) dx dy dz + \bar{T}_x dA \cos(\widehat{\bar{n}, x}) + \bar{T}_y dA \cos(\widehat{\bar{n}, y}) + \bar{T}_z dA \cos(\widehat{\bar{n}, z}) + \bar{T}_n dA = 0$$

Primul termen este un infinit mic de ordin superior celorlalți termeni, deci se poate neglija, iar după simplificare cu  $dA$ , rezultă:

$$\bar{T}_n + \bar{T}_x \cos(\widehat{\bar{n}, x}) + \bar{T}_y \cos(\widehat{\bar{n}, y}) + \bar{T}_z \cos(\widehat{\bar{n}, z}) = 0 \quad (3.7)$$

Înlocuirea sistemului (3.5) în (3.6) și proiectarea după axele de coordonate conduce la:

$$\begin{cases} \bar{T}_{nx} = p_x \cos(\bar{n}, x) + \tau_{yx} \cos(\bar{n}, y) + \tau_{zx} \cos(\bar{n}, z) \\ \bar{T}_{ny} = \tau_{xy} \cos(\bar{n}, x) + p_y \cos(\bar{n}, y) + \tau_{zy} \cos(\bar{n}, z) \\ \bar{T}_{nz} = \tau_{xz} \cos(\bar{n}, x) + \tau_{yz} \cos(\bar{n}, y) + p_z \cos(\bar{n}, z) \end{cases} \quad (3.8)$$

care se poate exprima cu ajutorul matricii:

$$T_n = \begin{vmatrix} p_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_z \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

și poartă numele de "tensor al eforturilor" în punctul  $O$ .

Mărimea acestui tensor este:

$$T_n = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2} \quad (3.10)$$

Ecuațiile de mai sus servesc la determinarea stării de tensiune în jurul unui punct și a eforturilor în condițiile de periferie a suprafeței care limitează mediul continuu (de fluid) în mișcare.

## CAPITOLUL 4

### HIDROSTATICA

Hidrostatica se ocupă cu studiul legilor valabile fluidelor în stare de repaus, precum și cu aplicațiile practice ale acestor legi.

Caracteristica principală a materiei este mișcarea sub diverse forme, deci repausul absolut nu există. Totuși în cadrul hidrostaticii se acceptă noțiunea de repaus "absolut" când fluidul este în repaus în raport cu pământul (ex. conținut într-un rezervor în stare de repaus în raport cu pământul). La repausul relativ fluidul are poziție statică față de vasul în mișcare în care este conținut.

#### 4.1. Ecuațiile echilibrului static al fluidelor

##### 4.1.1. Starea de tensiune și presiunea

Între particulele unui fluid în repaus există interacțiuni reciproce care se manifestă sub forma unor forțe. Ele sunt expresia forțelor intermoleculare, care la nivelul particulelor fluide (grupuri de molecule) sunt numite forțe de legătură. Existența acestor forțe în fluide în repaus dă naștere la o anumită stare de tensiune în fiecare punct. Pentru punerea în evidență a acestei stări de tensiune în lichide în repaus se consideră un vas cu lichid care se secționează virtual cu un plan oarecare  $P$  (fig. 4.1).

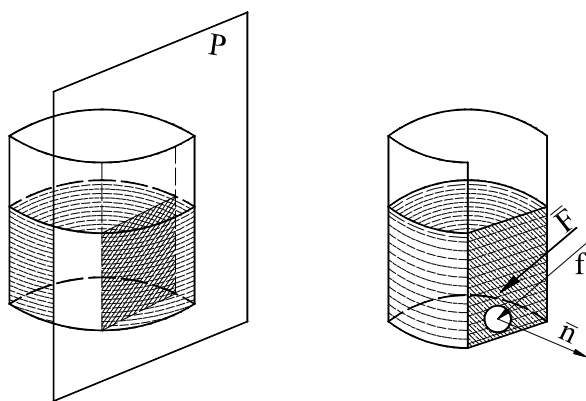


Fig. 4.1. Definirea stării de tensiune în lichide în repaus

Cele două părți îndepărtate imaginar pot fi menținute în echilibru dacă acțiunile lor reciproce se înlocuiesc cu niște forțe echivalente ca acțiune.

Descrierea calitativă trebuie apoi exprimată cantitativ, ceea ce se realizează prin stabilirea eforturilor unitare care sunt de fapt măsura stării de tensiune. În planul de secțiune virtual  $P$  se consideră un punct  $M$ , în jurul căruia se alege o suprafață arbitrară  $A$ . Forțele care acționează pe această suprafață au rezultanta  $\overline{f}$ , care depind de starea de tensiune din  $M$  și de mărimea suprafeței  $A$ . Starea de tensiune medie se definește prin relația:

$$\overline{p}_m = \frac{\overline{f}}{A} \quad (4.1)$$

Efortul unitar în punctul  $M$  se obține când  $A$  tinde la zero

$$\overline{p} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\overline{f}}{A} \quad (4.2)$$

Efortul unitar  $\overline{p}$  este un vector cu intensitatea  $p$  și având direcția și sensul forței  $\overline{f}$ .

După direcția planului  $P$ , definită prin normala  $n$ , se pot obține eforturile unitare pentru fiecare orientare. Totalitatea eforturilor unitare din punctul  $M$  definesc starea de tensiune. Pentru lichid eforturile unitare depind de poziția punctului  $M$  și de orientarea planului  $P$ , ceea ce se exprimă prin

$$\overline{p} = f(M, \overline{n}) \quad (4.3)$$

În lichidele newtoniene în repaus eforturile unitare tangențiale sunt nule, iar tensorul eforturilor unitare se definește prin:

$$p = \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Starea de tensiune în jurul unui punct este exprimată parțial prin gradul de comprimare, mărime scalară ce se numește presiune. Presiunea medie este

$$p_m = f / A \quad (4.5)$$

iar cea punctuală, numită presiune hidrostatică

$$p = \lim_{A \rightarrow 0} F / A \quad (4.6)$$

Presiunea hidrostatică are două proprietăți: este normală la suprafața asupra căreia acționează și b) intensitatea sa este aceeași după toate direcțiile. Pentru demonstrare se presupune că presiunea ar avea o direcție oarecare față de suprafața asupra căreia acționează. Într-o asemenea situație ea se poate descompune într-o componentă normală și una tangențială, însă în lichide în repaus nu există eforturi tangențiale. Componenta tangențială a eforturilor contravine noțiunii de fluid, deci se poate concluziona că într-adevăr presiunea este normală la suprafața asupra căreia acționează.

Conform fig. 3.2 într-un fluid în repaus, avem:

$$\bar{T}_x = \bar{p}_x; \bar{T}_y = \bar{p}_y; \bar{T}_z = \bar{p}_z \quad (4.7)$$

Ținând seama de sistemul de ecuații (3.8), se obține:

$$\begin{cases} T_{nx} = p \cos(\widehat{n, x}) = p_x \cos(\widehat{n, x}) \\ T_{ny} = p \cos(\widehat{n, y}) = p_y \cos(\widehat{n, y}) \\ T_{nz} = p \cos(\widehat{n, z}) = p_z \cos(\widehat{n, z}) \end{cases}$$

sau

$$p = p_x = p_y = p_z \quad (4.8)$$

deci intensitatea presiunii hidrostatice nu depinde de direcție.

#### 4.1.2. Ecuațiile generale ale hidrostaticii și consecințele sale

Starea de repaus a lichidelor poate fi privită ca un caz particular de mișcare, când accelerația și viteza este nulă. În această situație eforturile unitare tangențiale  $\bar{\tau}$ , sunt nule (ele apar când există diferențe de viteză între straturile de lichid).

În repausul lichidelor forțele care acționează asupra particulelor sunt cele rezultate din presiune (elastice) și cele masice și ele sunt în echilibru.

Ecuatiile care descriu echilibrul hidrostatic se obțin din ecuațiile generale de mișcare ale mediilor continui pentru care, în acest caz particular, se anulează componentele accelerației și ale eforturilor unitare tangențiale. Se ține seama și de faptul că eforturile unitare normale sunt compresioni (orientate spre particulă) și că presiunea hidrostatică are aceeași intensitate după toate direcțiile ( $p_x=p_y=p_z=p$ ). În aceste condiții ecuațiile (3.2) devin:

$$\begin{cases} \rho F_x = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho F_y = \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho F_z = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (4.9)$$

care sunt relațiile de echilibru hidrostatic ale lui L. Euler. Prin înmulțirea ecuațiilor (4.9) cu  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$ , după adunarea lor avem:

$$\rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad (4.10)$$

Această ecuație fundamentală, sub formă diferențială, a legii hidrostaticii arată că lucrul mecanic elementar virtual al forței masice este egal cu lucrul mecanic produs de forțele elastice.

Într-un lichid eulerian ( $\rho = \text{const}$ ) și termenul din stânga al relației (4.10) trebuie să fie o diferență totală și exactă a unei funcții  $U$  din care derivă forța masică. Funcția  $U$  se numește funcție potențial. Componentele forței masice sunt:



$$\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\
F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\
F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

iar în acest caz (4.10) devine:

$$dp + \rho dU = 0 \tag{4.12}$$

După integrare avem

$$p + \rho U = \text{const.} \tag{4.13}$$

Prin înmulțirea ecuațiilor lui Euler (4.9) cu  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  și  $\bar{k}$  după adunarea relațiilor ecuația fundamentală capătă forma:

$$\rho(F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}) = \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k}$$

sau

$$\rho \bar{F} = \text{grad} \cdot p \tag{4.14}$$

care arată că forța masică este egală cu gradientul presiunii.

Legea hidrostaticii are următoarele consecințe:

1. În cazul unui model de lichid Euler, cu  $\rho = \text{const.}$ , suprafețele echipotențiale ( $U = \text{const.}$ ) sunt izobare,  $p = \text{const.}$  Consecința derivă din ecuația (4.13);

2. Forța aplicată masei de lichid este normală la suprafața echipotențială care trece printr-o particulă din suprafața considerată:

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F ds \cos(\widehat{\bar{F}, \bar{ds}}) = 0$$

Cum forța  $\bar{F}$  și suprafața  $\bar{ds}$  sunt finite, trebuie ca,

$$\cos(\widehat{\bar{F}, \bar{ds}}) = 0 \text{ deci } \bar{F} \perp (\rho - \rho) dU \bar{ds};$$

3. Sensul forței masice  $\overline{F}$  corespunde descreșterii potențialului  $U$ :

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dL = -dU$$

4. Suprafețele echipotențiale nu se întretaie. Dacă s-ar întretaia nu ar fi respectate consecințele precedente. (Într-un punct al suprafeței echipotențiale forța ar trebui să aibă două direcții diferite);

5. Suprafețele echipotențiale, izobare sunt și izodense (conform ecuației 4.13);

6. Temperatura pe suprafețele echipotențiale, izobare și izodense este constantă, deci aceste suprafețe sunt izoterme. Acesta consecință se demonstrează cu ajutorul ecuației de stare;

7. Suprafața de separație a două fluide imiscibile și de densități diferite este echipotențială. Într-un punct de pe suprafața de separație, conform relației (4.12) se poate scrie:

$$dp = -\rho_1 dU = -\rho_2 dU$$

sau

$$(\rho_2 - \rho_1) dU = 0$$

Întrucât  $\rho_1 \neq \rho_2$  rezultă  $dU=0$  sau  $U = const.$ ;

8. În situația când forțele masice se pot neglija,  $F_x = F_y = F_z = 0$ , din (4.10) rezultă  $p=const$ . Această consecință mai arată că într-un astfel de fluid orice variație de presiune se transmite cu aceeași intensitate în toate punctele fluidului și exprimă de fapt principiul lui Blaise Pascal.

**Principiul lui Pascal** are importante aplicații în tehnică, astfel: presele hidraulice, pompe volumice, acumulatori hidraulici, amplificatorul hidraulic de presiune etc.

**Presa hidraulică** este utilizată pentru amplificarea forțelor prin intermediul unui lichid (fig. 4.2). Forța  $T$  aplicată pârghiei este amplificată de aceasta în forța  $F$ , conform principiului pârghiilor  $F = (1 + a/b)T$ , care la rândul ei este amplificată prin intermediul presiunii și suprafețelor diferite ale pistoanelor în forța  $P$ . Presiunea creată în lichid de forța  $F$  este

$$p = F / A_1 = \frac{4F}{\pi d^2}, \text{ iar forța rezultantă}$$

$$P = A_2 p = p \frac{\pi D^2}{4} = F \left( \frac{D}{d} \right)^2 = T \left( 1 + \frac{a}{b} \right) \left( \frac{D}{d} \right)^2$$

Principiul funcționării cricului manual este analog cu cel al presei hidraulice, diferențele fiind în privința gabaritelor acestora.

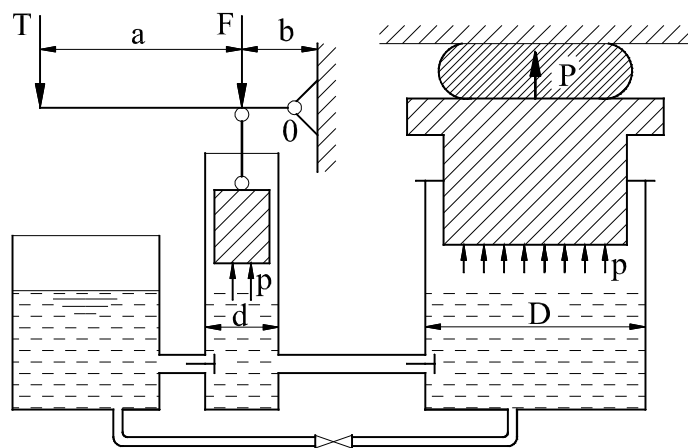


Fig. 4.2. Schema presei hidraulice

**Acumulatorul hidraulic** (fig. 4.3) este o instalație care înmagazinează lichid sub presiune în perioada când consumul este inferior alimentării și redă în celelalte perioade, având totodată și rol de amortizare a pulsațiilor de presiune. Sub un piston de greutate  $G$  se acumulează un volum de lichid în perioada de alimentare care este restituit circuitului sub aceeași presiune în perioadele de consum. Cele arătate sunt valabile când se respectă principiul lui Pascal.

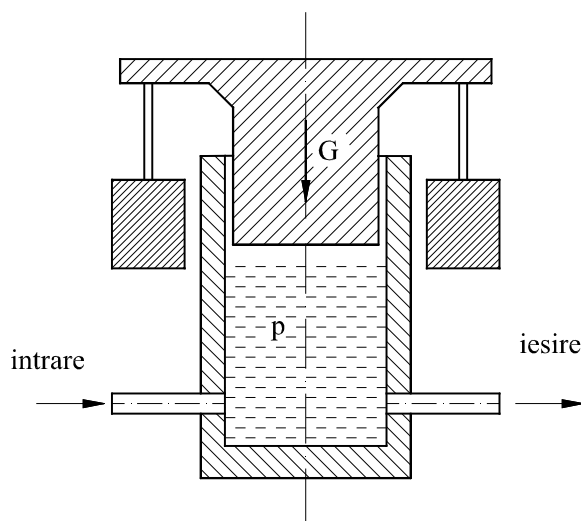


Fig. 4.3.  
Acumulatorul  
hidraulic

**Amplificatorul hidraulic de presiune** (fig. 4.4) se bazează pe principiul lui Pascal, amplifică presiunea și este utilizat în transmisii și acționări (eventual automatizări) hidraulice.

Presiunea  $p_1$ , dezvoltată pe fața pistonului cu diametrul  $D_1$ , generează o forță  $F=p_1A_1$ , care, pe fața pistonului cu diametrul  $D_2$ , dezvoltă presiunea:

$$p_2 = \frac{F}{A_2} = p_1 \frac{A_1}{A_2} = p_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

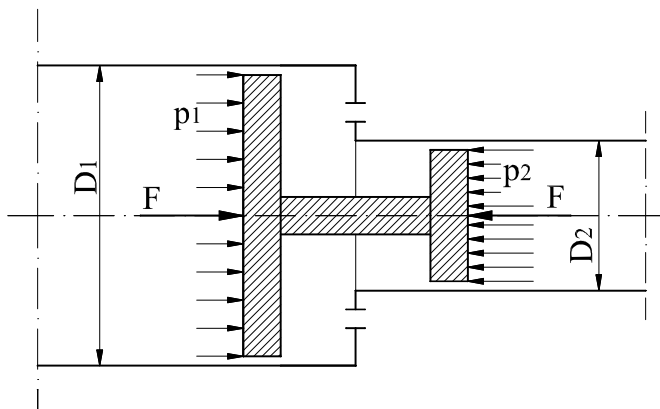


Fig. 4.4. Amplificatorul hidraulic

## 4.2. Ecuația hidrostaticii în câmp gravitațional

### 4.2.1. Ecuațiile hidrostaticii în câmp gravitațional pentru lichide și gaze

Câmpul gravitațional este un câmp potențial, deci forța masică derivă din potențialul  $-G / m = -g$ , unde semnul negativ arată că sensul forței masice este contrar axei  $Z$  și este orientată spre centrul pământului. În acest caz componentele forței masice sunt:

$$F_x=F_y=0 \text{ și } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -g$$

Problema se tratează distinct pentru diferite modele de fluid, după cum urmează:

#### 1. Modelul de fluid Euler ( $\rho = \text{const.}$ )

Pentru acest model de fluid ecuația (4.10) devine:

$$dp = -\rho g dz \quad (4.15)$$

respectiv după integrare (cu notația  $\gamma = \rho g$ )

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (4.16)$$

Constanta de integrare rezultă din aplicarea ecuației (2.16) lichidului în două puncte (fig. 4.5): la suprafața liberă  $M_0$ , de cotă  $Z_0$  și presiune  $p_0$ , respectiv în interiorul lichidului, în punctul M, de cotă  $z$  și presiune  $p$ :

$$p_0 + \gamma z_0 = p + \gamma z = \text{const.}$$

sau

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z) = p_0 + \gamma h \quad (4.17)$$

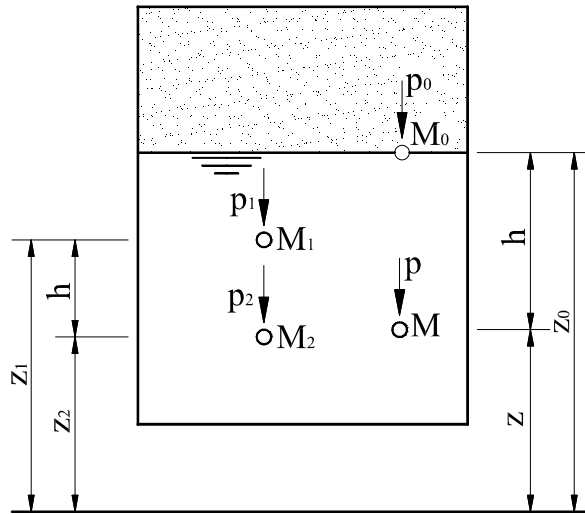


Fig. 4.5. Presiunea din interiorul lichidului

În câmp gravitațional în interiorul unui lichid incompresibil presiunea crește linear cu adâncimea. În coordonate  $p, h$  coeficientul unghiular al dreptei (4.17) este greutatea specifică a lichidului.

Legea (4.17) prezintă două consecințe, și anume:

a) Diferența de presiune între două puncte din interiorul lichidului  $M_1$  și  $M_2$  (v.fig. 4.5) este:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma(z_1 - z_2) = \gamma h$$

egală cu greutatea unei coloane de lichid de greutate specifică  $\gamma$ , înălțime  $z_1 - z_2 = h$  și secțiune normală unitară;

b) În lichide de întindere limitată, pentru care câmpul gravitațional se poate considera paralel, suprafețele echipotențiale, izobare, de separație a două lichide imiscibile sunt plane orizontale. Pentru lichide de întindere mare câmpul gravitațional se consideră convergent (în centrul Pământului), respectiv suprafețele echipotențiale sunt curbe.

## 2. Modelul de fluid Pascal - compresibil.

În cazul unui lichid pascalian, la compresibilitate izotermă  $\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)]$  și în câmp gravitațional, ecuația (4.10) devine:

$$dp = -\rho_0 [1 + \beta(p - p_0)] g dz \quad (4.18)$$

Considerând planul  $XOY$  în coincidență cu suprafața liberă a lichidului, axa  $Z$  ascendentă și axa  $h$  descendentă, cu  $dz = -dh$ , avem:

$$\frac{dp}{1 + \beta(p - p_0)} = \rho_0 g dh \quad (4.18')$$

Integrând ecuația (pentru  $g = \text{const.}$ ) în limitele:  $h=0$ ,  $p=p_0$  și  $\rho=\rho_0$  și la adâncimea  $h$  unde presiunea este  $p$  și densitatea  $\rho$ , se obține:

$$\ln [1 + \beta(p - p_0)] = \beta \rho_0 g h$$

sau

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta} (e^{\beta \rho_0 g h} - 1) \quad (4.19)$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a relației (4.19) și neglijând termenii care conțin  $\beta$  la puteri supraunitare, rezultă:

$$p = p_0 + \rho_0 g h [1 + 0.5 \beta \rho_0 g h] \quad (4.19')$$

Pentru modelul de fluid Euler ecuația (4.19') se particularizează în (4.17).

### 3. Legea hidrostaticii în câmp gravitațional pentru gaze

Repausul gazelor poate avea loc în proces izoterm, adiabatic sau politropic.

a) În cazul **izoterm**, conform ecuației (2.11) se poate  $p / \rho = p_0 / \rho_0$  respectiv în formă diferențială  $dp = (p_0 / \rho_0) d\rho$ . Prin înlocuirea în (4.15), după integrare :

$$\frac{p_0}{\rho_0} \ln \left( \frac{\rho_0}{p_0} \right) + gz = c \quad (4.20)$$

b) În cazul procedurii **adiabatic**,  $p / \rho^k = p_0 / \rho_0^k$ , respectiv sub formă diferențială:  $dp = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} d\rho$ . Prin înlocuirea în (4.15), după integrare rezultă:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} + gz = c \quad (4.21)$$

c) În cazul proceselor **politropice**,  $p / \rho^n = p_0 / \rho_0^n$ . Procedând analog ca în cazurile precedente, se obține:

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} + gz = c \quad (4.22)$$

d) În situația când gazele pot fi considerate incompresibile este valabilă relația (4.17) sau principiul lui Pascal.

Statica atmosferică utilizează aceste legi ale gazelor, diferențiat, în funcție de natura proceselor fizice, pentru altitudini mari atmosfera se împarte în troposferă ( $h < 11000$  m) și stratosfera ( $h > 11000$  m), iar forțele masice trebuiesc luate în considerare. Variația mărimilor  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$  se exprimă în funcție de  $h$ ; ținând seama că în troposferă repausul aerului are loc după proces politropic, iar în stratosfera izoterm.

În troposferă, prin aplicarea relației (4.22) la nivelul mării ( $z_0, p_0, \rho_0$ ) și la cota  $z$ , când  $g = \text{const.}$ , se obține:

$$h = \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0 g} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \quad (4.23)$$

Ținând seama de ecuația Clapeyron-Mendeleev,  $p / \rho = RT$ , rezultă:

$$\begin{cases} p = p_0 \left( 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho}{\rho_0} gh \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ \rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{\rho} gh \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ T = T_0 \left( 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{\rho} gh \right) \end{cases} \quad (4.24)$$

În troposferă  $n = 1,235$ ;  $p_0 = 101325 \text{ N/m}^2$ ;  $\rho_0 = 1,2255 \text{ Kg/w}^3$ ;  $T_0 = 288^\circ\text{K}$  și  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Pentru  $h_0 = 0$  se obțin:

$$p = 101325(1 - 2,2577 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{5,2553}, \text{ N / m}^2$$

$$\rho = 1,2255(1 - 0,22577 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{4,2553}, \text{ kg / m}^3$$

$$T = 288 - 0,0065h; ^\circ K$$

În stratosfera,  $h > h_{11} = 11 \text{ km}$ , repausul este izoterm ( $n=1$ ), rezultând:

$$\begin{aligned} T &= T_{11} \\ \rho &= \rho_{11} e^{-\frac{h-11000}{RT_{11}}} \\ p &= p_{11} e^{-\frac{h-11000}{RT_{11}}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pentru repausul izoterm,  $p / \rho_0 = RT_{11}$ , cu  $p_{11} = 22622,8 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_{11} = 0,36386 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_{11} = 216,5^\circ\text{K}$  și  $R = 29,2746 \text{ mol/}^\circ\text{K}$ , sistemul (4.26) devine:



$$\begin{aligned}
 T &= 216,5^\circ K \\
 \rho &= 0,36386 \cdot e^{\frac{h-11000}{6637,95}}, \text{ kg / m}^2 \\
 p &= 22622,8 \cdot e^{\frac{h-11000}{6637,95}}, \text{ N / m}^2
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

#### 4.2.2. Clasificarea presiunilor

Termenii ecuației (4.15) au semnificațiile:

$p$  - presiune absolută, măsurată față de presiunea zero absolută (uneori se specifică natura sa  $p_{abs}$ );

$p_0$  - reprezintă o presiune oarecare de referință, măsurată față de cea absolută. Deseori se consideră presiune de referință presiunea ce se exercită pe suprafața liberă a lichidelor sau presiunea atmosferică;

$\gamma \cdot h$  - reprezintă presiunea produsă de greutatea unei coloane de lichid cu greutate specifică  $\gamma$ , înălțime  $h$  și secțiune normală unitară.

Suma presiunii de referință și a celei produsă de greutatea coloanei de lichid este presiunea absolută.

$$p_{abs} = p_0 + \gamma h \tag{4.15'}$$

Presiunea relativă ( $p_{rel}$ ) este presiunea măsurată față de presiunea de referință:

$$p_{rel} = p_{abs} - p_0 = \gamma h \tag{4.28}$$

Presiunea măsurată în plus față de presiunea de referință este **suprapresiunea**, iar cea măsurată în minus este **subpresiunea**. Când presiunea de referință este cea atmosferică ( $p_0 = p_{atm}$ ), atunci suprapresiunea poartă numele de presiune **manometrică**, iar subpresiunea, presiune **vacuumetrică**. Sintetizarea acestor noțiuni referitoare la presiuni este vizualizată în fig. 4.6.

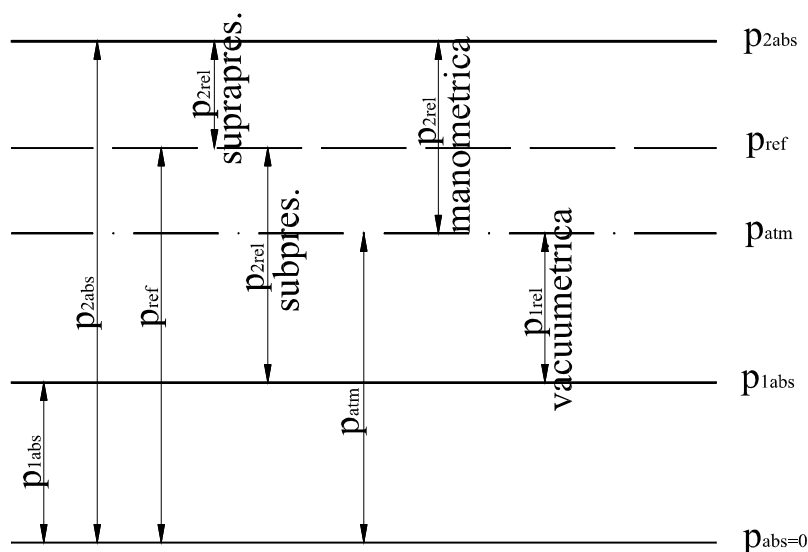


Fig. 4.6. Schema clasificării presiunilor

#### 4.2.3. Dimensiunea și unitățile de măsurare a presiunilor. Diagrame de presiune

**1. Dimensiunea presiunii** rezultă aplicând ecuațiile dimensionale pentru sistemul de măsurare considerat în S.I. avem:

$$[p] = \frac{[m][a]}{A} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

cu unitățile  $N/m^2 = Pa$  (pascal),  $MPa$  și  $daN/cm^2 = bar$ .

În sistemul Mkfs (sistem încă tolerat dar pe cale de înlocuire)

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = FL^{-2}$$

cu unitățile  $kgf/m^2$  și  $kgf/cm^2 = at$  (atmosfera tehnică).

Se mai utilizează atmosfera fizică (At) care reprezintă presiunea exercitată de o coloană de mercur de 760 mm înălțime, având densitatea mercurului  $\rho_{Hg} = 13,5951 kg / dm^3$ , într-un loc unde accelerația gravitațională este  $g = 980,665 cm / s^2$ .

În practica inginerescă se utilizează exprimarea presiunii sub formă, de înălțime de coloană de lichid, din relația (4.17) rezultă:

$$h = \frac{P - P_0}{\gamma} \quad (4.17'')$$

Deseori presiunea se exprimă în înălțime coloană de apă, notat cu mCA. De fapt  $1 \text{ at} = 10 \text{ mCA} = 0,981 \text{ bar} = 9810 \text{ Pa}$ . Presiunea atmosferică în mod obișnuit se exprimă în înălțime coloană de mercur, notat cu mmHg. Exemplu:  $1 \text{ At} = 760 \text{ mmHg}$ .

**2. Diagramele de presiune** vizualizează acțiunea lichidelor (statică) asupra suprafețelor solide cu care acestea vin în contact. Aceste diagrame în câmp gravitațional se construiesc pe baza ecuației (4.17) - eventual (4.19') - și a proprietății presiunii hidrostatice de a fi normală la suprafața solidă pe care acționează. Aceste diagrame pentru diferite situații corespund figurilor 4.7...9. În cazul lichidelor stratificate coeficientul unghiular al dreptelor diagramelor de presiune variază,  $\tan \alpha_i = \gamma_i$ . Lichidele imiscibile cu  $\gamma_i < \gamma_{i+1}$ , datorită greutății lor specifice, în cazul echilibrului static, se așează în ordinea densității, care crește de la suprafață spre fund.

#### 4.2.4. Interpretarea geometrică și energetică a legii hidrostaticii în câmp gravitațional

Legea de distribuție a presiunii în lichide grele incompresibile în repaus (4.17) se poate interpreta geometric și energetic.

**1. Interpretarea geometrică.** Analiza dimensională a ecuației (4.16) arată că termenii acesteia sunt lungimi:

$$\left[ \frac{p}{\gamma} \right] + [z] = \left[ \frac{FA^{-1}}{FW^{-1}} \right] + [z] = L + L$$

unde:  $z$ - poartă numele de cotă sau poziție, iar  $p / \gamma$  înălțime de presiune sau piezometrică. Suma termenilor, tot o lungime, este înălțimea hidrostatică. Vizualizarea interpretării geometrice a legii hidrostaticii are loc prin reprezentarea grafică a acesteia.

a. Se consideră un rezervor cu un lichid de greutate specifică  $\gamma$  în câmpul gravitațional, având montat în punctul M, la înălțimea  $z$  față de planul de referință, un tub de diametru mic, deschis la ambele capete (fig. 4.10).

Dacă rezervorul este deschis, presiunea la suprafața liberă este cea atmosferică și lichidul în tubul piezometric la înălțimea  $h$ , la același nivel din

vas (conform principiului vaselor comunicante). Presiunea în punctul  $M$  va fi  $p_M = p_a + \gamma h$  și variază liniar cu adâncimea.

Dacă la aceeași cotă a punctului se instalează un tub închis la capătul de sus în care se realizează vid ( $p = 0$ ), lichidul va urca în tub până la înălțimea  $h_M$ . Rezultă că  $h_M = p_M / \gamma$  reprezintă înălțimea piezometrică absolută sau înălțimea barometrică în punctul  $M$ . Presiunea  $\gamma h = p_M - p_a$  este presiunea manometrică în punctul  $M$ , iar  $h$  este înălțimea manometrică. Cele două tuburi piezometrice poartă denumirea de tub barometric și tub manometric. Planul orizontal definit de nivelul lichidului din tubul barometric definește planul de sarcină absolut, iar nivelul din tubul manometric planul de apă.

Diagrama presiunilor absolute și relative (față de presiunea atmosferică) variază liniar cu adâncimea  $h_M$ , respectiv  $h$ , cu coeficientul unghiular al dreptei  $\gamma$ . Originea diagramei presiunilor absolute este în planul de sarcină, iar a presiunilor relative în planul de apă. La cote superioare planului de apă avem presiuni vacuometrice, iar la cote inferioare presiunii manometrice.

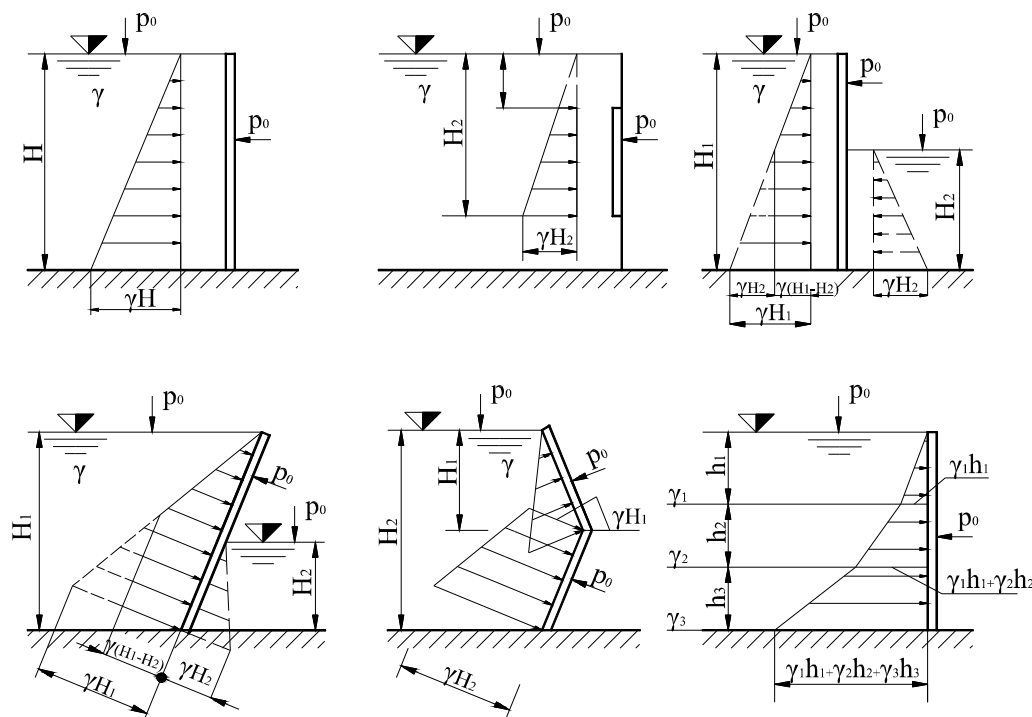


Fig. 4.7. Diagrame de presiune pe suprafețe plane cu nivel liber

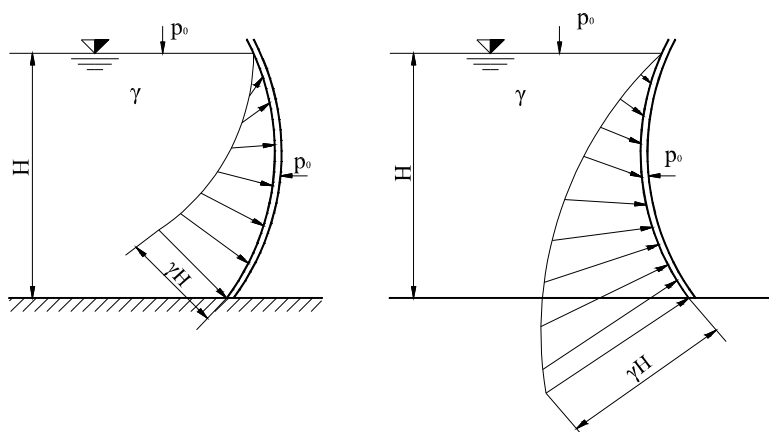


Fig. 4.8. Diagrame de presiune pe suprafețe curbe cu nivel liber

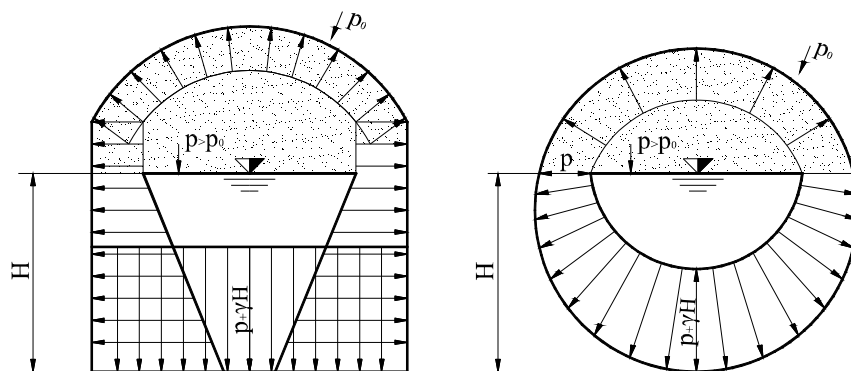
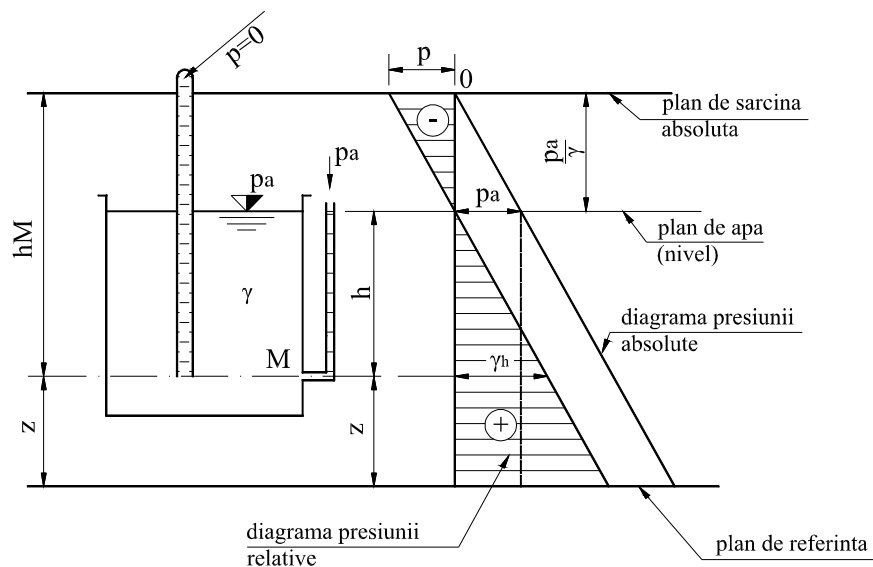
Fig. 4.9. Diagrame de presiune pe suprafețe închise, cu  $p > p_0$ 

Fig.4.10. Reprezentarea geometrică a legii hidrostaticii în câmp gravitațional

Când rezervorul care conține lichidul este închis, se disting două cazuri, în funcție de mărimea presiunii  $p_0$  de la suprafața lichidului față de cea atmosferică  $p_a$ .

b. În cazul  $p_0 > p_a$  (fig. 4.11) lichidul în tubul manometric urcă la o cotă superioară nivelului lichidului din rezervor.

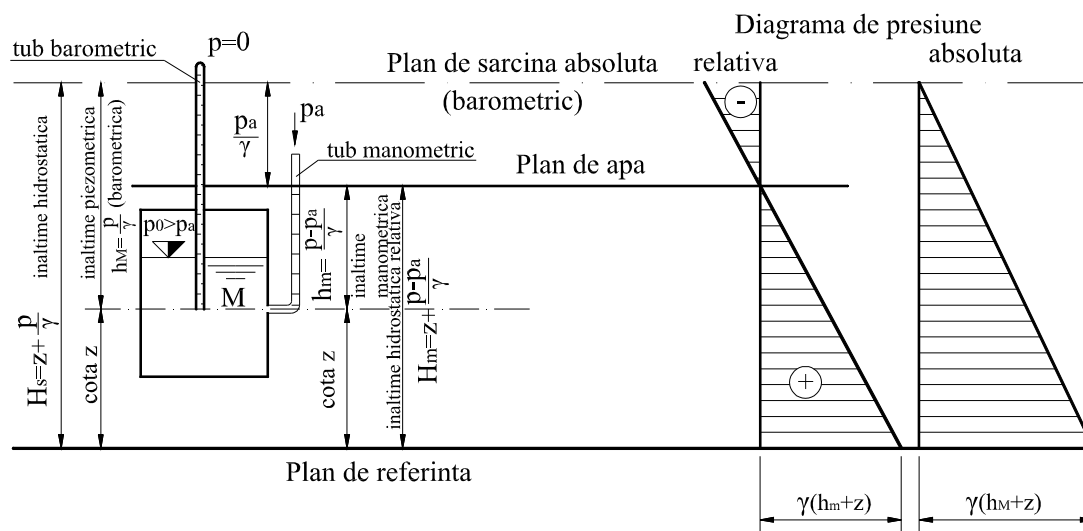


Fig. 4.11. Reprezentarea grafică a legii hidrostaticii în câmp gravitațional pentru  $p_0 > p_a$

Elementele definite prin fig. 4.11 corespund celor din fig. 4.10, abaterea constând în diferența de cotă între nivelul lichidului din rezervor și planul de apă care se datorește presiunii  $p_0$  de la suprafața lichidului din vas

$\Delta h = \frac{p_0 - p_a}{\gamma}$ . Prin  $H_s = z + \frac{p}{\gamma}$  se definește înălțimea hidrostatică, iar prin

$H_m = z + \frac{p - p_a}{\gamma}$  înălțimea hidrostatică relativă (manometrică).

c. În cazul  $p_0 < p_a$  (fig. 4.12) lichidul în tubul piezometric deschis coboară sub cota nivelului lichidului din rezervor. Din acest considerent se folosește un tub deschis îndoit în formă de U. Conform figurii, se definește înălțimea vacuumetrică prin

$$h_v = \frac{p_a - p}{\gamma} = -h_m$$



( $H_s$ ) se compune din două părți:  $z$  - energia specifică de poziție și  $p/\gamma$  - energie specifică de presiune (piezometrică). Energia specifică hidrostatică se mai numește sarcină hidrostatică.

Așadar energia fluidului în echilibru static este constantă și este egală cu energia specifică de poziție a particulelor din planul de apă.

#### 4.2.5. Măsurarea presiunilor. Metode și aparate

Cunoașterea presiunii fluidelor în procesele tehnologice este indispensabilă, iar măsurarea ei se realizează cu ajutorul unor traductoare și instrumente aferente.

În funcție de principiul care stă la baza funcționării acestora distingem: aparate cu lichid (bazate pe legea hidrostaticii în câmp gravitațional); aparate cu greutate (bazate pe legea hidrostaticii și/sau principiul lui Pascal); aparate cu element elastic (bazate pe deformarea în domeniul elastic ale unor elemente sensibile - tub, membrană, burduf - sub acțiunea forțelor rezultate din presiune); aparate electrice (bazate pe tensiometrie electrică sau efecte piezoelectrice). În general se măsoară presiuni relative (față de presiunea de referință, care deseori este cea atmosferică) și diferențe de presiune și mai rar presiuni absolute. La măsurarea presiunilor relative față de cea atmosferică se disting manometre, vacuumetre și manovacuumetre.

În continuare se prezintă numai teoria aparatelor cu lichid și modalități de utilizare a acestor aparate.

**1. Piezometrul** poate fi folosit atât pentru măsurarea presiunilor manometrice cât și vacuumetrice. Este format dintr-un tub transparent, simplu sau îndoit în formă de U. În funcție de lichidul de lucru sunt piezometre **directe** - lichidul din piezometru (de măsurare) este identic cu cel al cărei presiune se măsoară - și **indirecte**, când lichidul din piezometru diferă de cel al cărei presiune se determină. În acest ultim caz cele două lichide trebuie să fie imiscibile.

a. **Piezometrul direct** (fig. 4.13) este folosit în special la măsurătorile de presiune în laboratoare. Lichidului din piezometre i se poate aplica legea hidrostaticii sub forma (4.17), rezultând:

$$\begin{cases} p_B = p_A \\ p_A = p_B + \gamma(z_B - z_A) \\ p_0 = p_A - \gamma h_2 \end{cases}$$



În punctul A presiunea absolută se obține prin adunarea primelor două ecuații:

$$p_A = p_a + \gamma(z_B - z_A) = p_a + \gamma h_1 \quad (4.30)$$

iar presiunea manometrică

$$p_{Am} = p_A - p_a = \gamma h_1 \quad (4.31)$$

În mod analog celor arătate, pentru punctul 0 rezultă:

$$p_0 = p_a + \gamma(h_1 - h_2) \text{ și } p_{0m} = \gamma(h_1 - h_2).$$

Înălțimile de coloană de lichid  $h_1$  și  $h_2$  se citesc prin diferență pe scara gradată aferentă piezometrului.

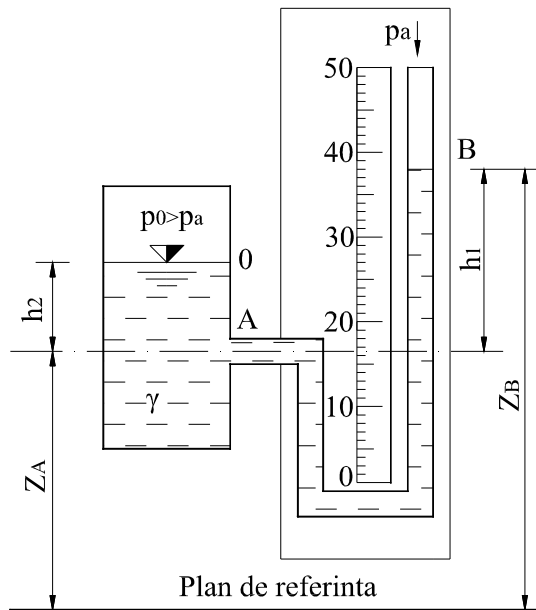


Fig. 4.13. Piezometrul direct.

**b. Piezometrul indirect** (fig. 4.14) se folosește în cazul în care înălțimea  $h_1$  trebuie limitată (datorită valorii mari a lui  $p_0$ ) sau se măsoară presiunea unui gaz. Piezometrul conține două lichide imiscibile (sau un lichid

și gaz) în echilibru static, deci este valabilă legea hidrostaticii sub forma (4.17). Presiunea  $p_0$  se obține prin adunarea sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} p_c = p_a \\ p_B = p_c + \gamma_2 (z_c - z_A) = p_c + \gamma_2 h_1 \\ p_A = p_B - \gamma_1 (z_A - z_B) = p_B - \gamma_1 h_2 \\ p_0 = p_A - \gamma_1 (z_D - z_A) = p_A - \gamma_1 h_3 \end{cases}$$

respectiv

$$p_0 = p_a + \gamma_2 h_1 - \gamma_1 (h_2 + h_3)$$

sau în presiuni manometrice

$$p_{om} = \gamma_2 h_1 - \gamma_1 (h_2 - h_3)$$

În cazul când  $p_0$  este mare folosirea  $\gamma_2 \gg \gamma_1$  reduce înălțimea coloanei  $h_1$  respectiv înălțimea tubului piezometric. Când  $p_0$  este mic, valoarea lui  $h_1$  trebuie mărită pentru obținerea preciziei dorite și se va folosi lichid cu  $\gamma_2 < \gamma_1$ . În cazul când fluidul de greutate specifică  $\gamma_1$  este gaz, pentru volum limitat se poate admite principiul lui Pascal obținând,  $p_{om} = \gamma_2 h_1$ .

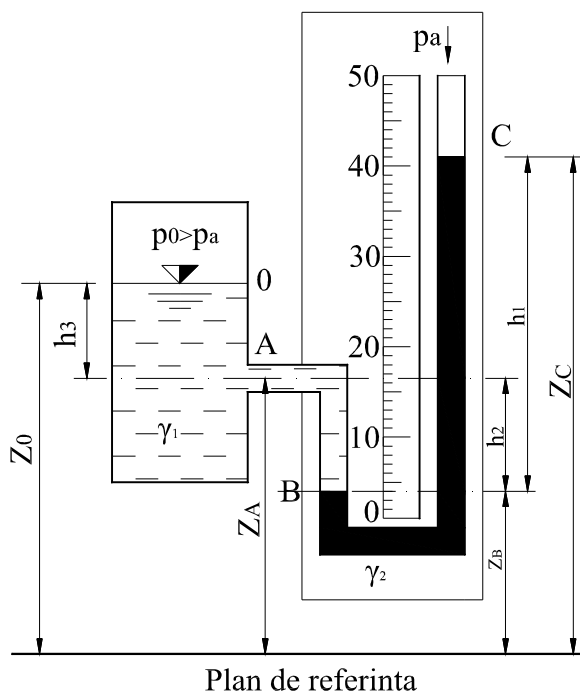


Fig. 4.14. Piezometrul indirect

**2. Manometrul diferențial** se folosește pentru măsurarea diferențelor de presiune sau a presiunilor manometrice și vacuumetrice (care sunt tot diferențe de presiune însă particulare, și anume, față de presiunea atmosferică). Sunt formate dintr-un tub transparent în formă de U, prevăzut cu robinete de admisie a presiunii, de egalizare și de aerisire, respectiv cu ștuțuri de legătură la presiune. În funcție de lichidul de lucru se disting manometre diferențiale **directe și indirecte**, asemănător piezometrelor.

a. **Manometrul diferențial direct** (fig. 4.15) folosește ca lichid manometric pe cel existent în punctele de măsurare. Poziția caracteristică a acestor manometre este că au comunicarea liberă între tuburi în partea superioară, *U*-ul propriu zis fiind ocupat de gaz (aer). În cele două coloane ale manometrului lichidul se ridică la cote diferite, corespunzătoare diferenței de presiune între punctele de măsurare.

Pe traseul **ACDB** lichidul este în echilibru static, ceea ce este exprimat prin relațiile:

$$\begin{cases} p_C = p_A - \gamma(z_C - z_A) \\ p_D = p_C + \gamma_{aer}(z_C - z_D) \\ p_B = p_D + \gamma(z_D - z_B) \end{cases}$$

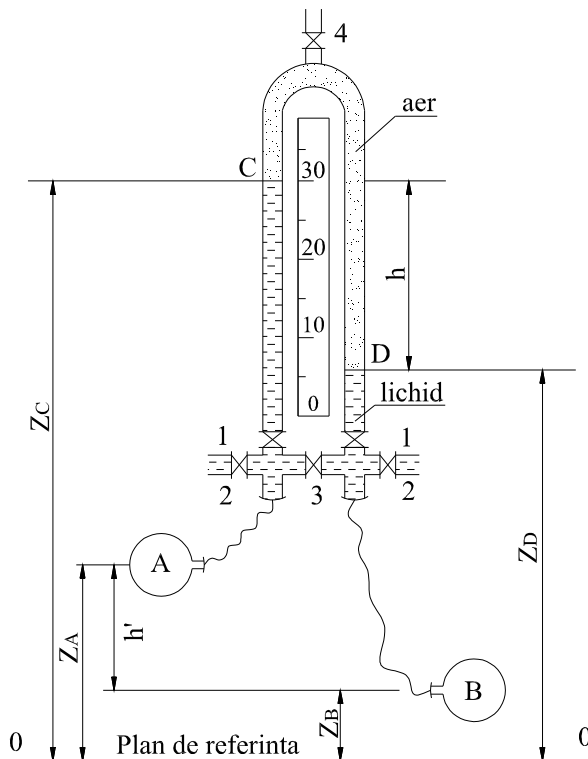


Fig. 4.15. Manometru diferențial direct

După adunarea relațiilor cu semn schimbat se obține:

$$p_A - p_B = \gamma[(z_C - z_D) - (z_A - z_B)] = \gamma(h - h') \quad (4.32)$$

Dacă presiunea în punctele de măsurare este mare, atunci aerul din manometru se comprimă și ambele coloane de lichid se ridică. Dacă lichidul din coloana cu presiunea mai mare trece în coloana cu presiune mai mică trebuie introdus aer în manometru care să separe cele două coloane. În cazul când lichidul trece dintr-o coloană în alta, lichidului din manometru nu i se pot scrie ecuațiile echilibrului hidrostatic. Dacă pe furtunele de transmitere intervin bule de aer, ele eronează măsurătorile în mod sistematic. În asemenea situații este necesară purjarea bulelor prin robinetii de aerisire. Dacă se cunoaște proiecția pe verticală a bulei, măsurătoarea se poate corecta. Corecțiile se aplică diferențiat, dependent de furtunul pe care a intervenit bula (amonte sau aval).

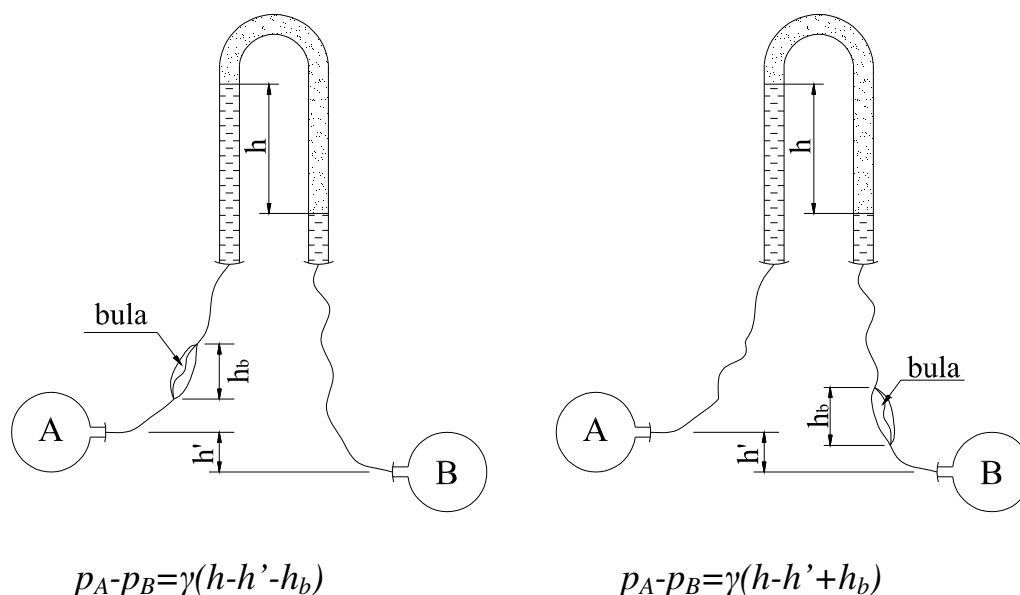


Fig. 4.16. Efectul bulei de aer pe furtunele de transmitere a presiunilor.

**b. Manometrul diferențial indirect** (fig. 4.17) se utilizează la măsurarea diferenței de presiune între două puncte, folosind lichid manometric (de lucru) un lichid diferit de cel existent în punctele de măsurare. Cele două lichide trebuie să fie imiscibile. Lichidele manometrice se utilizează pentru amplificarea sau reducerea înălțimilor de coloană a diferențelor de presiune.

Lichidul pe traseul  $ACDB$  este în echilibru static și i se pot scrie ecuațiile hidrostaticii în câmp gravitațional (pe presiuni, între puncte), astfel:

$$p_C = p_A - \gamma_1 (z_C - z_A)$$

$$p_D = p_C - \gamma_2 (z_D - z_C)$$

$$p_B = p_D + \gamma_1 (z_D - z_B)$$

După adunarea relațiilor cu semn schimbat se obține:

$$p_A - p_B = (\gamma_2 - \gamma_1)(z_D - z_C) - \gamma_1(z_A - z_B) = (\gamma_2 - \gamma_1)h - \gamma_1 h'$$

Dacă diferența de presiune se exprimă în coloană de lichid (ex. lichid cu  $\gamma_1$ ) atunci ecuația anterioară se poate scrie:  $p_A - p_B = \gamma_1 H_1 = (\gamma_2 - \gamma_1)h - \gamma_1 h'$  rezultă:

$$H_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} h - h' \quad (4.33)$$

Factorul de transformare a înălțimii coloanei citite este  $\left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right)$ , care este de amplificare a înălțimii coloanei  $0 < \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) < 1$  și se reduce când

$$\left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) > 1.$$

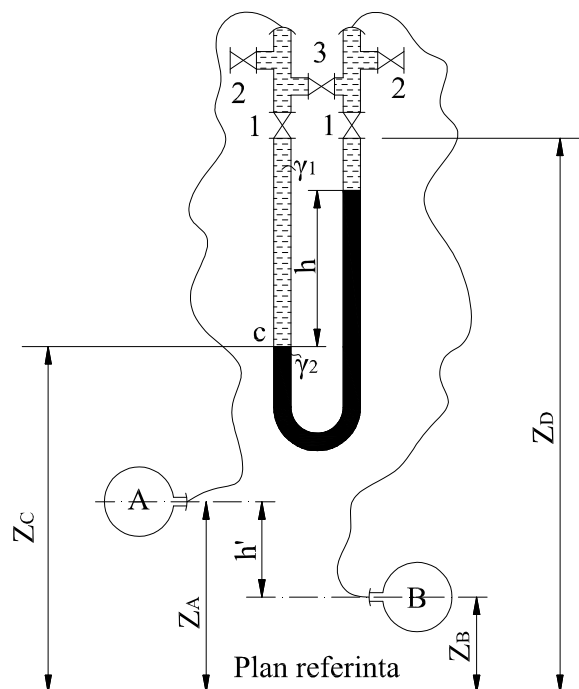


Fig. 4.17. Schema manometrului diferențial indirect.

**Observații:** Pentru apă-mercur ( $\gamma_2 / \gamma_1 - 1$ )  $\sim 12,59$  reducere de coloană, iar pentru apă  $\text{CCl}_4$  ( $\gamma_2 / \gamma_1 - 1$ )  $\sim 0,59$  amplificare de coloană.

Când pe furtunile de transmitere a presiunilor intervin eventuale bule de aer și se cunoaște (sau se poate determina) proiecția lor pe verticală, corecțiile se aplică asemănător cazului precedent, de la manometrul diferențial direct:

$$p_A - p_B = (\gamma_2 - \gamma_1)h - \gamma_1 h' \pm \gamma_1 h_b$$

sau

$$H_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} h - h' \pm h_b \quad (4.34)$$

în funcție de furtunul pe care intervine bula de aer.

3. **Micromanometrul cu tub înclinat** (fig. 4.18) este utilizat în special la măsurarea presiunilor mano și vacuumetrice și a diferențelor de presiune mici în cazul gazelor. Aceste micromanometre standardizate utilizează ca lichid

manometric alcool cu  $\rho_{alc}=803 \text{ kg/m}^3$ . Prin înclinarea tubului manometric se mărește lungimea coloanei de lichid crescând, implicit, precizia măsurătorii.

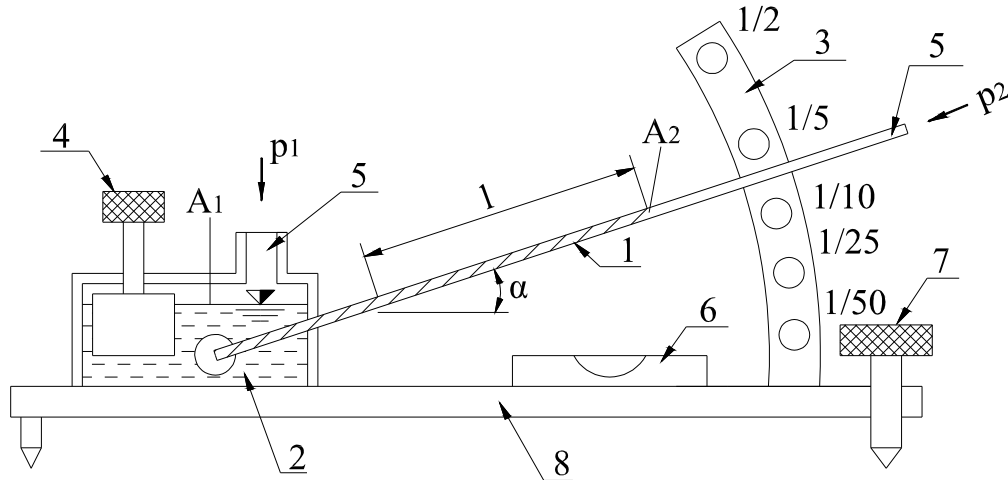


Fig. 4.18. Schema micromanometrului cu tub înclinat

Se observă din figură că diferența de presiune este:

$$p_1 - p_2 = \gamma_{alc} l \left( \frac{A_2}{A_1} + \sin \alpha \right) \sim \gamma_{alc} l \sin \alpha$$

sau în înălțime coloană apă:

$$H_{apa} = \frac{\gamma_{alc}}{\gamma_{apa}} l \sin \alpha = k \cdot l \quad (4.35)$$

Constanta  $k$  a aparatului de măsurare este înscrisă pe sectorul gradat, unghiul  $\alpha$  fiind astfel realizat ca acesta să aibă valori exacte.

Pentru fiecare înclinare, când  $p_1 = p_2$ , din pistonul 4 se reglează nivelul de alcool astfel ca acesta în tub să fie în dreptul gradației zero. Înainte de folosire micromanometrul se orizontalizează. Măsurarea presiunilor manometrice implică cuplarea acestuia la  $p_1$  cu  $p_2=p_a$ ; la măsurarea presiunilor vacuumetrice  $p_1=p_a$ , iar cuplarea este la  $p_2$ . La măsurarea diferențelor de presiune, punctul cu presiune mai mare se cuplează la rezervor (priza  $p_1$ ). Eventuala utilizare a lichidului manometric diferit de alcool implică corecție ecuației (4.35), respectiv a constantei  $k$ .

**Observații.** Se mai utilizează manometre cu rezervor, multimanometre diferențiale ș.a

### 4.3. Echilibrul relativ al lichidelor în diferite câmpuri de forță

Echilibrul static al lichidelor poate avea loc și în alte câmpuri de forță decât cel gravitațional terestru.

În cazul echilibrului relativ, lichidul conținut într-un vas se află în mișcare față de un sistem de axe mobil, considerat solidar cu vasul. În cazul echilibrului relativ, suprafața lichidului nu mai este orizontală, deoarece componentele forței masice cuprind în afara gravitației și alte componente.

Importanță practică prezintă echilibrul relativ în următoarele cazuri:

1. vasul cu lichid se află în mișcare uniform accelerată cu
  - a. direcția accelerației pe orizontală;
  - b. direcția accelerației în unghi față de orizontală;
2. vasul cu lichid se află în mișcare de rotație uniformă
  - a. în jurul axului vertical
  - b. în jurul axului orizontal;
3. echilibrul relativ al lichidului în coturi, curbe.

#### 4.3.1. Echilibrul relativ al lichidului în vas cu mișcare uniform accelerată

a. Se consideră un vas paralelipipedic în care se află lichid în repaus până la o anumită cotă  $z_i$ . Vasului cu lichid i se imprimă o mișcare uniform accelerată după o **direcție orizontală** (fig. 4.19).

O particulă aflată pe suprafața liberă este în echilibru sub acțiunea greutateii proprii și a forței de inerție, deci componentele forței masice pentru masă unitară vor fi:  $F_x = -a$ ;  $F_y = 0$  și  $F_z = -g$  (axa  $x$  se consideră după direcția accelerației). Suprafața liberă - de contact lichid aer - este izobară, deci  $dp=0$ . În aceste condiții ecuația hidrostaticii (4.10) se particularizează astfel:

$$dp = \rho(-adx - gdz) = 0 \quad (4.36)$$

sau

$$adx + gdz = 0 \quad (4.36')$$



care este ecuația diferențială a suprafețelor izobare, deci și a suprafeței libere (pe acesta presiunea este cea atmosferică  $p_0$ ).

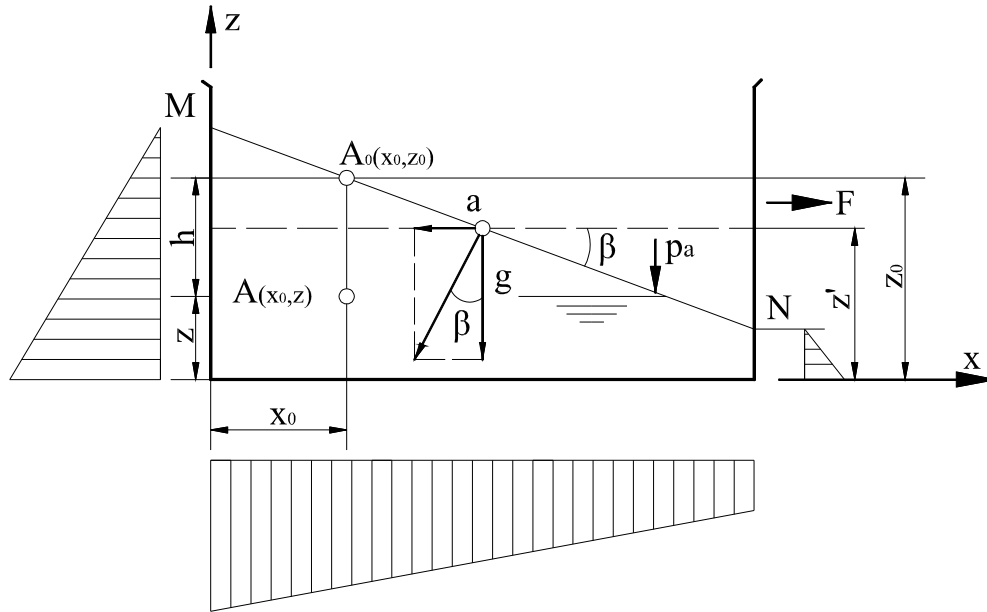


Fig. 4.19. Echilibrul relativ de translație după o direcție orizontală.

După integrare rezultă

$$ax + gz = c \quad (4.37)$$

$$z = -\frac{a}{g}x + \frac{c}{g} \quad (4.37')$$

În sistemul cartezian  $oxyz$  ecuația (4.37) reprezintă o familie de planuri paralele cu axa  $y$ , având coeficientul unghiular  $\tan \beta = -\frac{a}{g}$ . Planul  $MN$  și paralele la aceasta sunt suprafețe izobare.

Legea repartiției presiunii se obține prin integrarea ecuației fundamentale a hidrostăticii (4.36), care devine

$$p = -\rho(ax + gz) + c \quad (4.38)$$

Această ecuație se aplică pentru două puncte,  $A_0(x_0, z_0)$  și  $A(x_0, z)$ , aflate pe aceeași verticală:

$$p_0 = -\rho(ax_0 + gz_0) + c \text{ și } p = -\rho(ax_0 + gz) + c$$

Scăzând prima ecuație din a doua se obține

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z) = p_0 + \gamma h. \quad (4.17)$$

care arată că și în acest caz distribuția presiunii în lichid variază liniar cu adâncimea. Diagramele de presiune pe pereții vasului sunt construite tot în fig. 4.19.

b. În situația când **acelerația are loc după o direcție** care formează unghiul  $\theta$  cu orizontala (fig. 4.20), forța masică după cele trei direcții va avea componentele:

$$F_x = -a \cos \theta; F_y = 0; F_z = -g - a \sin \theta.$$

Echilibrul particulei de la suprafața liberă, izobară (de separație a două fluide) este dată de ecuația

$$a \cos \theta dx + (g + a \sin \theta) dz = 0 \quad (4.39)$$

care integrată este:

$$(a \cos \theta)x + (g + a \sin \theta)z = c \quad (4.40)$$

sau

$$z = -\frac{a \cos \theta}{g + a \sin \theta} x + \frac{c}{g + a \sin \theta} \quad (4.40')$$

Ecuația (4.40) reprezintă o familie de planuri cu același coeficient unghiular  $\tan \beta = -\frac{a \cos \theta}{g + a \sin \theta}$ , paralele între ele și cu axa  $y$ , deci suprafețele echipotențiale, izobare sunt planuri paralele cu axa  $y$ , decalate prin constanta de integrare  $c$  și înclinate cu unghiul  $\beta \neq 0$  față de planul  $z=0$ .

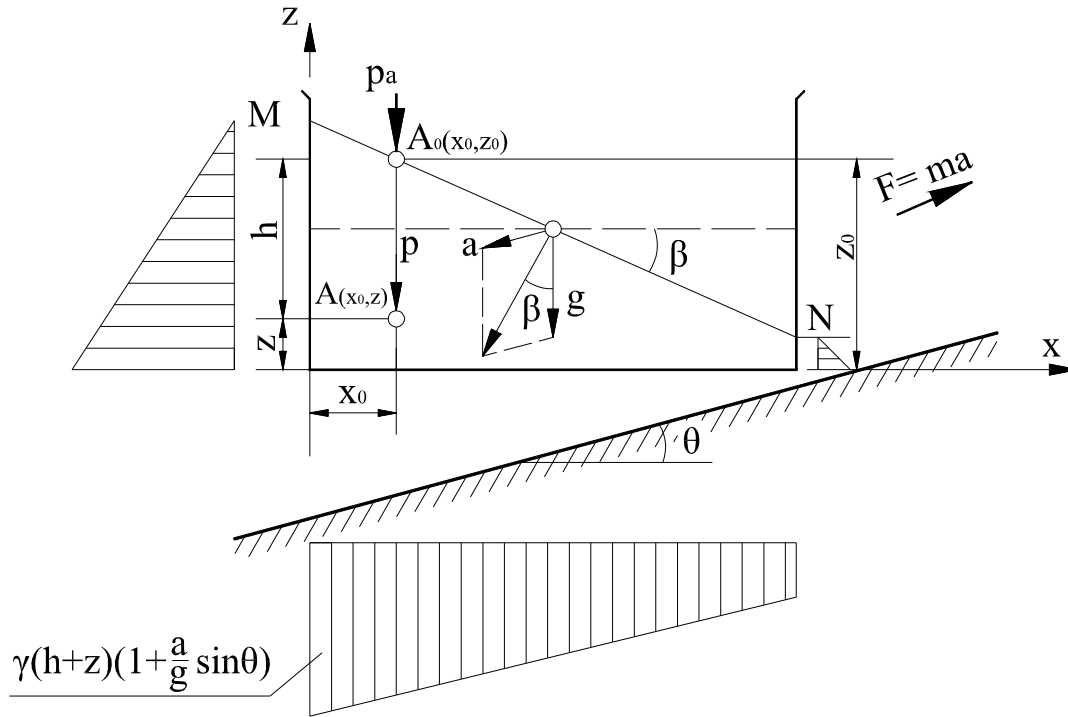


Fig. 4.20. Echilibrul relativ de translație după o direcție oarecare.

Variația presiunii cu adâncimea se obține din relația fundamentală integrată a hidrostatiei, aplicată pentru două puncte pe aceeași verticală, unul la suprafață  $A_0(x_0, z_0)$ , altul  $A(x_0, z)$ , deci

$$dp = -\rho [a \cos \theta dx + (g + a \sin \theta) dz] \text{ sau integrat}$$

$$p = -\rho [a \cos \theta x + (g + a \sin \theta) z] + c$$

care pentru punctul  $A(x_0, z)$  este

$$p_0 = -\rho [a \cos \theta x_0 + (g + a \sin \theta) z] + c$$

și pentru  $A_0(x_0, z_0)$

$$p_0 = -\rho [a \cos \theta x_0 + (g + a \sin \theta) z_0] + c.$$

Scăzând cele două ecuații se obține

$$p = p_0 + \gamma h \left( 1 + \frac{a}{g} \sin \theta \right) \quad (4.41)$$

deci variația presiunii cu adâncimea este tot liniară însă componenta forței masice pe verticală crește cu proiecția inerției pe acesta direcție.

### 4.3.2. Echilibrul relativ de rotație al lichidelor

#### a. Vas în rotație uniformă în jurul axului vertical

Se consideră un vas cilindric vertical, deschis la partea superioară, în care se află lichid cu densitatea  $\rho$  până la cota  $z_i$ , (fig. 4.21). Vasul se pune în mișcare de rotație cu viteză unghiulară  $\omega$  constantă. După un timp și lichidul este antrenat în mișcarea de rotație tot cu viteza unghiulară  $\omega$ . Față de un sistem de referință mobil, considerat solidar cu vasul, lichidul se află în echilibru. Suprafața liberă, izobară, în cazul echilibrului relativ este curbă sub acțiunea forțelor gravitaționale și centrifugale. Particula lichidă din punctul  $M$ , "de masă" unitară, aflată la distanța  $r$  de axa de rotație, este sub influența forțelor specifice  $F_c = \omega^2 r$  și  $F_z = -g$ .

Notând cu  $\alpha$  unghiul pe care-l face forța de inerție centrifugală cu axa  $Ox$  (arbitrară), componentele forțelor masice specifice după axele de coordonate (arbitrar alese) vor fi:

$$\begin{cases} F_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ F_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y \\ F_z = -g \end{cases} \quad (4.42)$$

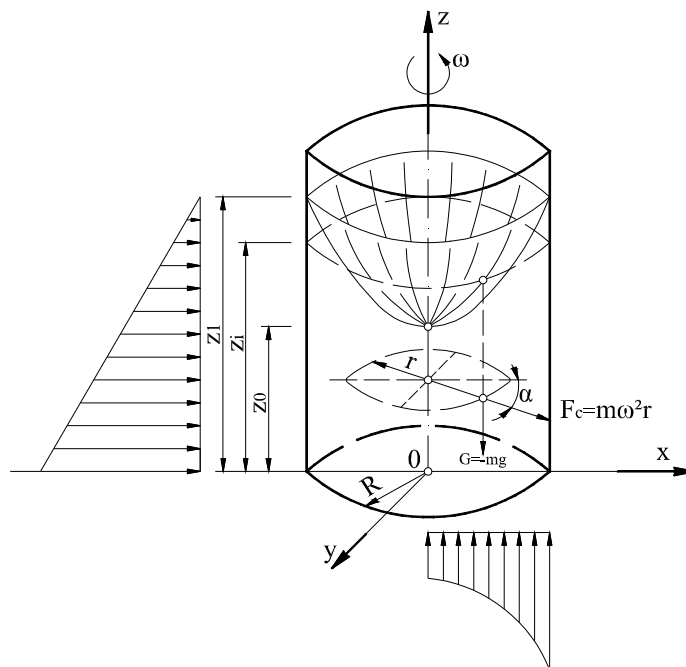


Fig. 4.21. Echilibrul relativ de rotație în jurul axului vertical

Pentru suprafața liberă, izobară, ecuația (4.10) se particularizează în

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0 \quad (4.43)$$

care după integrare devine

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z = c \quad (4.44)$$

sau

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z = c \quad (4.44')$$

Ecuația (4.44), ecuația suprafețelor izobare, reprezintă o familie de paraboloidi de rotație în jurul axei  $z$ , translați prin constanta de integrare  $c$ . Intersecția paraboloidului superior cu planul  $y=0$  determină curba meridian.

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} - \frac{c}{g} \quad (4.45)$$

o parabolă de pe suprafața liberă care trece prin axa  $z$ . Revoluția (rotirea) parabolei meridian în jurul axei  $Oz$  generează paraboloidul.

Înălțimea paraboloidului rezultă din particularizarea ecuației (4.44') pentru:

$$r=0 \longrightarrow z=z_0$$

și

$$r=R \longrightarrow z=z_1$$

obținând

$$z = z_1 - z_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (4.46)$$

Legea de distribuție a presiunii pe pereții și fundul vasului rezultă din integrarea ecuației

$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

$$p = \rho \left( \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + c = \rho \left( \frac{\omega r^2}{2} - gz \right) + c \quad (4.47)$$

care se aplică pentru două puncte: unul  $M_s(r_s, z_s)$  de la suprafață, unde presiunea este  $p_0$  și altul  $M(r, z)$ , la aceeași distanță de axa de rotație, la cota  $z$  în interiorul lichidului, unde presiunea este  $p$ - astfel:

$$p = \rho \left( \frac{\omega^2 r_s^2}{2} - gz \right) + c$$

$$p = \rho \left( \frac{\omega^2 r_s^2}{2} - gz_s \right) + c$$

Scăzând ecuațiile avem:  $p = p_0 + \gamma(z_s - z) = p_0 + \gamma h$ ,

deci presiunea se distribuie după legea hidrostaticii în câmp gravitațional.

**b. Vas în rotație uniformă în jurul axului orizontal.** Se consideră un vas cilindric orizontal care conține parțial lichid și se rotește cu viteza unghiulară constantă în jurul axului orizontal (fig. 4.22). După un timp oarecare lichidul antrenat în mișcare de vasul rotitor va fi în echilibru static relativ față de un sistem de axe de coordonate solidar cu vasul. Particula fluidă din punctul M, de la suprafața lichidului (suprafață izobară), este în echilibru sub acțiunea greutății și a forței centrifugale. Componentele forței masice în acest câmp de forță (pentru masă unitară) vor fi:

$$\begin{cases} F_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ F_y = 0 \\ F_z = -g + \omega^2 r \sin \alpha = -g + \omega^2 z \end{cases} \quad (4.48)$$

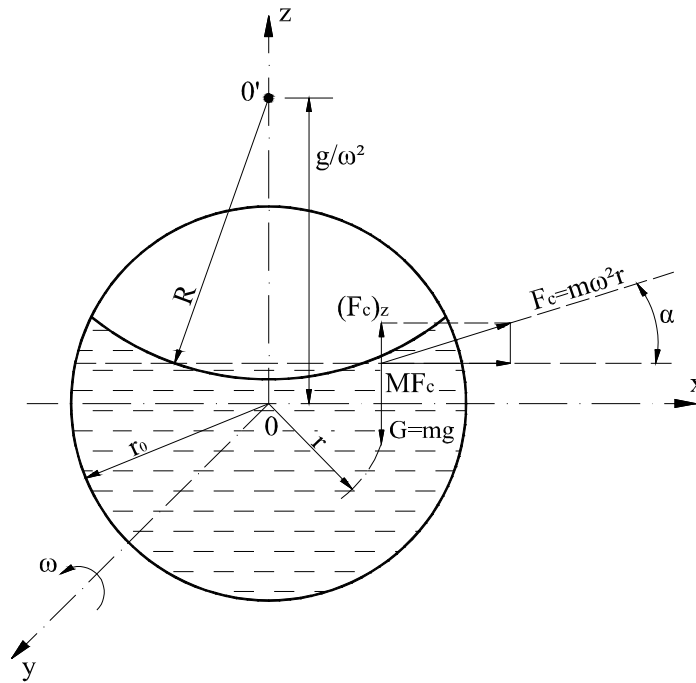


Fig. 4.22. Echilibrul relativ de rotație în jurul axului orizontal.

Ecuatia (4.10), în aceste condiții, pentru suprafețe izobare este:

$$\omega^2 x dx + (\omega^2 z - g) dz = 0 \quad (4.49)$$

care integrat, devine

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2} - gz = c \quad (4.50)$$

sau

$$x^2 + \left( z - \frac{g}{\omega^2} \right) = R^2 \quad (4.50')$$

unde:

$$R^2 = \frac{2C}{\omega^2} + \left( \frac{g}{\omega^2} \right)^2$$

Suprafețele izobare sunt cilindrii concentrici, paralelei cu axa  $y$  și având centrul în  $O' \left( 0, \frac{g}{\omega^2} \right)$ .

Creșterea turației implică apropierea centrului vasului  $O$  de centrul suprafețelor izobare  $O'$ . Pentru  $\omega \rightarrow \infty$  rezultă  $z=0$ , deci  $O$  și  $O'$  se confundă, suprafețele izobare fiind concentrice cu vasul. Anularea rotației vasului,  $\omega=0$  implică  $z = \infty$ , deci suprafața liberă este orizontală.

### 4.3.3. Echilibrul relativ al lichidelor în curbe (coturi)

Se consideră un vas cu lichid care descrie cu viteza uniformă  $V$  o curbă, având raza medie  $R_m$ . Se urmărește stabilirea formei suprafeței libere după care se dispune lichidul din vas (fig. 4.23). Sistemul de referință  $XOYZ$  se mișcă odată cu vasul.

O particulă de la suprafața liberă (izobară) este în echilibru relativ sub acțiunea forțelor masice specifice (pentru masa unitară)

$$\begin{cases} F_x = \frac{V^2}{x} \\ F_y = 0 \\ F_z = -g \end{cases} \quad (4.51)$$

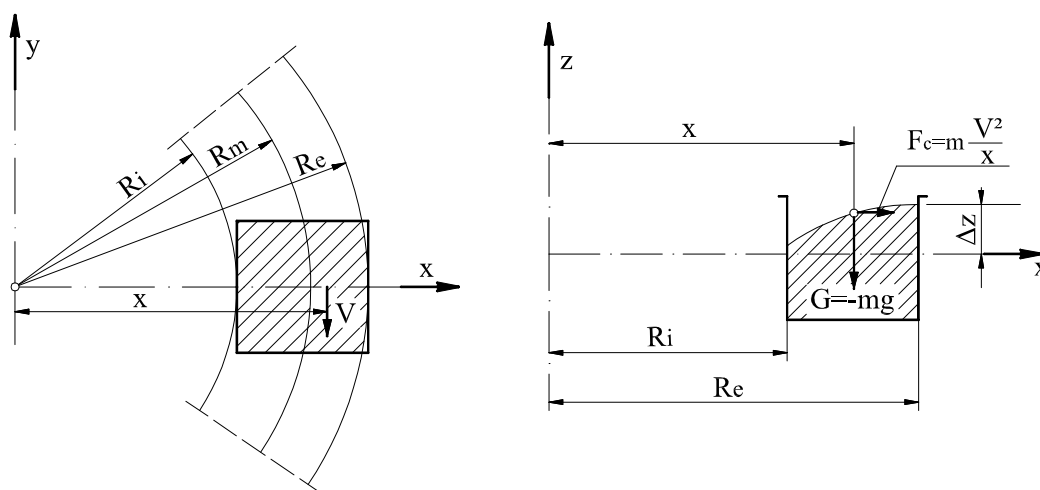


Fig. 4.23. Echilibrul relativ al lichidului în curbe

Cu aceste componente ecuația (4.10), pentru suprafețe izobare, este

$$\frac{V^2}{x} dx - g dz = 0 \quad (4.52)$$



care prin integrare devine

$$z = \frac{V^2}{g} \ln x + c \quad (4.53)$$

Constanta de integrare rezultă pentru  $x = Ri, z = 0, C = -\frac{V^2}{g} \ln Ri$ , după care (4.53) va fi:

$$z = \frac{V^2}{g} \ln \frac{x}{Ri} \quad (4.54)$$

Suprafața liberă în lungul razei de curbură se dispune după o suprafață logaritmică paralelă cu axa  $Y$ .

Supraînălțarea  $\Delta z$  a lichidului în partea exterioară a curbei rezultă din  $x = Re; z = \Delta z$ , deci:

$$\Delta z = \frac{V^2}{g} \ln \frac{Re}{Ri} \quad (4.55)$$

Ecuția (4.55) este utilă și pentru determinarea supraînălțării apei la malul concav al râurilor și canalelor.

**Observații.** Echilibrul relativ al lichidelor găsește multiple aplicații tehnice ca: accelerometru hidraulic, tahometru hidraulic, giroscop hidraulic, separator centrifug, turnare în matrițe centrifugate etc.

#### 4.4. Acțiunea lichidelor pe suprafețe solide

Fluidele exercită presiune pe suprafețele solide cu care vin în contact. Rezultanta acestei acțiuni în funcție de forma suprafeței este o forță sau o forță și un moment. Forța exercitată de un fluid în repaus asupra unui perete solid se numește **forță hidrostatică**. Impropiu, se mai numește forță de presiune fiindcă se datorește presiunii hidrostatice. În multe cazuri practice este necesară cunoașterea forței hidrostatice, aceasta fiind o încărcare fundamentală la dimensionarea mai multor lucrări ingineresti, ca: rezervoare, conducte, stăvilare, baraje etc.

Calculul forței hidrostatice poate fi efectuat diferit pentru suprafețe plane și curbe și din acest considerent se tratează separat.

#### 4.4.1. Forța hidrostatică pe suprafețe plane

Se consideră o suprafață  $A$ , plană, înclinată cu unghiul  $\theta$  față de orizontală, de formă oarecare și se propune determinarea forței hidrostatice și al punctului ei de aplicare (fig. 4.24).

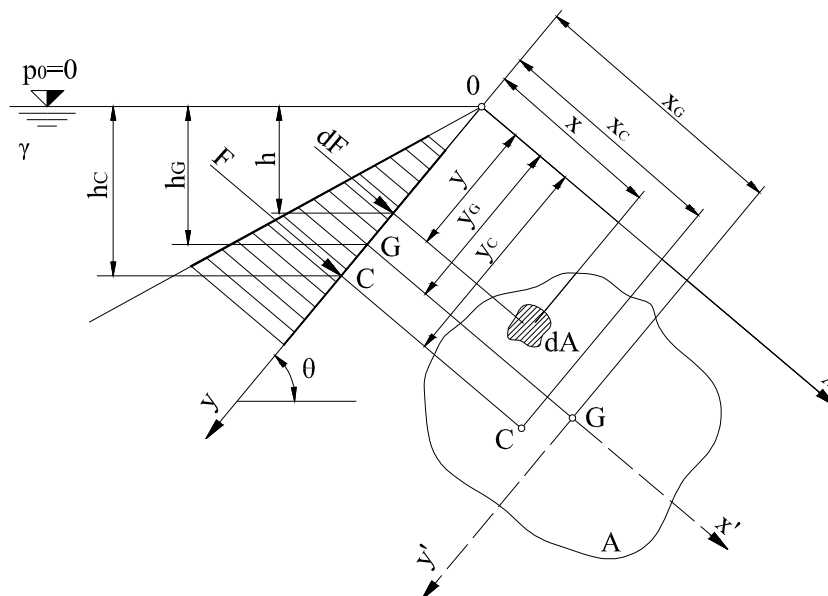


Fig. 4.24. Forța hidrostatică pe suprafețe plane

Pentru determinarea forței hidrostatice se împarte suprafața  $A$  în suprafețe elementare  $dA$ , asupra cărora acționează forțe elementare  $dF$ . Suprafața  $dA$  se ia suficient de mică pentru a se putea admite o distribuție uniformă a presiunii pe aceasta.

Forțele elementare  $dF$  formează un sistem de forțe paralele, normale pe suprafața  $A$  și admit o rezultantă unică  $F$ . Lucrând în presiuni manometrice, forța elementară este

$$dF = p dA = \gamma h dA \quad (4.56)$$

în sistemul de coordonate  $xoy$ ,  $h = y \sin \theta$ , deci

$$dF = \gamma \sin \theta y dA \quad (4.56')$$

Prin integrare pe suprafața  $A$  se obține forța hidrostatică:

$$F = \gamma \sin \theta \int_A y dA = \gamma \sin \theta S_x = \gamma y_G A \sin \theta$$

sau

$$F = \gamma h_G A = p_G A \quad (4.57)$$

Forța hidrostatică este produsul între greutatea specifică ( $\gamma$ ), aria suprafeței înclinate și adâncimea centrului de greutate (măsurată pe verticală de la planul de apă la centrul de greutate). Sub integrală este momentul static  $S_x$  al suprafeței  $A$  în raport cu axa  $x$ , care s-a exprimat în funcție de ordonata centrului de greutate.

**Coordonatele punctului de aplicare a forței hidrostatice** (centrul de presiune) se obțin, considerând valabil pentru câmpul de forță elementar și paralel teorema lui Varignon (teorema momentelor). Aplicând acesta teoremă în raport cu axa  $Ox$  avem:

$$F y_c = \int_A y dF$$

dar  $F = \gamma S_x \sin \theta$  și  $dF = \gamma y dA \sin \alpha$

deci:

$$y_c = \frac{\int_A y^2 dA}{S_x} = \frac{I_x}{S_x} \quad (4.58)$$

Ordonata centrului de aplicare a forței hidrostatice este catul momentului de inerție și static al suprafeței  $A$  față de axa  $OX$ .

Aplicând teorema lui Steiner (variația momentului de inerție) pentru axa  $X'$  (ce trece prin centrul de greutate; al suprafeței), se obține:

$$Y_c = Y_G + \frac{I_{x'}}{Y_c A} \quad (4.59)$$

Procedând în mod analog pentru axa  $OY$  se obține abscisa centrului de aplicare a forței hidrostatice

$$FX_C = \int_A x dA$$

sau

$$X_C = \frac{\int_A xy dA}{S_x} = \frac{I_{xy}}{S_x},$$

respectiv

$$X_C = X_G + \frac{I_{x'y'}}{Y_G A}$$

Abscisa centrului de presiune este catul momentului de inerție centrifug și momentul static.

### Observații

1. În situația suprafețelor plane verticale particularizarea constă în  $\theta = 90^\circ$ , deci  $h = y$ .

2. Particularizarea forței hidrostatice pentru suprafețe orizontale indică  $h = h_G = \text{const.}$  și se obține aceeași presiune pe toată suprafața. Acest caz explică paradoxul hidrostatic - forța hidrostatică- pe suprafața orizontală de mărime  $A$  depinde numai de natura lichidului ( $\gamma$ ) și de adâncime și este independentă de forma și volumul vasului.

3. Deoarece în ecuația (4.59) termenii sunt pozitivi rezultă că, pentru  $\theta \neq 0$ , centrul de aplicare a forței hidrostatice  $C$  este totdeauna sub centrul de greutate  $G$  al suprafeței. Dacă suprafața  $A$  devine orizontală ( $\theta = 0$ ), atunci  $C = G$ .

4. La stabilirea relațiilor (4.57, 59 și 60) s-a presupus că la exteriorul rezervorului și la suprafața liberă a lichidului presiunea este aceeași. În cazul general când la suprafața lichidului există presiunea  $p'$ , iar la exteriorul rezervorului presiunea  $p''$ , se notează  $p_0 = p' - p''$ . Forța hidrostatică elementară are valoarea

$$dF = (p_0 + \gamma h) dA = \gamma \left( \frac{p_0}{\gamma} + h \right) dA = \gamma H dA \quad (4.61)$$

unde s-a notat  $H = \frac{p_0}{\gamma} + h$ . Problema se poate reduce la cazul studiat anterior

însă suprafața liberă a lichidului este considerată mai sus cu valoarea  $h' = \frac{p_0}{\gamma}$

Sistemul de coordonate  $O'XY$  se definește în raport cu suprafața liberă fictivă, unde:

$$X=x$$

și

$$Y = \frac{H}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{p_0}{\gamma} + h \right) = y + \frac{p_0}{\gamma} \frac{1}{\sin \theta} \quad (4.62)$$

Forța hidrostatică este:

$$F = \gamma H_G A = \gamma \left( h_G + \frac{p_0}{\gamma} \right) A = (p_0 + \gamma h_G) A \quad (4.63)$$

și se aplica în punctul de coordonatele:

$$X_C = X_G + \frac{I_{X'Y'}}{Y_G A}; Y_C = Y_G + \frac{I_{X'}}{Y_G A} \quad (4.64)$$

sau

$$\begin{aligned} X_C &= X_G + \left( 1 - \frac{p_0}{p_0 + \gamma h_G} \right) \frac{I_{X'Y'}}{y_G A}; \\ Y_C &= Y_G + \left( 1 - \frac{p_0}{p_0 + \gamma h_G} \right) \frac{I_{X'}}{y_G A} \end{aligned} \quad (4.64')$$

**Aplicație:** Așezarea lonjeroanelor egal încărcate pe stavile plane verticale, dreptunghiulare se poate soluționa analitic, grafoanalitic și grafic.

Se consideră o stavilă, cu dimensiunile  $b \times H$  și se propune ca forța hidrostatică să fie preluată de  $n$  lonjeroane.

**a. Soluția analitică**

Forța hidrostatică  $F = \gamma h_G A = \frac{1}{2} \gamma H^2 b$  se repartizează celor  $n$  lonjeroane, fiecare preluând  $f = \frac{F}{n} = \frac{1}{2n} \gamma H^2 b$ . Diagrama presiunilor se divide în  $n$  părți egale, delimitate de adâncimile  $h_1, \dots, h_k, \dots, h_n$ , iar la cotele  $z_1, \dots, z_k, \dots, z_n$  ale centrelor de greutate ale acestor suprafețe vor fi plasate lonjeroanele (fig. 4.25).

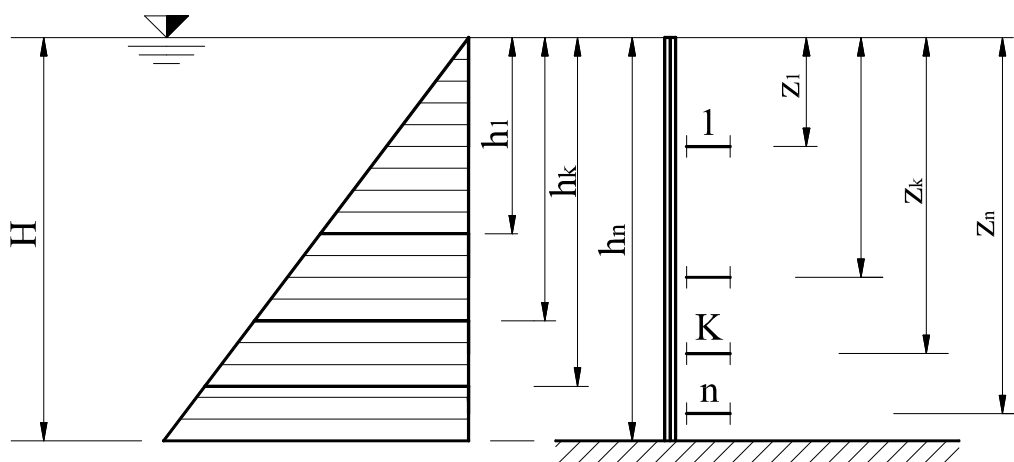


Fig. 4.25. Schemă pentru poziționarea pe cale analitică a lonjeroanelor

Prima adâncime de împărțire a diagramei de presiune rezultă din:

$$\frac{\gamma h_1^2 b}{2} = \frac{\gamma H^2 b}{2n} = f$$

sau

$$h_1 = H \sqrt{\frac{1}{n}}$$

A doua dâncime rezultă din:

$$\frac{\gamma h_2^2 b}{2} - \frac{\gamma h_1^2 b}{2} = f = \frac{\lambda H^2 b}{2n}$$

sau

$$h_2 = H \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Procedând în mod analog se ajunge la relația de recurență

$$h_K = H \sqrt{\frac{k}{n}} \quad (4.65)$$

Adâncimea centrului de greutate a acestor suprafețe de egală mărime (din diagrama de presiune) față de planul de apă rezultă din:

$$z_1 = \frac{2}{3} \left[ (h_K - h_{K-1}) - \frac{h_{K-1} h_K}{h_{K-1} + h_K} \right] \quad (4.66)$$

sau

$$z_i = \frac{2}{3} [k h_k - (k-1) h_{k-1}] \quad (4.66')$$

### b. Soluția grafo-analitică

Cu variabila  $h \in [0, H]$ , prin reprezentarea grafică se construiește curba forței hidrostatice  $F = \gamma h^2 \frac{b}{\gamma}$  în coordonatele (F, h), originea sistemului fiind în planul de apă (fig. 4.26).

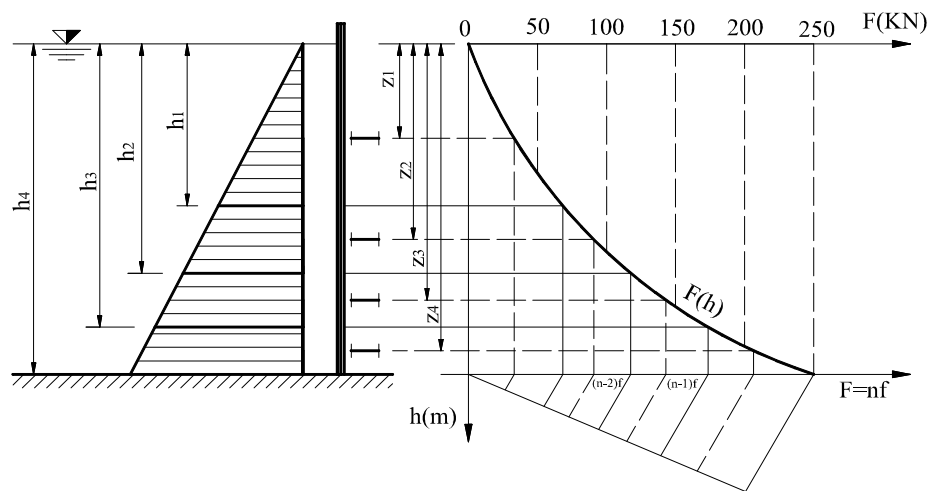


Fig. 4.26. Soluția grafo-analitică de așezare a lonjeroanelor

Se împarte grafic forța totală la numărul lonjeroanelor, iar verticalele duse de aici până la curba  $F(h)$ , apoi orizontalele din aceste puncte, împart diagrama de presiune în suprafețe egale. Verticala ridicată de la jumătatea fiecărui interval de forță  $f$  până la curba  $F(h)$ , apoi orizontalele duse spre stavilă din aceste puncte, definesc locul de pozare a lonjeroanelor. Reprezentările grafice se fac la scară; mărimea graficului influențează direct precizia rezultatelor.

c. **Soluția grafică** a problemei cere reprezentări grafice la scară (a înălțimii stavilei) și construcția cu acuratețe a desenului (fig. 4.27).

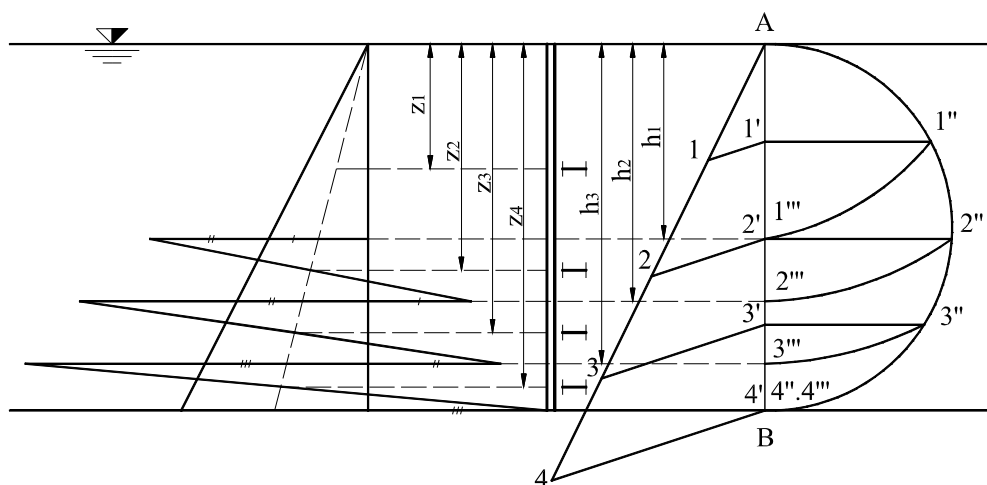


Fig. 4.27. Soluția grafică de așezare a lonjeroanelor

Se duce un semicerc cu diametrul  $D = H$ , iar acesta se împarte (grafic) într-un număr de părți egal cu numărul lonjeroanelor. Din punctele  $1'', 2'' \dots$  se ridică perpendiculare pe diametrul  $AB$  până la intersecția cu semicercul (pct.  $1''', 2''', \dots$ ). Cu piciorul compasului în  $A$  din  $1'', 2'', \dots$  se descriu arce de cerc până la diametrul  $AB$ . Intersecția acestor arce cu segmentul  $AB$  definește punctele  $1''', 2''', \dots$  de unde orizontalele duse la epura presiunii împart aceasta în suprafețe egale. Demonstrația celor descrise este o problemă simplă de geometrie. Mai departe, tot grafic, se găsește centrul de greutate a suprafețelor de egală mărime (un triunghi, celelalte trapeze).

#### 4.4.2. Forța hidrostatică pe suprafețe curbe deschise.

La suprafețe curbe oarecare mulțimea forțelor elementare se reduce la trei forțe neconcurente (sau la o forță și un moment) și nu la o rezultantă unică.



Se urmărește determinarea acestor forțe și a coordonatelor centrelor lor de aplicare.

Se consideră o suprafață  $A$ , de formă oarecare, asupra căreia acționează un lichid în repaus având greutatea specifică  $\gamma$ . Suprafața este raportată la un sistem de referință cartezian  $oxyz$ . Axa  $h = -z$ , are originea în planul de apă, astfel ca adâncimea unui punct să fie pozitivă (fig. 4.28). Se lucrează în presiuni relative, cu presiunea de referință cea de la suprafața lichidului.

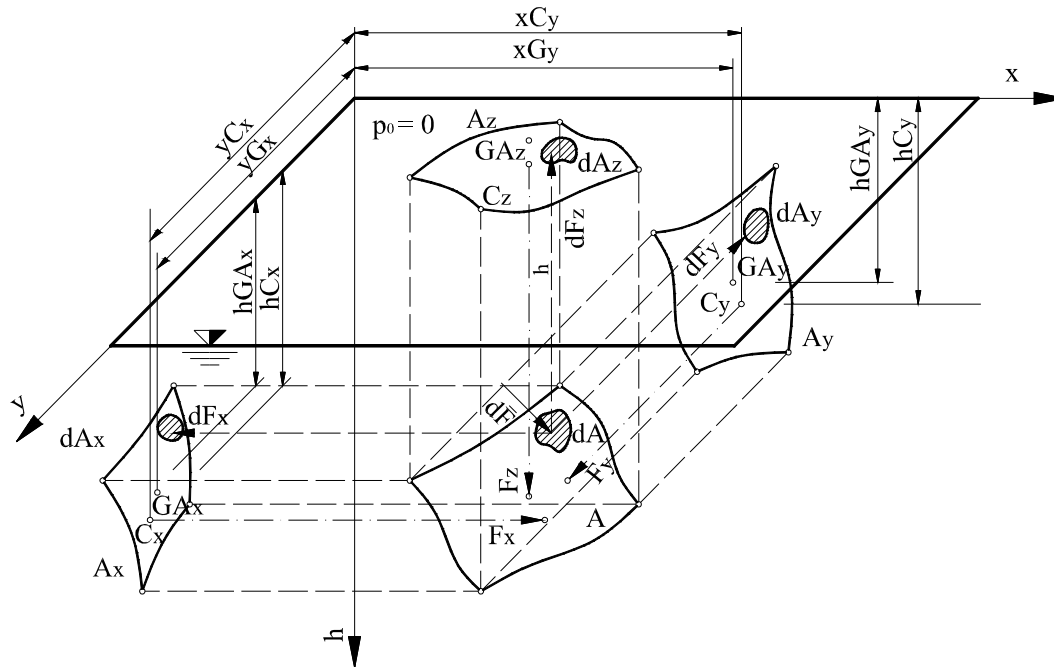


Fig. 4.28. Forța hidrostatică pe suprafațe curbe

#### a. Calculul forțelor

Se împarte suprafața curbă  $A$  în suprafețe elementare  $dA$  așa de mici ca pe acestea să putem considera presiunea constantă. Pe fiecare suprafață elementară  $dA$  acționează câte o forță elementară  $dF$ , normală pe suprafața considerată. Suprafața fiind curbă, de formă oarecare, forțele elementare se reduc la trei forțe neconcurente (numai în cazuri particulare se reduce câmpul de forță la rezultată unică).

Forța elementară  $\overline{dF}$  se descompune după axele de coordonate, deci:

$$\overline{dF} = \bar{i} dFx + \bar{j} dFy + \bar{k} dFz \quad (4.67)$$

ceea ce reprezintă trei sisteme de forțe elementare paralele. Fiecare dintre acestea se reduce la rezultantă unică

$$F_x = \int_A dF_x; F_y = \int_A dF_y; F_z = \int_A dF_z \quad (4.68)$$

Știind forța elementară  $d\vec{F} = p d\vec{A} = \gamma h d\vec{A}$  a cărei proiecții după axele de coordonate sunt:

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos(\widehat{dF, x}) = \gamma h \cos(\widehat{dF, x}) \\ dF_y &= dF \cos(\widehat{dF, y}) = \gamma h dA \cos(\widehat{dF, y}) \\ dF_z &= dF \cos(\widehat{dF, z}) = \gamma h dA \cos(\widehat{dF, z}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

unde  $\widehat{dF, x}, \widehat{dF, y}, \widehat{dF, z}$  reprezintă unghiurile formate de forța  $\vec{dF}$  cu axele de coordonate. Știind că  $\vec{dF}$  este normală la  $dA$ , rezultă că  $dA \cos(\widehat{dF, x})$  reprezintă proiecția suprafeței  $dA$  pe planul  $x=0$ , așadar

$$\begin{cases} dA \cos(\widehat{dF, x}) = dA_x \\ dA \cos(\widehat{dF, y}) = dA_y \\ dA \cos(\widehat{dF, z}) = dA_z \end{cases} \quad (4.79)$$

și sistemul (4.69) devine

$$\begin{cases} dF_x = \gamma h dA_x \\ dF_y = \gamma h dA_y \\ dF_z = \gamma h dA_z \end{cases} \quad (4.69'')$$

Însumarea proiecției forțelor elementare determină componentele forței hidrostatice  $F_x, F_y$  și  $F_z$ , care acționează pe suprafața  $A$ , drept niște forțe hidrostatice ce acționează pe suprafețe plane (proiecțiile suprafeței  $A$  în planurile sistemului de coordonate considerat):

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_{Ax} dF_x = \gamma \int_{Ax} h dA_x = \gamma S_{Ax} = \gamma h_{G_{Ax}} A_x \\
F_y &= \int_{Ay} dF_y = \gamma \int_{Ay} h dA_y = \gamma S_{Ay} = \gamma h_{G_{Ay}} A_y \\
F_z &= \int_{Az} dF_z = \gamma \int_{Az} h dA_z = \gamma \int_{Az} dW = \gamma W
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Primele două integrale sunt momente statice iar a treia un volum. Componentele orizontale ale forței hidrostactice sunt produsul între greutatea specifică a lichidului și momentul static al proiecției suprafeței curbe în planurile de proiecție, luate față de axa orizontală a sistemului de coordonate din planul considerat. Componenta  $F_z$  nu se poate integra ca moment static, deoarece suprafața  $A_z$  este cuprinsă în planul  $h=0$  și toate punctele sale au cotă nulă. Integrala respectivă reprezintă un volum numit **corp de presiune**. Sub această denumire se înțelege volumul cuprins între suprafața curbă dată (ca bază inferioară), proiecția ei în planul de apă (ca bază superioară) și generatoarele de proiecție.

Cele menționate sunt valabile suprafețelor curbe **simple**, suprafețe pe care orice dreaptă verticală intersectează o singură dată.

### b. Calculul coordonatelor centrelor de aplicare ale forțelor

Forța  $F_x$  este paralelă cu  $OX$  și intersectează  $Ax$  în  $C_x$ ,  $F_y$  are centrul de aplicare în  $C_y$  și  $F_z$  în  $C_z$ . Determinarea coordonatelor punctelor  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  utilizează teorema momentelor (Varignon), astfel:

- pentru  $C_x(y_{C_x} h_{C_x})$  avem

$$\begin{aligned}
Y_{C_x} F_x &= \int_{Ax} y dF_x \\
h_{C_x} F_x &= \int_{Ax} h dF_x
\end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} y_{Cx} = \frac{\gamma \int y h dAx}{\gamma h_{Gx} Ax} = \frac{I_y h(Ax)}{h_{Gx} Ax} \\ y_{Cy} = \frac{\gamma \int h^2 dAx}{\gamma h_{Gx} Ax} = \frac{I_y (Ax)}{h_{Gx} Ax} \end{cases} \quad (4.72)$$

- după un calcul asemănător, pentru  $C_y(h_{Cy}, h_{Cy})$ , se obține:

$$x_{Cy} = \frac{I_x h(Ay)}{h_{Gy} A_y}, h_{Cy} = \frac{I_x (Ay)}{h_{Gy} A_y} \quad (4.73)$$

- coordonatele punctului  $Cz$  corespund centrului de greutate al corpului de presiune.

### Observații

1. În cazul unor suprafețe curbe particulare sistemul forțelor elementare se reduce la rezultantă unică. De exemplu, dacă suprafața curbă este o porțiune oarecare a unei sfere, suporturile tuturor forțelor elementare trec prin centrul sferei, deci sunt concurente și admit o rezultantă unică. Dacă suprafața curbă este simetrică față de un plan vertical, forțele hidrostatice elementare două câte două au o rezultantă în planul de simetrie, deci sistemul de forțe elementare se reduce la forțe coplanare, concurente, admit o rezultantă unică. Astfel de suprafețe curbe sunt cele generate de deplasarea paralelă a unei drepte pe o curbă suport oarecare - suprafețele cilindrice (fig. 4.29). Forța hidrostatică  $F$  în asemenea cazuri are două componente - una orizontală  $F_o$  și una verticală  $F_v$  - rezultând  $F^2 = F_o^2 + F_v^2$ , cu direcția față de orizontală

$$\theta = \arctg\left(\frac{F_v}{F_o}\right)$$

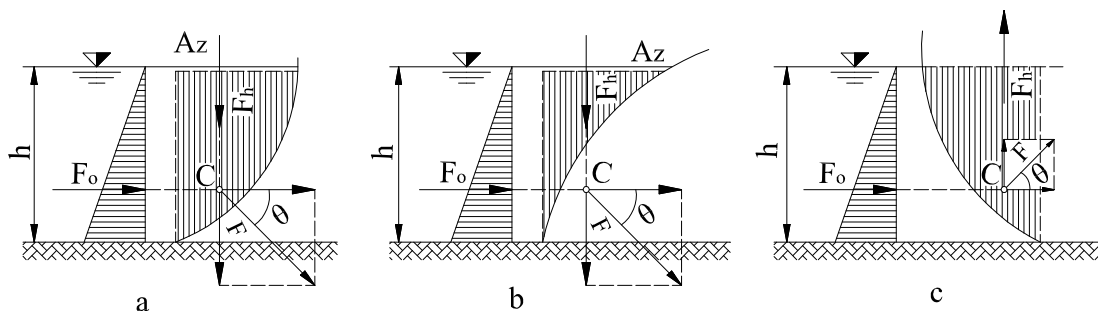


Fig. 4.29. Forța hidrostatică pe suprafețe curbe cu plan de simetrie vertical

În mod asemănător poate fi pusă problema când planul de simetrie este orizontal, rezultând două componente (după axa  $x$  și  $y$ ) a forței hidrostatice (fig. 4.30).

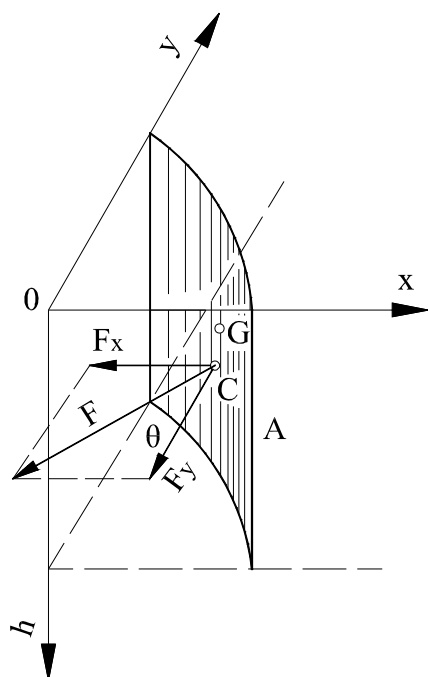


Fig. 4.30. Forța hidrostatică pe suprafețe curbe cu plan de simetrie orizontal

2. Definiția volumului corpului de presiune  $W$  nu implică existența efectivă a lichidului deasupra curbe (ex. fig. 4.29. c). Volumul  $W$  se definește ca cel cuprins între suprafeței suprafața curbă și proiecția ei în planul de apă (prelungit virtual).

3. În cazul suprafețelor compuse, acestea întâi se descompun în suprafețe simple și pentru fiecare în parte se calculează corpul de presiune (implicit forța verticală) și forța orizontală, care apoi se adună vectorial (se construiește poligonul forțelor pentru aflarea rezultantei).

#### 4.4.3. Forța hidrostatică pe suprafețe închise

Forța hidrostatică pe suprafețe închise înseamnă evaluarea acțiunii lichidului asupra unui corp solid cufundat complet în acest lichid, care este exprimată de **teorema lui Arhimede**.

*Un lichid greu, aflat în repaus, exercită asupra unui corp solid cufundat în el o forță verticală, ascendentă a cărei intensitate este egală cu greutatea lichidului dezlucit.*

Se consideră un corp solid cu greutatea specifică  $\gamma$  și volum  $W$  (greutatea  $G$ ) cufundat total într-un lichid în repaus (fig. 4.31).

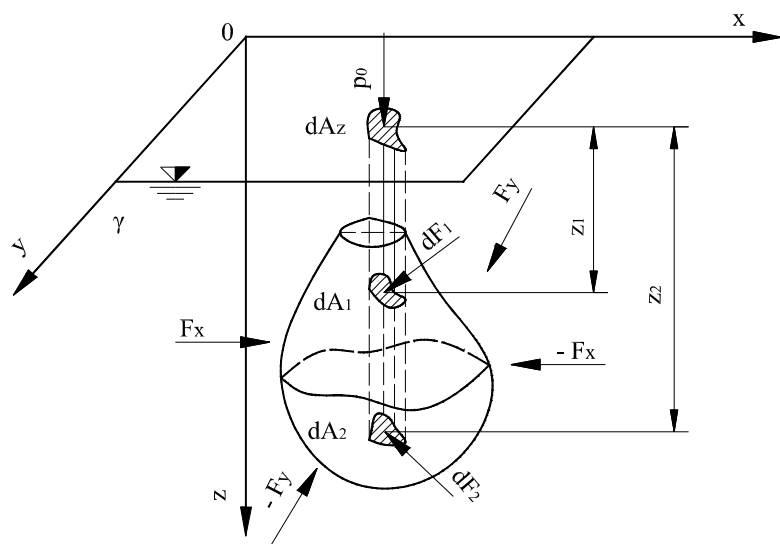


Fig.4.31. Forța hidrostatică pe suprafețe închise

Forma este astfel aleasă încât o verticală oarecare întâlnește suprafața laterală a corpului în cel mult două puncte. Asupra unui corp acționează, în afara greutății proprii, forța hidrostatică  $F$ , cu componentele  $F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$ . Componentele orizontale  $F_x$  și  $F_y$  sunt nule, deoarece proiecțiile orizontale ale forțelor sunt, două câte două, egale și de sens contrar. Așadar se calculează doar componenta verticală. Pentru a afla  $F_z$  se împarte corpul în paralelipipede elementare verticale, care în partea lor inferioară și superioară sunt limitate de elemente de suprafață  $dA_1$  și  $dA_2$ . Acestea sunt suficient de mici pentru a admite pe ele o distribuție uniformă a presiunii. Notând cu  $z_1$  și  $z_2$  adâncimile centrelor de greutate ale lui  $dA_1$  și  $dA_2$  față de nivelul liber al lichidului, se poate scrie:

$$\begin{cases} dF_1 = p_1 dA_1 = (p_0 + \gamma z_1) dA_1 \\ dF_2 = p_2 dA_2 = (p_0 + \gamma z_2) dA_2 \end{cases} \quad (4.74)$$

Proiecțiile acestor forțe pe verticala sunt:

$$\begin{cases} (dF_1)_z = (p_0 + \gamma z_1) dA_1 \cos(\widehat{dF_1, z}) = (p_0 + \gamma z_1) dAz \\ (dF_2)_z = (p_0 + \gamma z_2) dA_2 \cos(\widehat{dF_2, z}) = (p_0 + \gamma z_2) dAz \end{cases}$$

Rezultanta se obține prin scăderea relațiilor

$$dF_z = (dF_1)_z - (dF_2)_z = -\gamma(z_2 - z_1) dA_z = -\gamma dW \quad (4.75)$$

După integrare rezultă forța

$$F_z = -\gamma \int_A (z_2 - z_1) dW = -\gamma W \quad (4.76)$$

Forța hidrostatică pe suprafețe închise (forța arhimedică) are valoarea greutății lichidului dezlucuit.

Legea lui Arhimede se poate aplica corpurilor la care toată suprafața corpului de sub nivelul liber este în contact cu lichidul. Dacă corpul imersat este rigid rezultanta  $F_z$  se aplică în centrul de greutate  $C$  al volumului de lichid dezlucuit.

### Condițiile de plutire

a) Dacă asupra corpului cufundat acționează numai  $\overline{F_z}$  și greutatea proprie  $\overline{G}$  corpul rămâne în repaus la orice adâncime dacă forțele  $F_z$  și  $G$  au același suport și satisfac condiția  $F_z + G = 0$ . Este cazul **plutirii indifferente**. Ținând seama însă de variația densității cu adâncimea, acest echilibru este stabil pentru o anumită adâncime (pe aceasta se bazează teoria submarinelor și batiscafelor).

b) Dacă  $F_z < G$ , corpul coboară pe verticală până la fund, sprijinindu-se pe acesta.

c) Dacă  $F_z > G$ , corpul urcă pe verticală și iese parțial din lichid, trecând la condiția **plutirii de suprafață**. Dacă o parte a unui solid este imersată într-un lichid de densitate  $\rho_1$ , iar restul într-un alt lichid de densitate  $\rho_2$  (fig. 4.32), rezultă:

$$F_z = \rho_1 g W_1 + \rho_2 g W_2 = \gamma_1 W_1 + \gamma_2 W_2 \quad (4.77)$$

în care  $W_1$  și  $W_2$  sunt volumele părților imersate în cele două lichide. Dacă la partea superioară este un gaz, corpul satisface condițiile plutirii de suprafață și se numește plutitor. Neglijând densitatea gazului ecuația (4.77) se particularizează în (4.76).

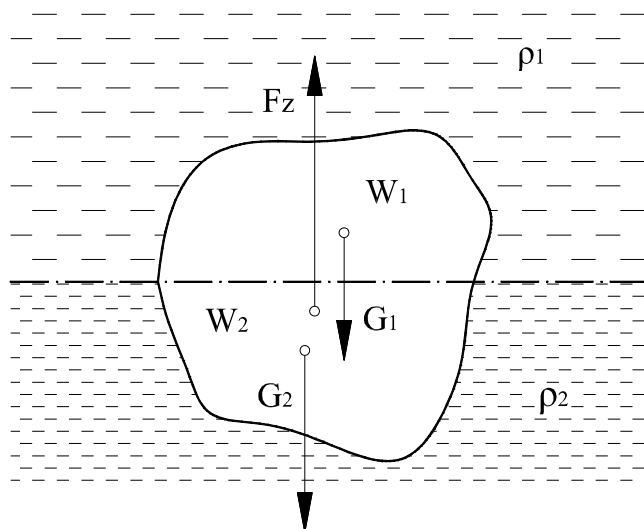


Fig. 4.32. Corp cufundat în două lichide imiscibile de densități diferite.

**Observații.** La aplicațiile practice ale forțelor hidrostactice trebuie avut în vedere că, după caz, se folosește forța hidrostatică rezultantă sau încărcarea efectivă dată de presiune.

#### 4.5. Stabilitatea echilibrului corpurilor plutitoare

Un corp rigid care lăsat liber se scufundă parțial în lichid se numește plutitor. Pentru un plutitor se îndeplinește condiția:

$$G = \gamma_r W_r = \gamma_2 W_2 \quad (4.78)$$

care s-a obținut prin particularizarea ecuației (4.77) - pentru  $\gamma_i = 0$  și egalarea sa cu greutatea corpului. Relația (4.78) este de fapt condiția plutirii de suprafață, greutatea specifică medie a rigidului este inferioară greutateii specifice medii ale fluidului.

##### 4.5.1. Noțiuni asupra plutitorilor

Principalele elemente hidraulice ale unui plutitor corespund fig. 4.33. Volumul de lichid dezlocuit este **carena**, iar centrul de greutate al acestui volum este **centrul de carenă** C. În acest punct C acționează forța arhimedică. În diferite poziții de plutire (înclinații ale plutitorului) volumul de lichid dezlocuit este identic și poartă numele de izocarene. Prin **deplasament** se



înțelege greutatea volumului de lichid dezlucuit. **Linia de plutire** este linia de intersecție dintre suprafața laterală a plutitorului și planul de plutire. **Aria de plutire** este figura plană mărginită de linia de plutire. Axa de **plutire verticală** este axa care trece prin centrul de carenă și centrul de greutate ai plutitorului; are poziție verticală sau se poate înclina împreună cu plutitorul. Axa **longitudinală de plutire** este dreapta orizontală ce trece prin centrul de greutate ai ariei de plutire în lungul plutitorului. Rotirile oscilatorii ale plutitorului în jurul acestui ax definesc **ruliul**. Axa **transversală de plutire** este axa normală pe axa longitudinală și verticală; trece prin centrul de greutate al ariei de plutire. Oscilația plutitorului în jurul acestui ax este **tangajul**. Adâncimea maximă de cufundare a plutitorului este **pescajul**.

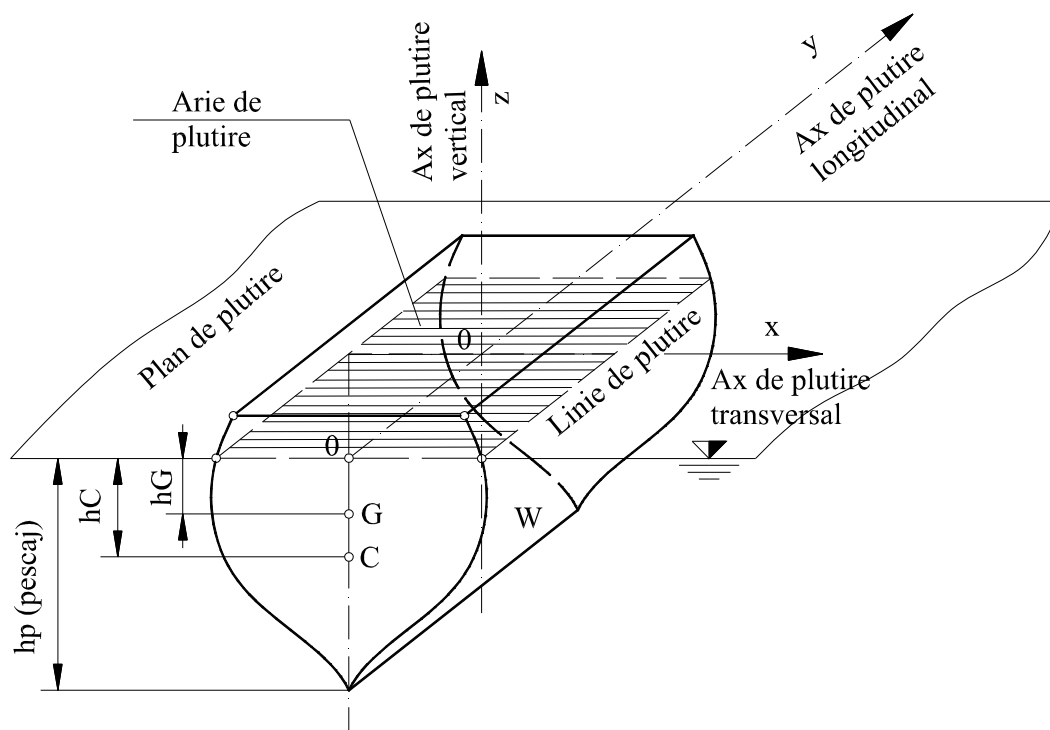


Fig. 4.33. Elementele plutitorului

Considerând un plutitor scos din poziția de echilibru, înclinat cu un unghi  $\theta$ , se constată că centrul de greutate  $G$  rămâne neschimbat, însă centrul de carenă se modifică, deplasându-se din  $C$  în  $C'$  (fig. 4.34). Punctul de intersecție a suportului forței arhimedice (aplicat în  $C'$ ) cu axa  $OZ$  determină punctul  $M$ , denumit **metacentru**. Acest punct este analog cu un punct imaginar de suspendare a plutitorului. Distanța  $\overline{MC} = \rho$  este **raza metacentrică**,  $\overline{MC} = h_m$  **distanța metacentrică**, iar  $\overline{CG} = e$  **excentricitatea**.

Stabilitatea plutitorilor este determinată de poziția punctelor  $M$ ,  $C$  și  $G$  pe axa  $z$ . Mărimea distanței, respectiv a razei metacentrice este în funcție de axul în jurul căruia s-a scos din echilibru plutitorul, astfel se distinge: **metacentrul de ruluu**, când plutitorul oscilează în jurul axei  $y$  și **metacentru de tangaj**, când plutitorul oscilează în jurul axei  $x$ .

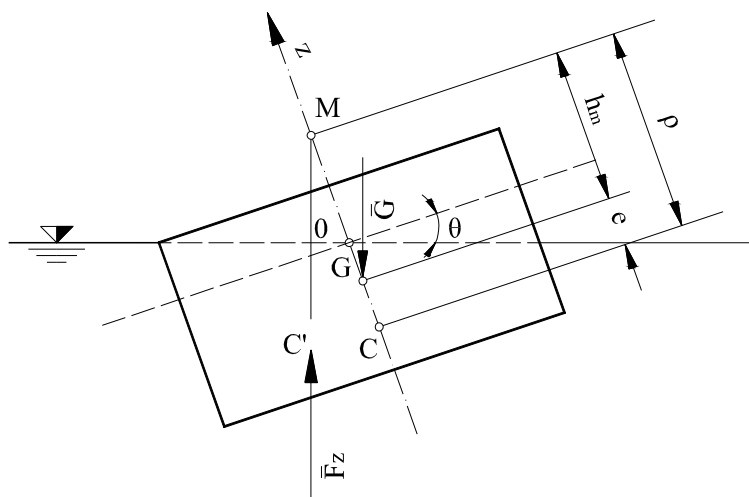


Fig. 4.34. Schema secțiunii plutitorului dezechilibrat

#### 4.5.2. Teoremele plutirii de suprafață

Plutitorii deseori sunt scoși din poziția de echilibru. Prin stabilitatea lor se înțelege capacitatea lor de a restabili poziția de echilibru, de a se redresa. Abordarea stabilității plutirii reclamă demonstrarea celor trei teoreme ale plutirii.

**Teorema I-a** (teorema lui Lacroix). *Dreptele de intersecție ale planurilor de plutire trec prin centrul de greutate al ariei de plutire.*

Se presupune că un plutitor rigid are o nouă poziție de plutire, apropiată de cea normală. Virtual se consideră plutitorul fix și planul de plutire înclinat cu unghiul  $\theta$  (fig. 4.35). Intersecția celor două planuri de plutire are loc după axa  $y$ .

Carenele  $KOH$  și  $K'OH'N$  sunt egale, deci și volumele  $KOK'$  și  $HOH'$  sunt egale. Se observă că

$$\begin{cases} W_{HOH'} = \int_{OH} x \operatorname{tg} \theta dA \\ W_{KOK'} = \int_{OK} (-x \operatorname{tg} \theta) dA \end{cases} \quad (4.79)$$

Suma algebrică a celor două volume este nulă, rezultând:

$$\operatorname{tg} \theta \int_{OH} x dA + \operatorname{tg} \theta \int_{OK} x dA = 0$$

sau

$$\int_{HOK} x dA = S_x = x_G A = 0 \quad (4.80)$$

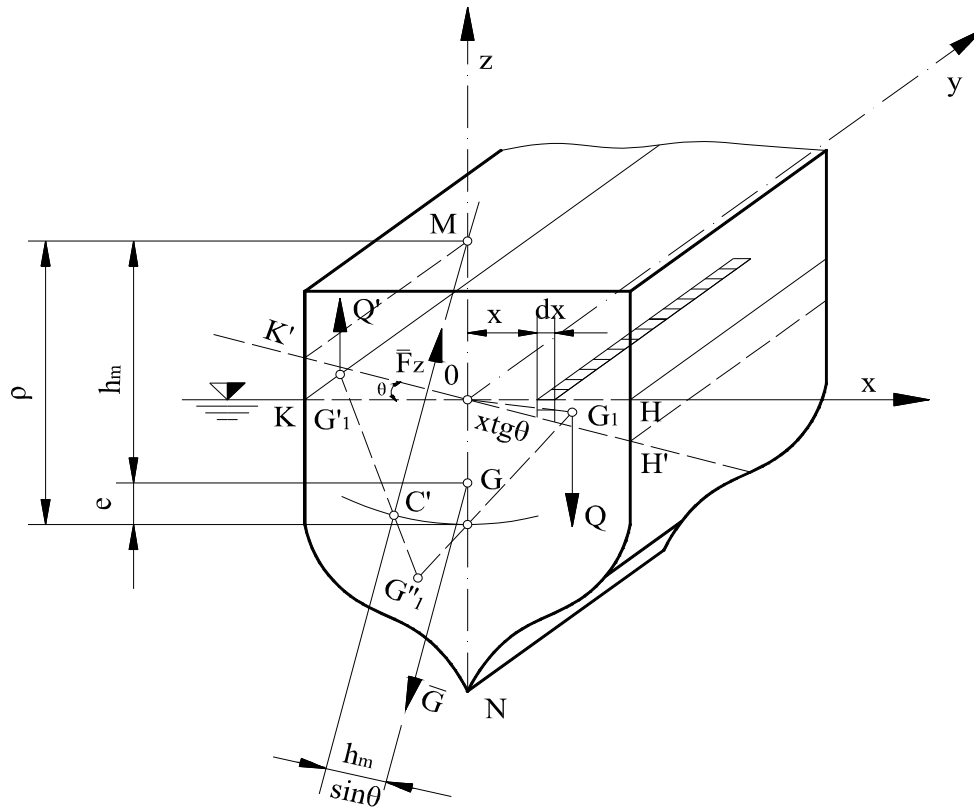


Fig. 4.35. Schemă de calcul al plutitorului

Momentul static  $S_x$  exprimat față de abscisa centrului de greutate arată că  $x_G = 0$ , deci linia de intersecție a planurilor de plutire ( $oy$ ) trece prin centrul de greutate al ariei de plutire.

**Teorema II-a (teorema lui Dupin).** *Planul tangent într-un punct C la suprafața centrelor de carenă este paralel cu planul de plutire corespunzător.*

Se consideră schema din fig. 4.35 unde planului de plutire  $KOH$  îi corespunde centrul de carenă  $C$  și alt plan de plutire  $K'OH'$ , infinit apropiat de cel anterior, cu centrul de carenă  $C'$ . Trebuie demonstrat că planul tangent la suprafața centrelor de carenă în  $C$  este paralel cu planul  $KOH$ . Întrucât  $W_{KOH} = W_{K'OH'N}$ , rezultă că  $W_{KOK'} = W_{HOH'}$ . Se notează centrele de greutate a volumelor  $W_{HOH'}$  cu  $G_1$  și  $W_{KOK'}$  cu  $G_1'$ , respectiv a volumului  $W_{KOH'NK}$  cu  $G_1''$ . Plutirii cu planul de plutire  $KOH$  corespunde volumul carenei cu  $W = W_{KOH'NK} + W_{OHH'}$ , însă  $\gamma W_{KOH'NK}$  se aplică în  $G_1''$ ,  $\gamma W_{OHH'}$  în  $G_1$ , iar  $C \in \overline{G_1 G_1''}$  astfel încât

$$\frac{CG_1}{CG_1''} = \frac{\gamma W_{KOH'NK}}{\gamma W_{OHH'}} \quad (4.81)$$

În mod analog se demonstrează pentru planul de plutire  $K'OH'$  pentru care forța  $\gamma W_{KOH'NK}$  se aplică tot în  $G_1''$ , iar forța  $\gamma W_{KOK'}$ , în  $G_1'$ , iar forța totală  $\gamma W_{K'OH'NK}$  în  $C' \in \overline{G_1' G_1''}$ , rezultând

$$\frac{C'G_1'}{CG_1''} = \frac{\gamma W_{K'OH'NK}}{\gamma W_{OHH'}} \quad (4.82)$$

Egalarea relațiilor (4.81) și (4.82) conduce la

$$\frac{CG_1}{CG_1''} = \frac{C'G_1'}{C'G_1''} \quad (4.83)$$

deci  $C'C \parallel G_1 G_1''$  și la limită  $CC'$  reprezintă planul tangent la suprafața centrelor de carenă în  $C$  care devine paralel la planul de plutire  $KOH$  spre care tinde  $G_1 O G_1'$ .

**Teorema III-a (teorema metacentrului).** *La înclinări mici ale unui plutitor față de poziția normală de plutire raza metacentrică este câțul momentului de inerție al ariei de plutire față de axa de care s-a dezechilibrat plutitorul și volumul carenei.*

În poziție normală de plutire forța arhimedică  $F_z$  este normală pe suprafața KOH de plutire, se aplică în C și este pe același suport cu greutatea  $\overline{G}$  (axa OZ) și nu dă moment. În poziția înclinată cu unghiul  $\theta$  centrul carenei se deplasează în C' (fig. 4.35),  $F_z$  este normal pe planul de plutire  $K'OH'$ . Greutatea se aplică tot în G. La noua poziție de plutire carena scade cu volumul  $W_{HOH'}$  (în centrul de greutate  $G'_1$  acționează forța  $\overline{Q}$ , orientată în jos) și crește cu volumul  $W_{KOK'}$  (o forță arhimedică cu centrul de aplicare în  $G'_1$  și mărimea  $\overline{Q}'$ ). Cuplul forțelor  $QQ'$  este echivalent cu momentul produs de deplasarea lui  $F_z$  din C în C', deci:

$$F_z \cdot CC' = \int x dQ \quad (4.84)$$

Însa  $F_z = \gamma W$  și  $dQ = \gamma x b \tan \theta dx = \gamma x \tan \theta dA \sim \gamma x \theta dA$  (pentru unghiuri mici  $\tan \theta \sim \theta$ ), deci

$$\gamma W \overline{CC'} = \gamma \theta \int_{OH} x^2 \quad (4.85)$$

sau

$$\frac{\overline{CC'}}{Q} = \frac{I_y}{W} \quad (4.86)$$

unde:  $I_y$  este momentul de inerție al ariei de plutire față de axa oy. Pentru unghiuri mici la centru se poate înlocui coarda  $\overline{CC'}$  cu arcul  $\widehat{CC'}$ , care, la rândul său, se exprimă față de raza metacentrică  $\rho$

$$\overline{CC'} \sim \widehat{CC'} = \rho \theta$$

devenind

$$\rho = \frac{I_y}{W} \quad (4.87)$$

Geometric se obține distanța metacentrică

$$h_m = \rho \pm e = \frac{I_y}{W} \pm e \quad (4.88)$$

Raza sau distanța metacentrică se poate calcula pentru scoaterea din echilibru al plutitorului după orice ax din planul de plutire. Importanță practică însemnată are distanța metacentrică minimă.

### 4.5.3. Stabilitatea plutirii

Poziția metacentrului față de centrul de greutate al plutitorului determină stabilitatea plutirii.

1. Când  $M$  este deasupra lui  $G$ , deci distanța metacentrică pozitivă,  $h_m > 0$ , **plutirea este stabilă**. Dacă plutitorul este scos din echilibru condiția de plutire  $\overline{F_z} = \overline{G} = \gamma W$  se respectă; carena își modifică succesiv forma și, implicit, centrul său  $C$ . Plutitorul este supus astfel unui cuplu al forțelor paralele și de sens contrar  $\overline{F_z}$  și  $\overline{G}$ . Acest cuplu tinde să redreseze plutitorul, deci plutirea este stabilă.

2. Când  $M$  se confundă cu  $G$ ,  $h_m = 0$  și **plutirea este indiferentă**. Nu apare cuplul forțelor  $\overline{G}$  și  $\overline{F_z}$ , ele anulându-se pentru orice poziție a plutitorului.

3. Când  $M$  se găsește sub  $G$ ,  $h_m < 0$ , **plutirea este instabilă**, orice mică dezechilibrare a plutitorului față de poziția de echilibru instabil (când  $\overline{G}$  și  $\overline{F_z}$ , sunt pe același suport) conduce la răsturnarea acestuia, modalitate prin care tinde la o plutire stabilă.

În calculele de stabilitate se caută determinarea distanței metacentrice minime, ce se obține prin găsirea axului din planul de plutire față de care aria de plutire admite moment de inerție minim și față de care se dezechilibrează plutitorul.

Pentru plutitori este caracteristic metacentrul de ruluu (micul metacentru) și metacentrul de tangaj (marele metacentru).

În cazul vaselor distanța metacentrică este impusă de destinația lor, astfel:

- la vasele rapide  $h_m = 0,3 \dots 0,7 \text{ m}$ ;
- la vase cu pânză  $h_m = 1,0 \dots 1,4 \text{ m}$ ;
- la vase de război  $h_m = 0,8 \dots 1,2 \text{ m}$ .

**Determinarea experimentală a distanței metacentrice.** Pentru un plutitor cu greutatea  $\overline{G}$  și a centrului de greutate  $G$  cunoscut se poate determina distanța metacentrică prin deplasarea unei greutatei  $Q$  în planul de plutire și măsurarea cu un pendul al înclinării vasului (fig. 4.36). Procedul este aplicabil pentru  $\theta \leq 5^\circ$

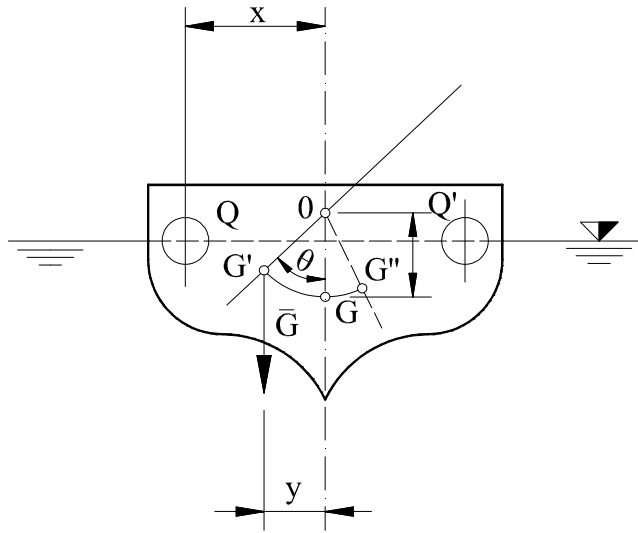


Fig. 4.36. Schema determinării experimentale a distanței metacentrice

Greutatea  $\bar{Q}$  deplasează centrul de greutate în  $G'$  respectiv pendulul de lungime  $l$  se deplasează cu  $y$ , rezultând  $\theta = \arctg \frac{y}{l}$ .

Momentul forței  $\bar{G}$  este analog cu momentul generat de  $\bar{Q}$ , deci

$$\begin{aligned} G \cdot h_m \cdot \operatorname{tg} \theta &= Q \cdot x \\ h_m &= \frac{Q \cdot x}{G \cdot \operatorname{tg} \theta} \end{aligned} \quad (4.89)$$

#### 4.5.4. Oscilațiile plutitorilor

Plutitorii pot efectua oscilații pe verticală sau de rotație în jurul unui ax.

**1. Oscilația plutitorilor pe verticală.** Un plutitor cufundat într-un lichid în repaus și lăsat liber într-o poziție în care greutatea sa  $G$  este mai mică decât greutatea lichidului dezlucuit (cufundarea forțată) va urca spre poziția normală de plutire. Plutitorul însă, ajuns în această poziție, își continuă drumul datorită inerției și va executa oscilații verticale în jurul poziției normale de plutire (fig. 4.37).

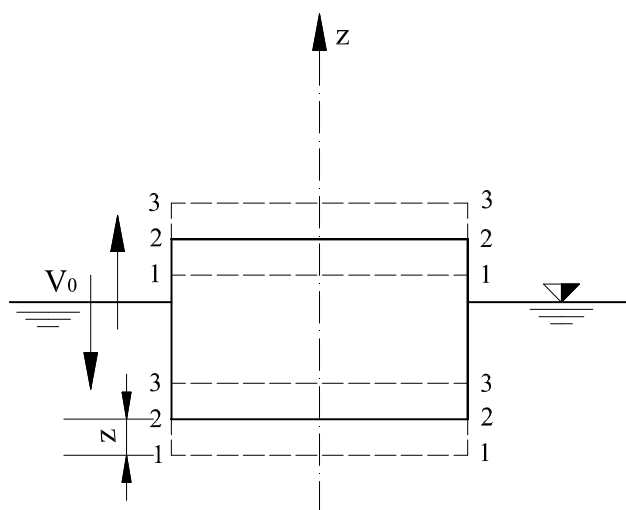


Fig. 4.37. Oscilația plutitorului pe verticală

Dacă plutitorul are secțiunea orizontală constantă de mărime  $A$  și înălțimea carenei suplimentare la un moment dat este  $z$ , ecuația mișcării va fi:

$$\frac{G}{g} \frac{dz^2}{dt^2} = -\gamma A \cdot z \quad (4.90)$$

(masa  $\times$  accelerația = deplasament suplimentar).

Notand  $k = \sqrt{\frac{A\gamma g}{G}}$  se obține:

$$\frac{dz^2}{dt^2} + k^2 z = 0 \quad (4.91)$$

care este ecuația mișcării oscilatorii armonice, cu soluția generală

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (4.92)$$

Constantele rezultă din condițiile de margine aplicate ecuației (momentul zero se ia când plutitorul trece prin poziția de echilibru):

-pentru  $t=0$ ,  $z=0$  și rezultă  $C_1=0$ ;

-pentru  $t=0$ ,  $v = v_0 = \frac{dz}{dt}$ , deci  $\frac{dz}{dt} = C_2 k \cos kt$  și  $C_2 = \frac{V_0}{k}$ ,

respectiv



$$z = \frac{V_0}{k} \sin kt = v_0 \sqrt{\frac{G}{\gamma Ag}} \sin \sqrt{\frac{\gamma Ag}{G}} t$$

Perioada mișcării neamortizate este  $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{\gamma Ag}}$ .

În realitate oscilațiile se amortizează în timp datorită vâscozității lichidului.

**2. Oscilațiile plutitorului în jurul unui ax orizontal.** Aplicarea unei forțe excentrice unui plutitor pe o durată scurtă produce oscilații ale acestuia în jurul unei axe orizontale. Dacă plutitorul se înclină cu unghiul  $\theta$  va apare un cuplu de redresare (fig. 4.38) cu momentul

$$M = -Gh_m \sin \theta \quad (4.95)$$

căruia i se opune momentul forțelor de inerție

$$M_1 = I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (4.96)$$

unde  $I_0$  este momentul de inerție polar al plutitorului față de centrul de greutate ( $I_0 = \int r \cdot dm$ ).

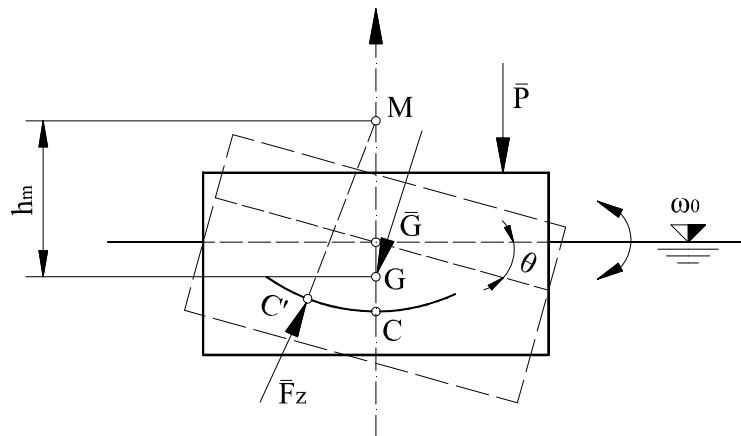


Fig. 4.38. Oscilația plutitorului în jurul axului orizontal

În urma egalării celor două momente se obține:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Gh_m}{I_0}\theta = 0 \quad (4.97)$$

care, cu notația  $k = \sqrt{\frac{Gh_m}{I_0}}$ , devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0 \quad (4.98)$$

identică formal cu (4.91). Soluția generală a ecuației este

$$Q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (4.99)$$

Condițiile de margine definesc constantele de integrare; momentul  $t=0$  se consideră când plutitorul trece în dreptul poziției normale de plutire, cu  $\theta=0$  și  $\omega=\omega_0$ :

- pentru  $t=0$  și  $\theta=0$  rezultă  $C_1=0$ ;
- pentru  $t=0$  și  $d\theta/dt = \omega_0 = C_2 k \cos kt$  rezultă  $C_2 = \omega_0 / k$ .

Ecuația oscilației plutitorului capătă forma:

$$\theta = \omega_0 \sqrt{\frac{I_0}{Gh_m}} \sin \sqrt{\frac{Gh_m}{I_0}} t \quad (4.100)$$

cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Gh_m}} \quad (4.101)$$

Datorită vâscozității lichidului oscilațiile plutitorului se amortizează în timp.

## 4.6. Aplicații

**4.1.** Cricul hidraulic din fig. 4.2. trebuie să dezvolte o forță  $P = 500kN$ . Cunoscând diametrul pistonului mic  $d=1cm$ , a pistonului mare  $D = 10cm$ ,

brațele pârghiei de acționare  $b=5\text{cm}$ ,  $a=0,8\text{m}$  și randamentul cricului  $\eta=0,95$  să se determine forța care trebuie aplicată pârghiei și presiunea din lichid.

**Rezolvare:** Se acceptă legea lui Pascal, deci presiunea din cric este constantă. Pentru a avea forța  $P$  la pistonul mare este nevoie de presiunea  $p$  din lichid  $p = 4P / \pi D^2$  care, la rândul ei dezvoltă forța  $F$  asupra pistonului mic:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} p = P \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

Din ecuația de moment, scrisă pârghiei față de punctul O, rezultă

$$T = \frac{F}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{P}{1 + \frac{a}{b}} \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

Considerând randamentul cricului se obține

$$T = \frac{P}{\eta \left( 1 + \frac{a}{b} \right)} \left( \frac{d}{D} \right)^2 = \frac{500 \cdot 10^3}{0,95 \left( 1 + \frac{0,8}{0,05} \right)} \left( \frac{0,01}{0,1} \right)^2 = 309,6\text{N}$$

**4.2.** Un vas umplut cu apă pe 9/10 din înălțimea sa este prevăzut cu un orificiu la partea superioară (fig. 4.39). Se astupă orificiul și se răstoarnă vasul cu orificiul în jos care se destupă, o parte din lichid scurgându-se din vas. La un moment dat scurgerea încetează. Să se determine înălțimea coloanei de lichid din vas și presiunea la nivelul liber.

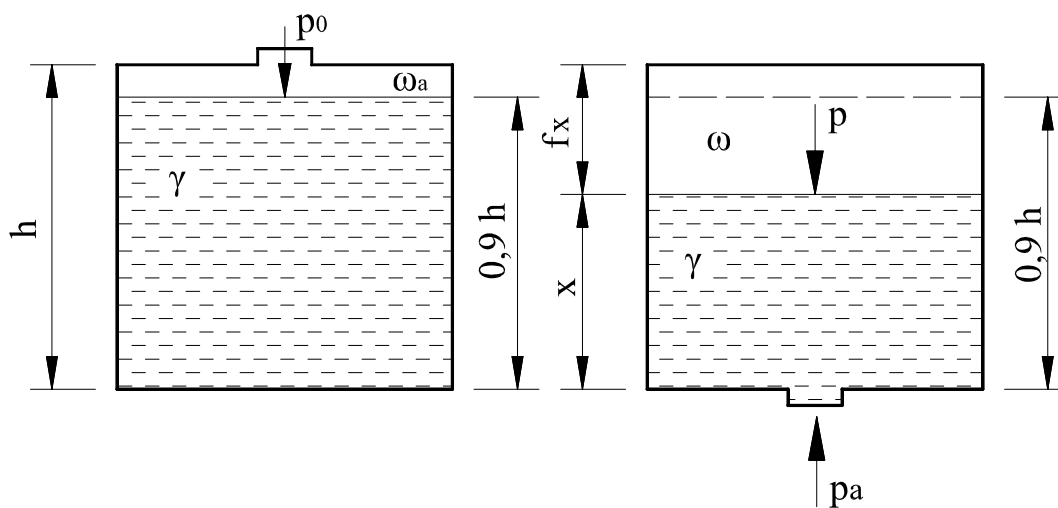


Fig. 4.39. Schemă pentru calculul lui  $p$  și  $x$

**Rezolvare:** Presiunea în gaz din fig. 4.39. b deasupra lichidului este  $p$ , deci  $p_a = p + \gamma x$ . Presupunem o transformare izotermă a gazului din vas,  $p_a w_a = p w$ , în care  $W_a = A \cdot 0,1 \cdot h$  și  $W = A(h - x)$ .

Se observă că  $p = p_a \frac{W_a}{W} = p_a \frac{0,1 \cdot h}{h - x}$  (1) care se înlocuiește în prima relație, obținând o ecuație de gradul doi în  $x$ :

$$x^2 - (h - p_a / \gamma) x + 0,9 h p_a / \gamma = 0$$

Acesta are soluția

$$x_{1,2} = \frac{h + \frac{p_a}{\gamma} \pm \sqrt{h^2 - 1,6 h \frac{p_a}{\gamma} + \left(\frac{p_a}{\gamma}\right)^2}}{2}$$

apoi din (1) rezultă presiunea la suprafața lichidului.

**4.3.** Presiunea apei într-un rezervor se măsoară cu un manometru cu rezervor (fig. 4.40). La cuplarea manometrului la punctul A nivelul mercurului coboară în rezervor și urcă în tub. Să se deducă formula de calcul a presiunii manometrice în punctul A și să se exprime aceasta în coloană apă. Se cunosc  $p_0$ ,  $H_0$ ,  $h$ ,  $D$  și  $d$ .

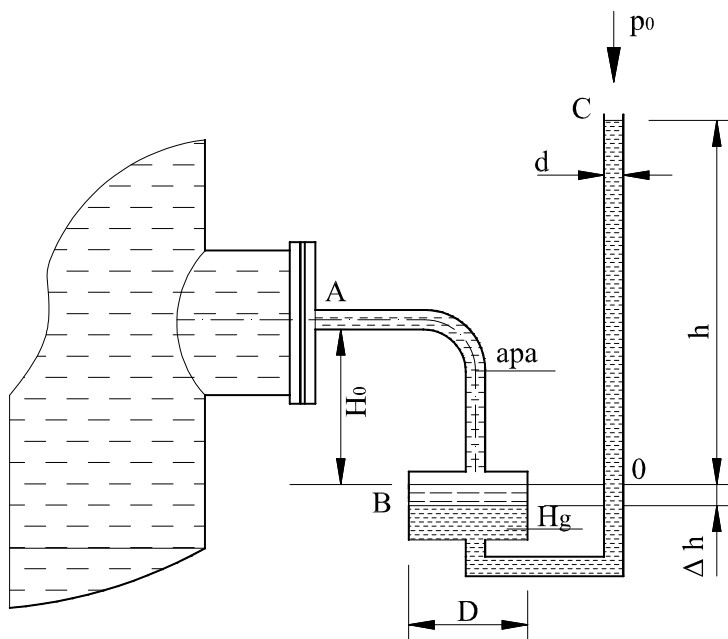


Fig. 4.40. Manometru cu rezervor

**Rezolvare:** Se exprimă presiunea în punctul A scriind ecuațiile hidrostaticii lichidului din manometru:  $p_A = p_0 + \gamma_{Hg}(h + \Delta h) - \gamma_a(H_0 - \Delta h)$ .

Înălțimea  $\Delta h$  se exprimă pe baza egalității volumelor  $\frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi D^2}{4} \Delta h$  sau  $\Delta h = (d/D)^2 h$ .

Presiunea  $p_A$  în presiuni manometrice ( $p_0=0$ ) devine:

$$p_{Am} = \gamma_{Hg} h \left( 1 + \frac{d^2}{D^2} \right) - \gamma_a \left( H_0 - h \frac{d^2}{D^2} \right),$$

respectiv exprimat în înălțime coloană apă

$$h_A = \frac{p_{Am}}{\gamma_a} = \left[ \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_a} \left( 1 + \frac{d^2}{D^2} \right) - \frac{d^2}{D^2} \right] h - H_0$$

**4.4.** Conform unora din ipotezele cosmogonice planeta noastră s-a format prin rotirea unei mase fluide în jurul unei axe proprii (axa polilor); asupra masei exercitându-se forțe centrale de atracție-gravitațională (fig. 4.41). Să se determine forma de echilibru relativ al Pământului (prin răcire substanța lichidă s-a separat de atmosferă).

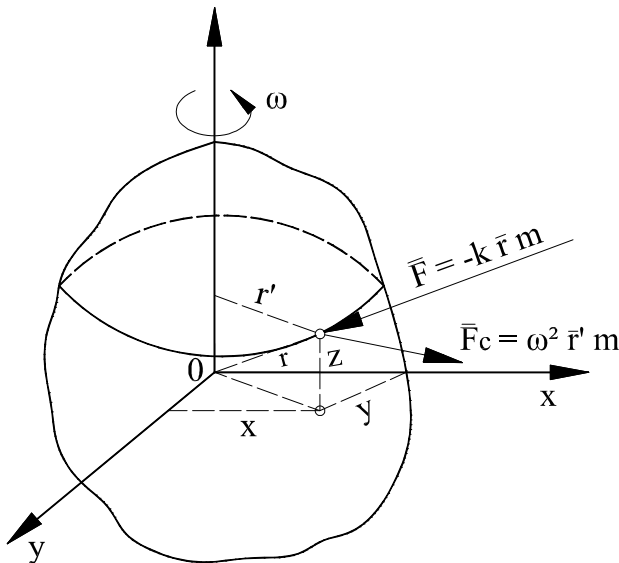


Fig. 4.41. Echilibrul relativ al Pământului în formare

**Rezolvare:** Axa de rotație este  $OZ$ , iar planul  $XOY$  este planul ecuatorului. O particulă de coordonate  $(XYZ)$  este acționată de forța gravitațională (pentru masa

unitară)  $\bar{F} = -k \cdot \bar{r}$  și forța centrifugală (tot pentru masă unitară)  $\bar{F}_c = \omega^2 \bar{r}'$ .

Proiecțiile forțelor specifice după cele trei axe de coordonate sunt:

$$\begin{cases} F_x = -kx + \omega^2 x \\ F_y = -ky + \omega^2 y \\ F_z = -kz \end{cases}$$

Suprafața liberă-equipotențială, izobară (de separație a două fluide) - este

$$(k - \omega^2) \cdot x \cdot dx + (k - \omega^2) \cdot y \cdot dy + k \cdot z \cdot dz = 0$$

care prin integrare devine

$$\frac{k - \omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{k}{2} z^2 = c,$$

ceea ce reprezintă un elipsoid de revoluție-geoid.

**4.5.** Un stăvilor clapetă cu contragreutate (fig. 4.42) reține apa pe un canal de secțiune dreptunghiulară. Să se determine mărimea contragreutății  $P$ , dacă la nivelul  $H$  stăvilarul trebuie să se deschidă. Se cunosc  $B$ ;  $\alpha$ ;  $G$ ;  $a$ ;  $b$  și  $\gamma$ . În punctele  $A$  și  $D$  sunt articulații fixe, iar în  $B$  și  $C$  mobile. Se neglijează frecările.

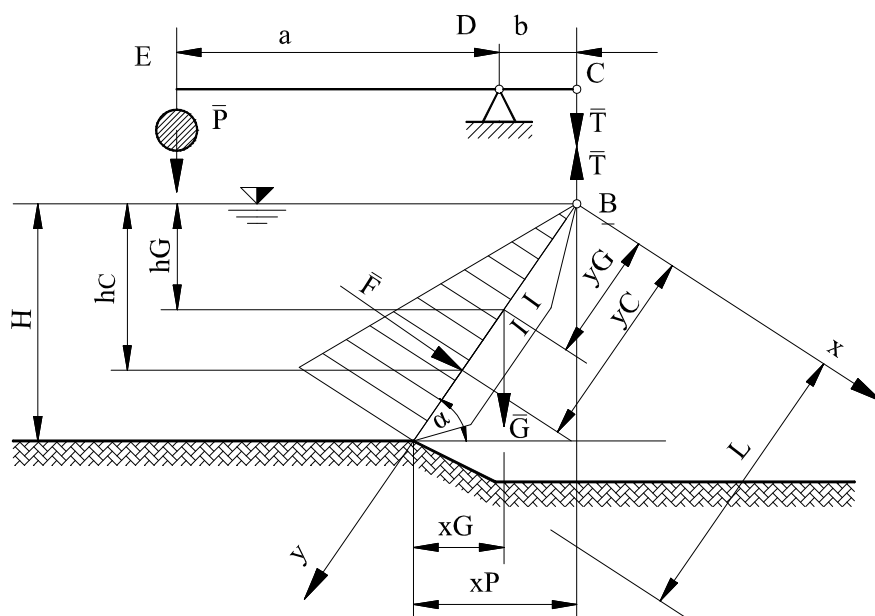


Fig. 4.42. Stăvilor clapetă

**Rezolvare:** Condiția de echilibru pentru limita de adâncime  $H$  este  $M(A)=0$ .

$$F \frac{H - h_c}{\sin \alpha} + G \cdot x_G + T \cdot x_T = 0,$$

iar a pârgheii  $M(D)=0$

$$P \cdot a - T \cdot b = 0$$

deci

$$P = \frac{b}{x_T \cdot a} \left( F \frac{H - h_c}{\sin \alpha} + G \cdot x_G \right)$$

Mărimile din ecuație sunt:

$$F = \frac{\gamma H^2 B}{2}; x_G = \frac{H}{2 \tan \alpha}; x_T = \frac{H}{\tan \alpha}; h_c = \frac{2}{3} H$$

După înlocuirile necesare se obține

$$P = \frac{b \cdot \tan \alpha}{a \cdot H} \left( \frac{\gamma H^3 B}{6 \sin^2 \alpha} + G \frac{H}{2 \tan \alpha} \right)$$

**4.6.** Să se determine grosimea "e" a peretelui unui rezervor cilindric și a altuia sferic știind diametrul  $D$  și efortul unitar admis în perete  $\sigma_a$  (fig. 4.43). Asupra lor acționează gaz cu presiunea  $p$ .

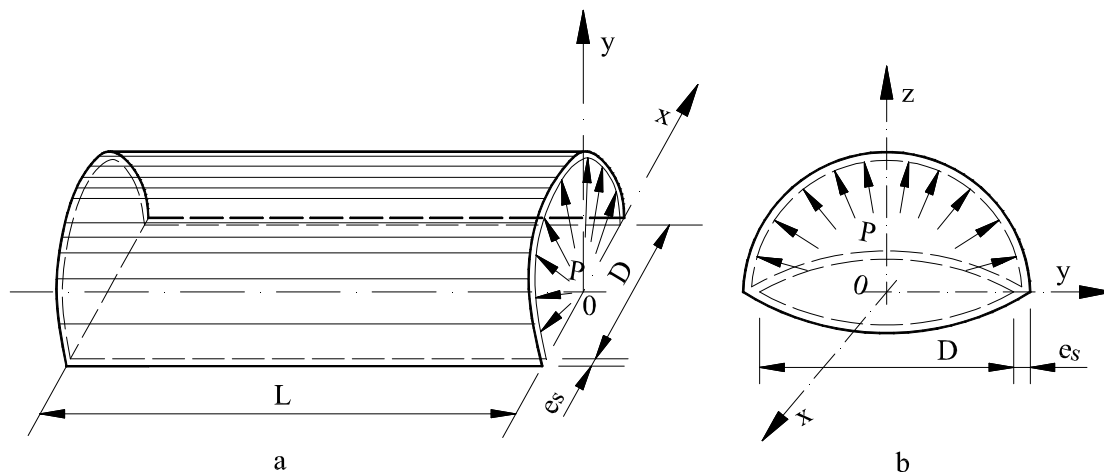


Fig. 4.43. Determinarea grosimii pereților curbi ai rezervoarelor

**Rezolvare:** Rezervoarele conținând gaz sunt supuse la presiune internă constantă. Se secționează imaginar rezervoarele cu un plan meridional, influența jumătăților îndepărtate fiind înlocuite de forțe.

a. În cazul cilindrului rezultă  $A_{xoz} = D \cdot L$  și  $A_{zox} = A_{zoy}$  și avem forțele

$$F_{py} = p \cdot D \cdot L; F_{px} = F_{pz} = 0$$

Forța  $F_{py}$  este preluată de forța dezvoltată la eforturile de tensiune din perete  $2\sigma_a e_c L$ , deci

$$p \cdot D \cdot L = 2 \cdot \sigma \cdot e_c \cdot L \text{ sau } e_c = \frac{pD}{2\sigma} \text{ (formula cazanelor cilindrice)}$$

b. În cazul sferei rezultă

$$F_{pz} = \frac{\pi D^2 p}{4};$$

$$F_{px} = F_{py} = 0$$

forță ce este preluată de eforturile de tensiune dezvoltate în perete  $\pi \cdot D \cdot e_s \cdot \sigma_a$

deci  $\frac{\pi D^2}{4} p = \pi \cdot D \cdot e_s \cdot \sigma_a$  sau  $e_s = \frac{pD}{4\sigma_a}$  (formula cazanelor sferice).

**4.7.** Să se determine forța hidrostatică exercitată asupra suprafeței semisferei din fig. 4.44.

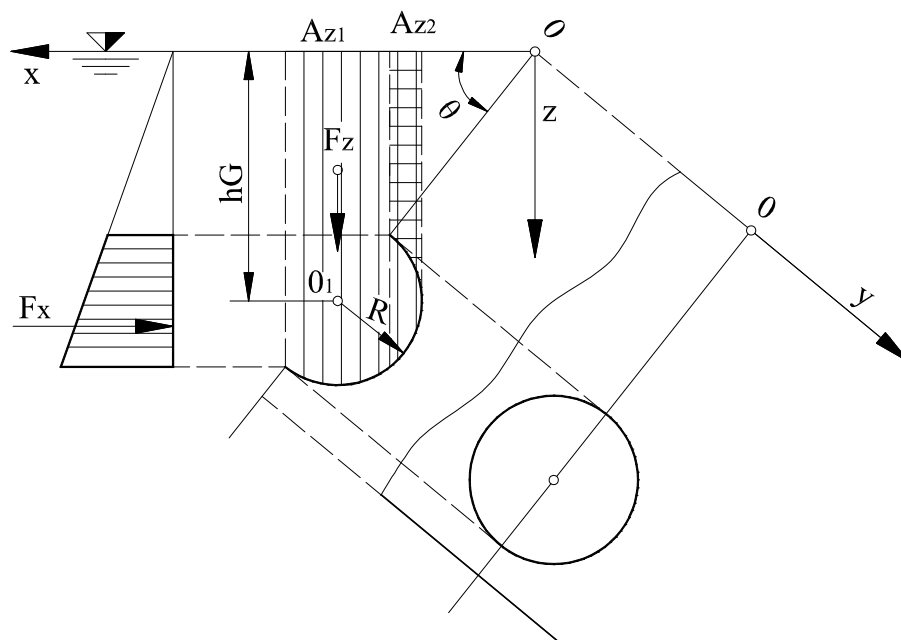


Fig. 4.44. Semisfeară în lichid greu



**Rezolvare:** Componenta orizontală a forței hidrostatice este  $F_x = \gamma h_G A_x = \gamma h_G \pi R^2 \sin \theta$ . Pentru componenta verticală se stabilește corpul de presiune, descompunându-i suprafața în suprafețe simple. Cele două corpuri de presiune (hașurate vertical orizontal) dau forțe de semn contrar, deci se scad. Corpul de presiune este volumi hașurat numai pe verticală, reprezentând:

$$F_z = \gamma W = \gamma \left[ (\pi R^2 \cos \theta) h_G + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \right] = \pi \gamma R^2 \left( \frac{2}{3} R + h_G \cos \theta \right)$$

Rezultanta forței hidrostatice trece prin  $O_1$ .

**4.8.** Să se dimensioneze areometrul din fig. 4.45 pentru a măsura în ecartul de densități  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  când toleranța relativă este  $\delta_\rho$ , iar eroarea absolută maximă de măsurare a cufundării  $\Delta h$ . Se va determina și mărimea unei diviziuni pe scala densimetrului. Se mai cunosc  $D$  și  $L$ .

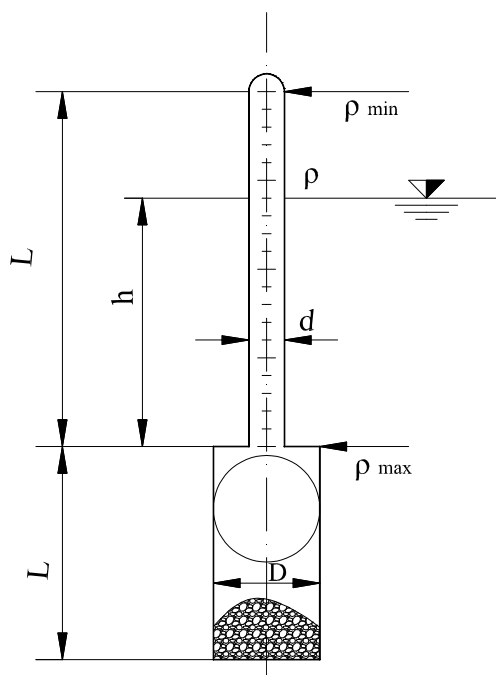


Fig. 4.45. Dimensionarea densimetrului

**Rezolvare:** Conform legii lui Arhimede greutatea lichidului dezlucuit este

$$G = mg = \rho g \frac{\pi}{4} (D^2 L + d^2 h)$$

sau

$$\rho = \frac{4m}{\pi (D^2 L + d^2 h)}$$

ceea ce arată o dependență hiperbolică între densitate și scufundare. Imersia  $h$  este variabilă, necunoscute fiind  $m$ ,  $d$  (constante) și  $h=l$  pentru ecartul de densități impus.

Relația anterioară se particularizează pentru  $\rho_{\min}$  și  $\rho_{\max}$ .

$$\rho_{\max} = \frac{4m}{\pi D^2 L}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{4m}{\pi (D^2 L + d^2 l)}$$

din care se obține  $m = \frac{\rho_{\max} \pi D^2 L}{4}$  și  $l$ , la care se adaugă o a treia ecuație din teoria erorii măsurărilor indirecte:

$$\partial \rho = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d \left[ \frac{4m}{\pi (D^2 L + d^2 h)} \right]}{\frac{4m}{\pi (D^2 L + d^2 h)}} = - \frac{dh}{\left( \frac{D}{d} \right)^2 L + h}$$

Eroarea relativă a densității este maximă pentru  $h=0$  și este egală cu toleranța, obținându-se

$$d = \sqrt{-\frac{\delta \rho D^2 L}{dh}}$$

Cantitatea de sub radical totdeauna este pozitivă ( $D>0$ ;  $L>0$ ) fiindcă  $dh<0$  corespunde  $\delta \rho > 0$  și invers.

Având  $d$  și  $m$  din ecuația densității minime rezultă

$$l = \frac{4m - \rho_{\min} \pi D^2 L}{\rho_{\min} \pi d^2}$$

Între  $\rho_{\min}$  și  $\rho_{\max}$  cu pasul  $\Delta \rho$  sunt necesare

$$n = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\Delta \rho}$$

diviziuni, deci o diviziune are mărimea

$$l_{div} = \frac{l}{n}$$

**4.9.** Se consideră o prismă dreaptă de secțiune pătrată cu latura  $b$ , lungimea  $L$ , omogenă și de densitate  $\rho_1$ . Să se studieze stabilitatea echilibrului

prismului când aceasta plutește la suprafața unui lichid de densitate  $\rho > \rho_1$ , iar muchiile sale laterale sunt orizontale (fig. 4.46).

**Rezolvare:** Există două poziții de repaus, adică două poziții în care centrul de greutate  $G$  și centrul carenei sunt pe aceeași verticală. La ambele  $G$  este deasupra lui  $C$ , deci echilibrul este stabil numai dacă  $h_m > 0$ .

a. În primul caz (fig. 4.46.a)

$$I_{\min} = \frac{Lb^3}{12}; W = bhL; e = \frac{b-h}{2}; \rho g L b^2 = \rho g h b L = \rho g W$$

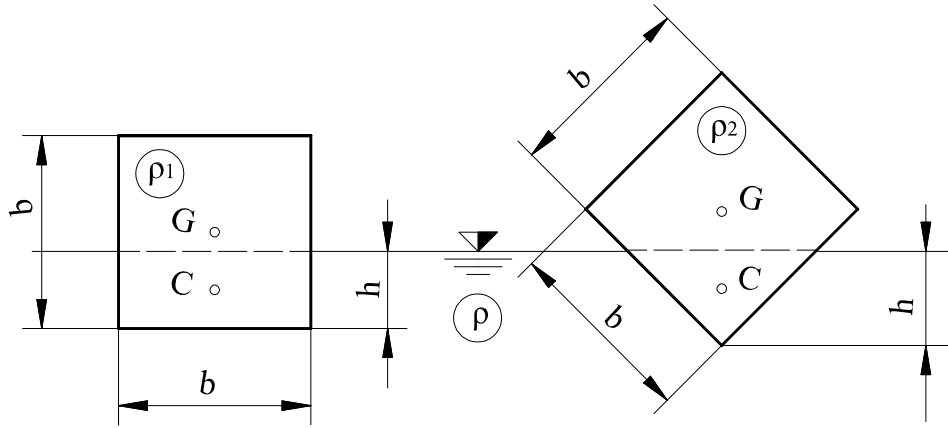


Fig. 4.46. Schema plutirii prismului

Notând  $\frac{\rho_1}{\rho} = \alpha$ , rezultă și condiția de stabilitate devine

$$h_m = \frac{b}{12\alpha} (6\alpha^2 - 6\alpha + 1) > 0$$

Condiția este satisfăcută în afara rădăcinilor ecuației  $(6\alpha^2 - 6\alpha + 1) = 0$  ( $\alpha_1 = 0,212$  și  $\alpha_2 = 0,788$ ), deci pentru  $\alpha < 0,212$  și  $\alpha > 0,788$ .

b. În al doilea caz (fig. 4.46.b) se disting două situații după cum una sau trei muchii sunt imersate.

b.1. La imersia unei laturi

$$I_{\min} = \frac{L(2h)^3}{12}; W = Lh^2; e = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = \frac{2}{3}h$$

Din condiția plutirii

$$\rho_1 g b^2 L = \rho g h^2 L, \text{ deci } h^2 = \alpha b^2$$

și

$$h_m = b \left( \frac{4}{3} \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0$$

Această condiție este satisfăcută pentru  $\alpha > 0,281$  și are loc până  $\alpha < 0,5$  când, la limită, trei laturi ajung în imersie.

b.2. La imersia a trei laturi, notând înălțimea corpului necufundat cu  $h'$ , rezultă:

$$I_{\min} = \frac{L(2h')^2}{12}; W = (b^2 - h'^2)L; h_G = \frac{\sqrt{2}}{2}b;$$

$$h_C = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}b^3 - (\sqrt{2}b - \frac{2}{3}h')h'^2}{b^2 - h'^2}$$

$$e = h_G - h_C$$

Totodată

$$\rho_1 g b^2 L = \rho g (b^2 - h'^2) L = \rho g W$$

de unde

$$h'^2 = b^2 (1 - \alpha) \text{ și } W = \alpha b^2 L$$

Distanța metacentrică pentru plutire stabilă satisface condiția

$$h_m = b \frac{8/3(1-\alpha)^{1.5} - \sqrt{2}(1-\alpha)}{2\alpha} > 0$$

care este valabilă pentru  $\alpha = 0,719$ .

În concluzie, plutirea prisme drepte are loc ca în fig. 4.47.

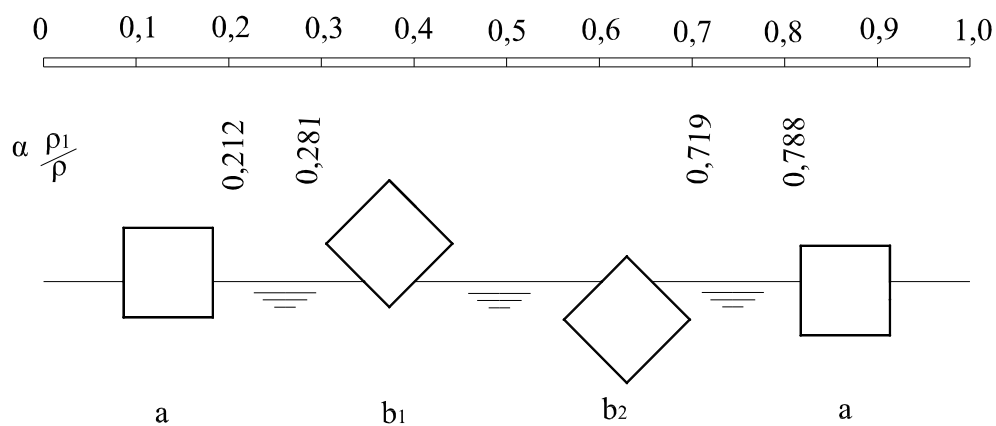


Fig. 4.47. Condițiile de plutire a unui corp de forma prisme drepte

Pentru intervalul raportului de densități  $\alpha \in (0,212; 0,281) \cup (0,719; 0,788)$  plutirea este instabilă.

## CAPITOLUL 5

### HIDROKINEMATICA (KINEMATICA FLUIDELOR)

Kinematica fluidelor studiază mișcarea acestora fără să țină seama de forțele care determină mișcarea și de transformările energetice produse. Fiind luate în considerare numai proprietățile geometrice ale mișcării fluidelor kinematica este valabilă tuturor modelelor de fluid.

Kinematica se bazează pe ipoteza continuității, deci parametrii hidraulici sunt funcții continue și derivabile în raport cu coordonatele punctului și cu  **timpul**. În aceste ipoteze mișcarea unei particule fluide se poate studia ca pentru mișcarea unui punct material din mecanica generală.

#### 5.1. Sisteme de reprezentare în hidrokinematică

Studiul cinematic al mișcării fluidelor constă în determinarea traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor particulelor de fluid, ceea ce se poate realiza în două moduri diferite, în funcție de sistemul de variabile independente sau de parametrii care se adoptă.

##### 5.1.1. Sistemul Lagrange

În sistemul Lagrange se studiază mișcarea fiecărei particule pe traiectoria ei, raportată la un sistem de axe fix  $OXYZ$ . În acest sistem variabilele (viteză, presiune, densitate, temperatură, ...) sunt prin definiție atașate particulei fluide și timpul se scurge.

Se consideră un referențial fix în care o particulă fluidă  $M$ , la momentul inițial  $t = t_0$ , se găsea în punctul de coordonate  $(x_0, y_0, z_0)$  și se mișcă pe traiectoria ei (fig. 5.1).

În momentul  $t$  particula este în punctul  $M(x_0, y_0, z_0, t)$ , definită prin  $\vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$ .

Mărimile  $(x_0, y_0, z_0)$  sunt constante inițiale (parametrii de poziție ai particulei la momentul  $t = t_0$ ). Orice mărime este o funcție de poziția inițială a particulei și de timp. Se constată că în sistemul Lagrange variabila independentă este timpul, celelalte mărimi fiind dependente de aceasta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r} = \bar{r}(x_0, y_0, z_0, t) \\ \bar{V} = \bar{V}(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{d\bar{r}(x_0, y_0, z_0, t)}{dt} \\ \bar{a} = \bar{a}(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{d^2\bar{r}(x_0, y_0, z_0, t)}{dt^2} \\ \bar{p} = \bar{p}(x_0, y_0, z_0, t) \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}(x_0, y_0, z_0, t) \\ T = T(x_0, y_0, z_0, t) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Se utilizează notația "d" fiindcă odată precizată poziția punctului inițial toate elementele depind numai de timp (traectoria este unic determinată în timp).

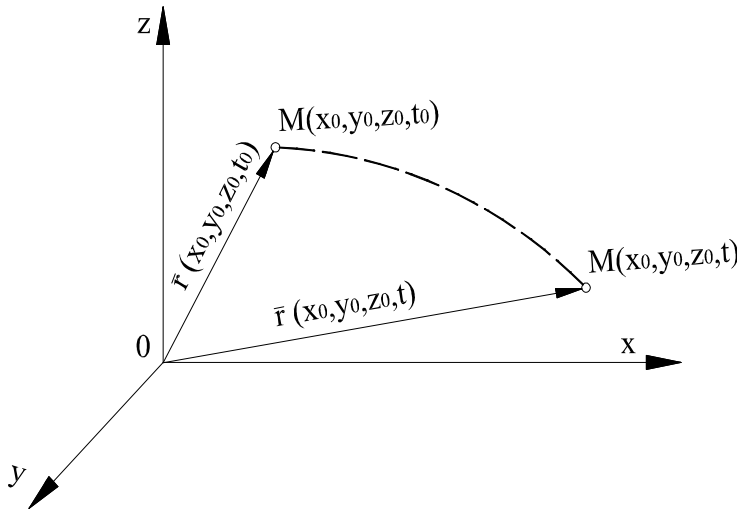


Fig. 5.1. Reprezentarea mișcării particulei în sistemul Lagrange

Sistemul Lagrange poate fi comparat cu un film animat. Mărimile  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt coordonatele particulei, numite și coordonate **substanțiale**, de aceea  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$  reprezintă proiecțiile drumului elementar, iar  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$  și  $dz/dt = w$  sunt proiecțiile vitezei particulei  $\bar{V}(u, v, w)$  în momentul observației.

Pentru masa de fluid cu  $n$  particule este necesar a se scrie un număr  $n$  de sisteme de ecuații de tipul (5.1). Din acest considerent sistemul Lagrange se utilizează numai în cazurile când se studiază mișcarea unor particule de fluid individualizate.

### 5.1.2. Sistemul Euler

În sistemul Euler se studiază elementele mișcării particulelor care trec, în momentele  $t_1, t_2, \dots$  în punctul  $M$  fix al spațiului definit, în referențialul dat, prin coordonatele  $x, y$  și  $z$ . În acest sistem timpul este considerat înghețat, deci situația din referențial este caracteristică momentului  $t_i$ . Având situația mișcării la diferite momente succesive, se poate determina mișcarea.

În sistemul Euler variabile independente sunt coordonatele punctului studiat, fix în referențial, și timpul. Vectorul de poziție al punctului studiat este o variabilă dependentă (fig. 5.2):

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z) \quad (5.2)$$

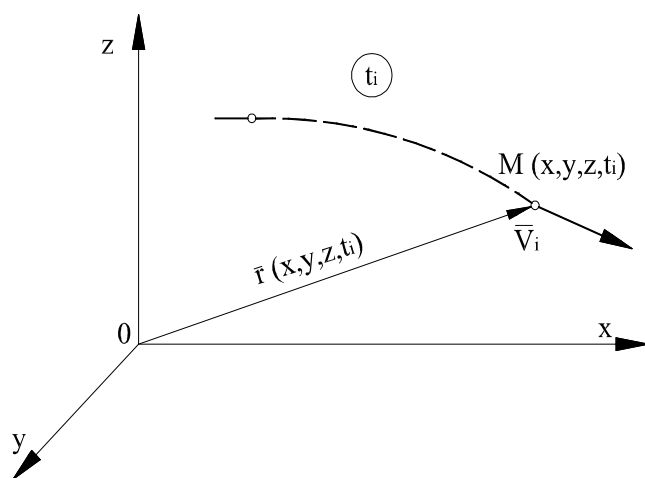


Fig. 5.2. Sistemul de referință Euler

Tot variabile dependente sunt viteza, accelerația, presiunea, densitatea, temperatura. Trebuie menționat că,  $d\bar{r}/dt$  este viteza particulei (substanței) în punct numai dacă  $d\bar{r}$  este drumul elementar al particulei. Deplasarea particulei o notăm convențional cu  $\overrightarrow{D_r}$ .

$$D\bar{r} = Dx\bar{i} + Dy\bar{j} + Dz\bar{k} \quad (5.3)$$

Notăția "D" se referă la deplasarea particulei și  $D\bar{r}$  se numește diferențială substanțială (fig. 5.3).



Cunoscând viteza  $\bar{V}(\bar{r}, t)$ , accelerația particulei în acel punct se află prin derivarea totală a vitezei.

Diferențiala vitezei este:

$$d\bar{V}(x, y, z, t) = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} dz \quad (5.4)$$

unde:  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$  este diferența direcțională a vitezei în punct și  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} dz$  este diferențiala direcțională a vitezei în punct și exprimă (pentru  $t = \text{const}$ ) variația vitezei în jurul punctului după un drum oarecare, care poate fi și diferit de cel al particulei și pentru distincție se notează cu  $\delta \bar{V}$ . În expresia diferențialei vitezei se consideră un drum pe traiectoria particule obținându-se diferențiala substanțială, notată cu  $D\bar{V}$ .

$$D\bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dt + \delta \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} Dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} Dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} Dz \quad (5.5)$$

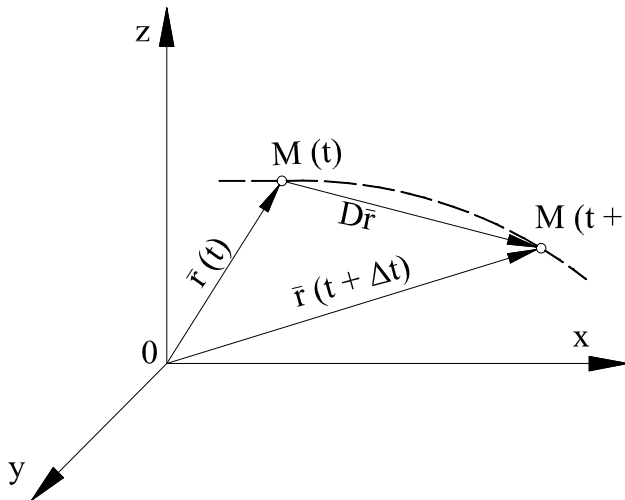


Fig. 5.3. Definirea diferențialei substanțiale.

În expresia anterioară  $Dx$ ,  $Dy$  și  $Dz$  sunt componentele drumului elementar al particulei.

Prin împărțirea diferențialei substanțiale a vitezei la  $dt$  se ajunge la accelerația

$$\bar{a}(x, y, z, t) = \frac{D\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{Dx}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \frac{Dy}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \frac{Dz}{dt} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \quad (5.6)$$

sau

$$\bar{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \quad (5.7)$$

în care  $(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}$  este accelerația convectivă spațială, iar  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$  accelerația locală.

Proiectând ecuația (5.6) după axele de coordonate avem:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5.8)$$

$u$ ,  $v$  și  $w$  fiind componentele vitezei după axele de coordonate.

Și variația altor parametri se poate exprima asemănător vitezei, astfel:

$$\frac{Dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) p \quad (5.9)$$

unde

$$\frac{\partial \dots}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \dots \quad (5.10)$$

este un operator diferențial aplicabil mărimilor scalare sau vectoriale.

Se poate concluziona că în sistemul Euler variabile independente sunt  $x$ ,  $y$ ,  $z$ : și  $t$ , iar variabilele dependente  $\bar{V}(\bar{r}, t)$ ,  $\bar{a}(\bar{r}, t)$ ,  $\bar{p}(\bar{r}, t)$ ,  $\rho(\bar{r}, t)$ ,  $T(\bar{r}, t)$ . De fapt sistemul Euler poate fi comparat cu o succesiune de dispozitive. Ca aparataj matematic sistemul Euler utilizează teoria câmpurilor.

### 5.1.3. Legătura între sisteme de reprezentare

După cum am arătat sistemul Lagrange poate fi comparat cu un film animat, iar sistemul Euler cu o succesiune de diapozitive. Dacă secvența de film durează un timp infinitezimal, atunci și deplasarea particulei este infinitezimală, și se poate scrie legătura între cele două sisteme de reprezentare:

$$D\bar{r} = \bar{V}_E \cdot dt = \bar{V}_L \cdot dt \quad (5.11)$$

care trebuie să respecte condiția ca în ambele sisteme să avem de a face cu aceeași particulă în același moment.

În majoritatea problemelor de hidraulică se utilizează sistemul de reprezentare Euler.

## 5.2. Elementele cinematice caracteristice mișcării fluidelor

În studiul mișcării fluidelor intervin mai multe noțiuni de cinematică care se definesc mai jos.

### 5.2.1. Câmpul vitezelor

Mulțimea vectorilor viteză ai particulelor în mișcare la un moment dat e câmpul vitezelor. Este definit prin  $\bar{V}(\bar{r}, t)$ ; oferă o imagine sugestivă a mișcării fluidului și pe baza ei se determină alte câmpuri care descriu mișcarea fluidului.

1. **Linia de curent ( $C_{lc}$ )** este o linie de câmp a câmpului vitezelor, adică este o curbă tangentă în fiecare punct al ei la vectorul viteză din acel punct la moment dat (fig. 5.4).

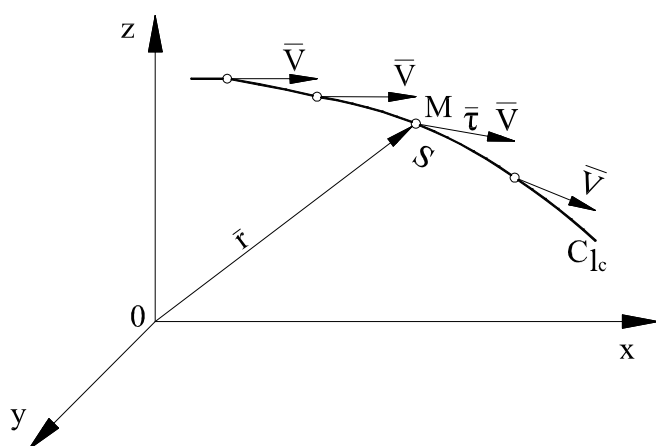


Fig. 5.4. Linia de curent

Ecuția unei curbe  $C_{lc}$  este  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ , unde  $s$  este lungimea arcului de curbă.

Versorul tangentei la curbă în punctul M este  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ .

Pentru ca C să fie linie de curent trebuie ca vectorul viteză  $\bar{V}(\bar{r}, t)$  să fie tangent la C în M, deci  $\bar{V}(\bar{r}, t) = V(\bar{r}, t) \bar{\tau}$  care se mai poate scrie:

$$\bar{V}(\bar{r}, t) d\bar{r} = 0 \quad (5.12)$$

sau

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (5.12')$$

unde:  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sunt versorii axelor de coordonate;  $u, v$  și  $w$  - componentele vitezei după axele de coordonate  $\bar{V}(u, v, w)$  iar  $dx, dy$  și  $dz$  proiecțiile lui  $d\bar{r}(dx, dy, dz)$ . Sub formă scalară (5.12') devine:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (5.13)$$

În (5.13),  $t$  trebuie considerat ca parametru, ex:  $u(x, y, z, t)$ .

Liniile de curent au două proprietăți importante:

a. prin fiecare punct dintr-un lichid în mișcare trece o linie de curent (dacă într-un punct nu trece linie de curent înseamnă că în acel punct nu este materie ceea ce contravine ipotezei de continuitate) și

b. printr-un punct în interiorul unui lichid în mișcare trece cel mult o linie de curent. Dacă ar trece mai multe în acel punct viteza ar trebui să fie tangentă la mai multe curbe (linii de curent), deci să aibă direcții diferite la un moment dat, ceea ce contravine enunțului de mai sus. Excepție fac punctele singulare ale domeniului mișcării unde viteza este nulă sau infinită.

2. **Traectoria** este drumul parcurs (curba  $C_t$ ) de centrul de masă al particulei fluide în mișcare (fig. 5.5).

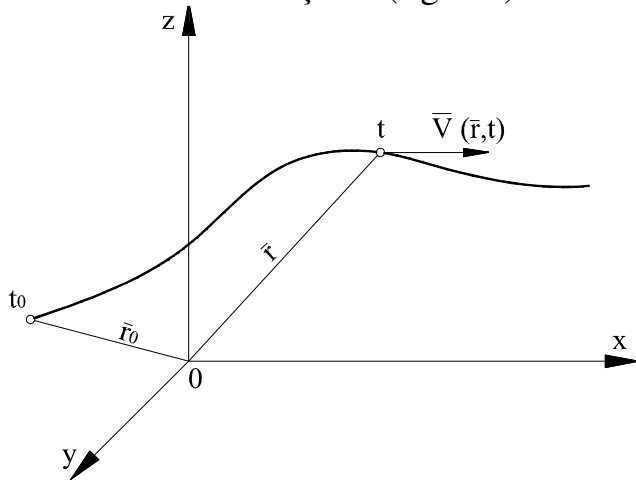


Fig. 5.5. Traectoria particulei fluide

Ecuția traiectoriei, când este cunoscut câmpul vitezelor, este

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}(\bar{r}, t) \quad (5.14)$$

sau

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt \quad (5.15)$$

3. **Linia de emisie (trasoare)  $C_{le}$**  ce trece prin punctul  $M(\bar{r})$  este locul geometric al punctelor în momentul  $t$ , cu care coincid centrele de masă particulelor de fluid care au trecut prin punctul  $M(\bar{r})$  până în momentul  $t$  inclusiv (fig. 5.6).

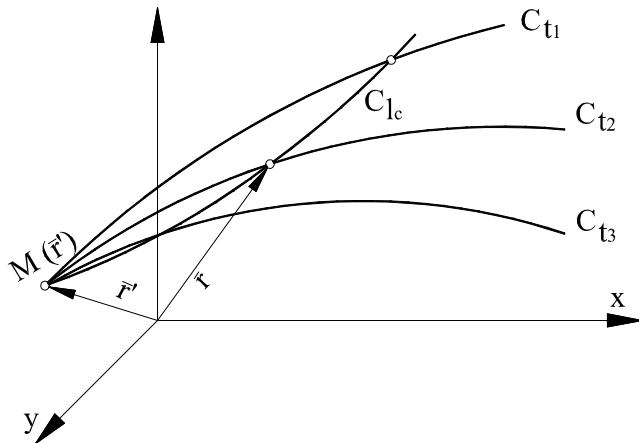


Fig. 5.6. Linia de emisie

Pentru deducerea liniilor de emisie ( $C_{le}$ ) se consideră ecuația traiectoriei ( $C_t$ ) a unui element de fluid oarecare:

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{r}_0, t) \quad (5.16)$$

Dacă elementul de fluid trece prin  $M(\bar{r}')$  în momentul  $t'$ , atunci din (5.16) se obține:  $\bar{r}' = \bar{r}'(\bar{r}_0, t')$  deci  $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(\bar{r}', t')$ . Reintroducând ultima expresie în (5.16) rezultă:

$$\bar{r} = \bar{r}[\bar{r}_0(\bar{r}', t'), t] \quad (5.17)$$

Având  $\bar{r}_0 = x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j} + z_0 \bar{k}$  și  $\bar{r}' = x' \bar{i} + y' \bar{j} + z' \bar{k}$ , ecuațiile scalare ale liniei de emisie devin:

$$\begin{cases} x = x[x_0(x', y', z', t'), y_0(x', y', z', t'), z_0(x', y', z', t')] \\ y = y[x_0(x', y', z', t'), y_0(x', y', z', t'), z_0(x', y', z', t')] \\ z = z[x_0(x', y', z', t'), y_0(x', y', z', t'), z_0(x', y', z', t')] \end{cases} \quad (5.18)$$

În cazul particular al unei mișcări permanente toate particulele de fluid care trec prin punctul  $M(\bar{r})$  descriu aceeași traiectorie  $C_b$ , deci linia de curent, traiectoria și linia de emisie coincid.

Vizualizarea liniei de curent se face prin fotografierea instantanee a unor particule în suspensie, traiectoriile lor scurte putând fi asimilate cu vectorii viteză. Fotografierea cu timp de expunere lung materializează traiectoriile. Fotografierea instantanee a particulelor care se introduc în fluidul în mișcare într-un punct fix pe o durată mai lungă materializează linia de emisie.

**4. Tubul de curent** este suprafața tubulară formată din linii de curent care trec, la un moment dat, prin toate punctele unei curbe închise, simple (fig. 5.7).

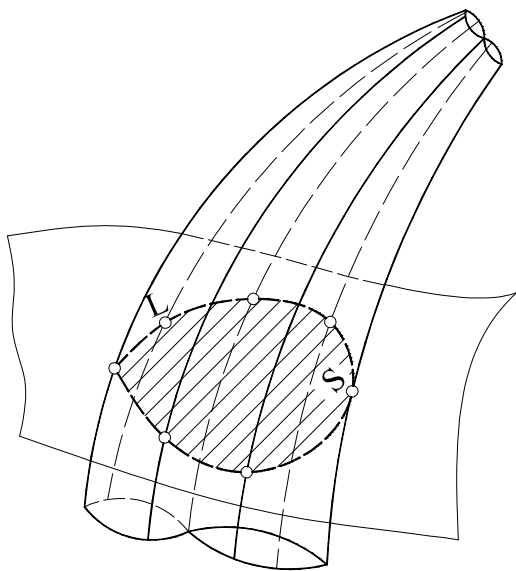


Fig. 5.7. Tubul de curent și secțiunea sa transversală

Este deci o suprafață de câmp a vitezelor. Ținând seama de proprietățile liniilor de curent rezultă că fluidul nu traversează suprafața de curent și se mișcă în interiorul tubului formând **curentul de fluid**. În mișcarea permanentă forma tubului se menține în timp, pe când în mișcarea nepermanentă variază. Se numește secțiune transversală a unui tub de curent porțiunea  $S$ , din interiorul tubului de curent, a unei suprafețe ce intersectează tubul. O secțiune transversală  $A$  este **ortogonală** (normală, vie) dacă este perpendiculară pe toate liniile de curent ce o traversează. Dacă liniile de curent sunt drepte paralele, atunci secțiunea vie este plană. Numim **tub de curent** elementar tubul a cărei secțiune este așa de mică încât putem admite parametrii hidraulici (viteze, presiuni) constanți pe ea. **Fîrul** de curent este curentul de fluid din tubul elementar.

**Perimetrul udat** (sau muiat) -  $P$ , este lungimea conturului unei secțiuni vii, mărginită de pereți solizi.

**Raza hidraulică** este raportul între secțiunea  $A$  și perimetrul udat  $P$ :

$$R = A / P \quad (5.19)$$

**5. Fluxul.** Fie  $\Psi_0$  proprietate extensivă a fluidului (o proprietate a cărei valoare depinde de masa porțiunii de fluid considerate),  $\psi(\bar{r}, \bar{t})$  câmpul care reprezintă proprietatea specifică menționată (referitoare la unitatea de masă

$\psi - \frac{d\psi}{dm}$ ,  $\bar{V}(\bar{r}, \bar{t})$  - câmpul vitezelor,  $\rho(\bar{r}, t)$  câmpul densității,  $A$  - o suprafață orientată fixă,  $\bar{n}$  - versorul normalei la  $A$ . Cantitatea  $Q\Psi$  din proprietatea  $\Psi$  care traversează suprafața  $A$  în unitatea de timp se numește fluxul sau debitul proprietății  $\Psi$  prin  $A$ .

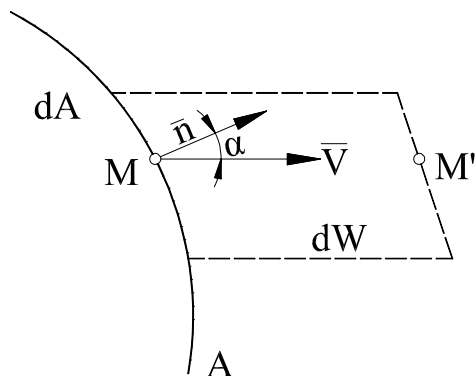


Fig. 5.8. Definirea fluxului (debitului)

Fiind în cadrul cinematicii proprietatea extensivă a fluidului este volumul său.

Dacă se cunoaște distribuția vitezelor în spațiul ocupat de fluid, debitul se poate calcula descompunând suprafața  $A$  în suprafețe elementare. Suprafața  $dA$  se ia suficient de mică pentru a se putea admite pe aceasta viteză constantă atât ca mărime cât și direcție. Debitul volumic elementar este

$$dQ = (\bar{v}, \bar{n}) dA = v \cos \alpha dA = V_n dA \quad (5.20)$$

iar debitul total

$$Q = \int dQ = \int_A V_n dA = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (5.21)$$

Dacă este definit  $\bar{V}(u, v, w)$  și proiecțiile lui  $dA$  pe planurile de referință sunt  $dA_x, dA_y, dA_z$  debitul volumic se definește prin:

$$Q = \int (u dA_x + v dA_y + w dA_z) \quad (5.22)$$

Deși se depășește cadrul cinematicii, se definește debitul masic

$$Q_p = Q \cdot \rho \quad (5.23)$$



și debit de greutate

$$Q_\gamma = Q \cdot \gamma = Q \cdot \rho \cdot g \quad (5.24)$$

considerând proprietatea extensivă a fluidului masa,  $\Psi=M$ , respectiv greutatea  $\Psi= G$ .

6. **Viteza medie** este raportul dintre debitul volumic și secțiune (fig. 5.9).

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{A} \int_A V_n dA \quad (5.25)$$

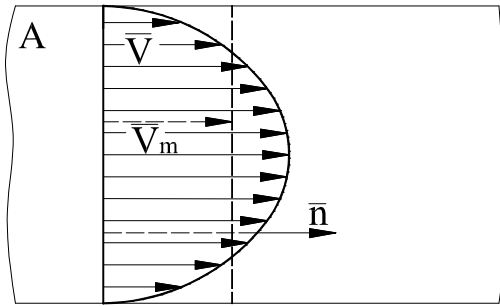


Fig. 5.9. Definirea vitezei medii

7. **Circulația vitezei.** Într-un fluid în mișcare integrala produsului  $\vec{V} \cdot d\vec{r}$  în jurul unei curbe închise este circulația vitezei și se notează cu  $\Gamma$  (fig. 5.10).

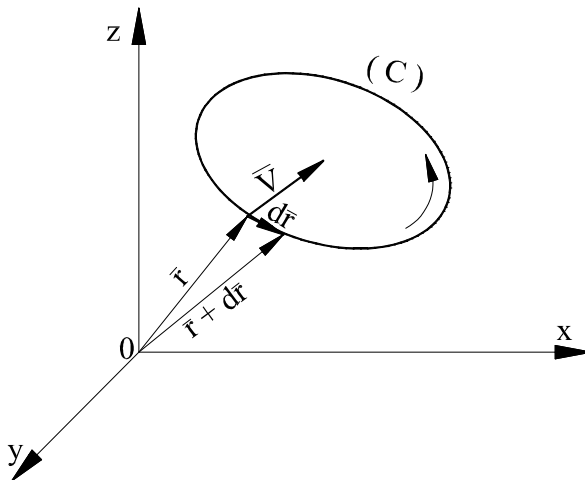


Fig. 5.10. Definirea circulației vitezei

Când  $\bar{V}$  are componentele după axe  $u$ ,  $v$  și  $w$ , iar  $d\bar{r}, dx, dy, dz$  se poate scrie:

$$\Gamma = \int_C \bar{V} \cdot d\bar{r} = \int_C (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz) \quad (5.26)$$

### 5.2.2. Elementele mișcării unei particule de fluid

Mișcarea particulei fluide se poate descompune în:

- mișcare de translație;
- mișcare de rotație;
- mișcare de deformare:
- liniară
- unghiulară

#### 1. Translația particulelor fluide

Cunoscându-se câmpul vitezelor mișcarea de translație a unei particule obține prin integrarea vitezei  $\bar{V}(u, v, w)$  în timp

$$\bar{s} = \int \bar{V} dt \quad (5.27)$$

care proiectată după axe de coordonate devine

$$\begin{cases} x = \int u \cdot dt \\ y = \int v \cdot dt \\ z = \int w \cdot dt \end{cases} \quad (5.28)$$

#### 2. Rotația particulei fluide (rotorul vitezei)

Particulele de fluid dintr-un volum de control, spre deosebire de solide, nu au aceeași viteză de rotație în jurul unei axe instantanee de rotație. De aceea se definește ca viteză de rotație media vitezelor de rotație ale particulelor aflate în plane perpendiculare pe axa de rotație.

Se consideră o particulă fluidă de forma unui paralelipiped elementar  $(dx, dy, dz)$ , cu vârful în punctul  $O(x, y, z)$ , animat de viteza  $\bar{V}(u, v, w)$ . În timpul

$dt$  particula ajunge în  $O'$ , mișcarea fiind o translație din  $O$  în  $O'$  și rotația particulei în jurul unui ax ce trece prin  $O$  (fig. 5.11). Mișcarea de rotație se descompune în rotații în jurul axelor de coordonate  $\omega_x$  după  $O_x$ ,  $\omega_y$  după  $O_y$  și  $\omega_z$  după axa  $O_z$ , având rezultanta:

$$\bar{\omega} = \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z \quad (5.29)$$

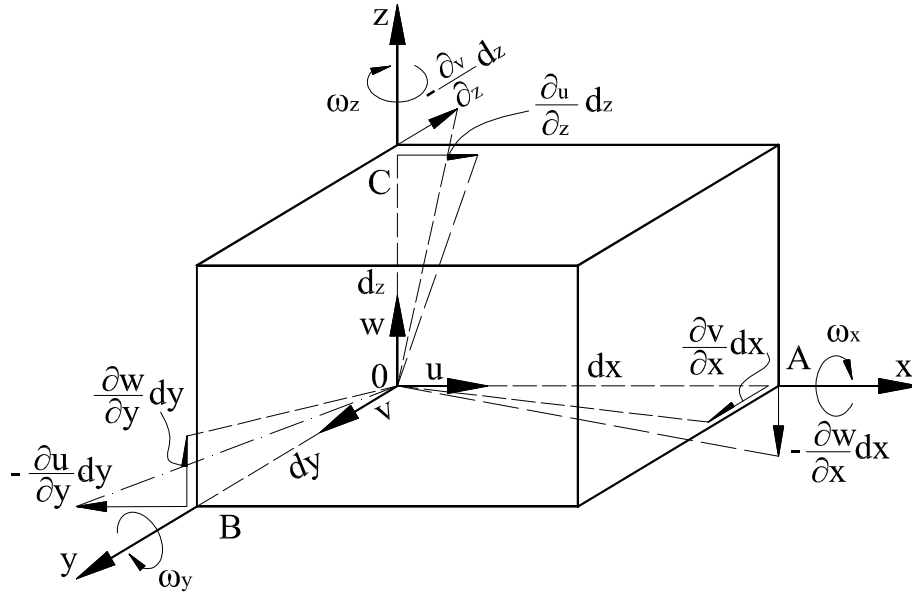


Fig. 5.11. Schemă pentru calculul rotației particulelor fluide

Pentru eliminarea efectului translației, particula se aduce înapoi virtual din  $O'$  în  $O$  numai prin translație. Datorită rotirii  $\omega_x$  în jurul axei  $OX$  componentele vitezei din punctele  $B$  și  $C$  se modifică astfel: în  $B$ ,  $w$  se modifică cu  $\frac{\partial w}{\partial y} dy$ , iar în  $C$ ,  $v$  se modifică cu  $-\frac{\partial v}{\partial z} dz$ . De fapt punctul  $B$  se rotește cu  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , iar  $C$  cu  $-\frac{\partial v}{\partial z}$ . Media rotației după axa  $OX$  a particulei este

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (5.30)$$

Componentele  $\omega_y$  și  $\omega_z$  se obțin asemănător cu  $\omega_x$ .

Viteza de rotație  $\bar{\omega}$  (5.29) se mai numește **vârtej**. Dublul vitezei de rotație este **rotorul**

$$\text{rot}\bar{V} = 2\bar{\omega} = \Omega \quad (5.31)$$

### 3. Deformația particulei fluide

Particula fluidă (inițial de forma unui paralelipiped elementar) prin deplasarea sa - datorită diferențelor de viteză a punctelor sale - suferă deformații. Aceste deformații sunt liniare și unghiulare. Deformațiile liniare sunt modificările lungimii laturilor paralelipipedului datorită diferențelor de

viteză în timpul  $dt$ . După axa  $OX$  deformația este  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \cdot dt = a \cdot dx \cdot dt$ , deci este caracterizată de mărimea  $a = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Astfel deformațiile liniare se caracterizează prin:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}; b = \frac{\partial v}{\partial y}; c = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.32)$$

Deformațiile liniare sunt pozitive dacă reprezintă dilatări ale laturilor și negative dacă sunt contracții.

În mișcare particula suferă și deformații unghiulare care se evidențiază prin deformarea unghiurilor drepte ale fațetelor (fig. 5.12).

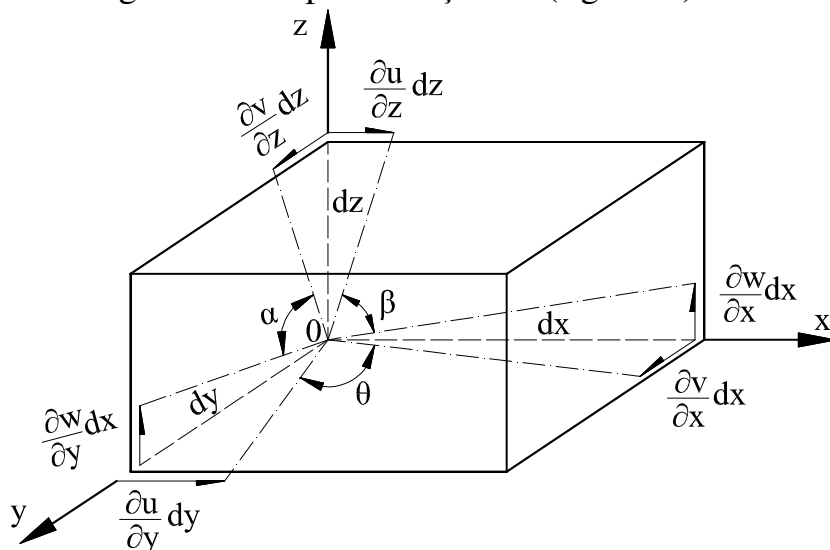


Fig. 5.12. Schema de calcul a deformațiilor unghiulare

Astfel unghiul drept YOZ în ipoteza din figură devine:  
 $\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ . Deformațiile unghiulare după cele trei direcții devin:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (5.33)$$

### 5.2.3. Descompunerea mișcării particulei fluide.

Considerăm o particulă fluidă în mișcare, care în momentul  $t$  se află în  $O(x, y, z)$  și este animată de viteza  $\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ . După un timp  $dt$  particula ajunge în punctul  $O_1(x + dx, y + dy, z + dz)$  și va avea viteza  $\bar{V}_1 = u_1\bar{i} + v_1\bar{j} + w_1\bar{k}$ . Funcția  $\bar{V}(x, y, z)$  este continuă, deci

$$\begin{cases} u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \quad (5.34)$$

Adunând la prima ecuație a sistemului cantitatea

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} dz + \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) \\ \text{la a doua} & \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dz \right), \\ \text{la a treia} & \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dx \right), \end{aligned}$$

după gruparea convenabilă a termenilor se obține pentru prima ecuație:

$$u_1 = u + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz$$

sau

$$\begin{cases} u_1 = u + \omega_y dz - \omega_z dy + a dx + \theta dy + \beta dz \\ v_1 = v + \omega_z dx - \omega_x dz + \theta dx + b dy + \alpha dz \\ w_1 = w + \omega_x dy - \omega_y dx + \beta dx + \alpha dy + c dz \end{cases} \quad (5.35)$$

Ultimile două ecuații s-au obținut analog. Acest sistem (5.35) conține ecuațiile elipsoidului de deformare.

Termenii  $u, v, w$  din sistemul (5.35) reprezintă mișcarea de translație, termenii doi și trei (care conțin pe  $\omega_y, \omega_z$  și  $\omega_x$ ) mișcarea de rotație, iar ultimii termeni (care conțin pe  $a, b, c, \alpha, \beta$  și  $\theta$ ) reprezintă mișcarea de deformare.

Descompunerea mișcării sub această formă reprezintă **teorema Cauchy- Helmholtz**.

Sintetic, descompunerea, mișcării particulei fluide pe elemente corespunde fig. 5.13.

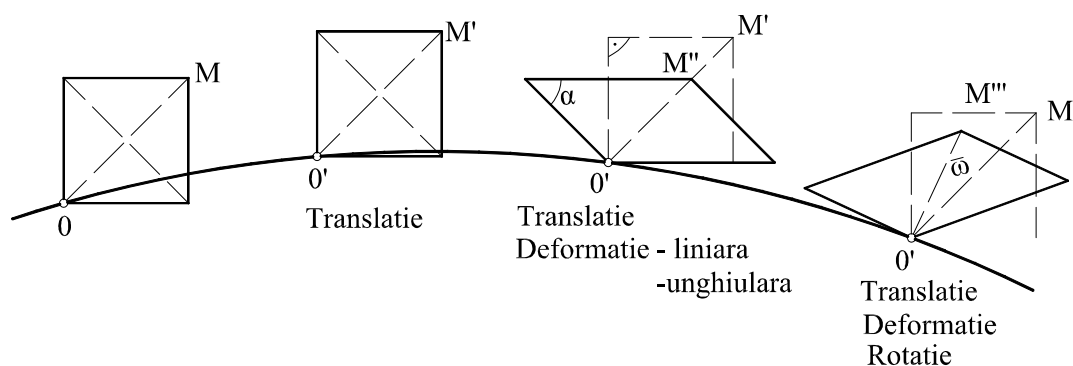


Fig. 5.13. Compunerea mișcării unei particule

### 5.2.4. Clasificarea mișcării fluidelor

Mișcarea fluidelor din punct de vedere cinematic prezintă forme variate, general fiind definită de variabilele independente: timp și spațiu.

1. Din punct de vedere al **variației în timp al câmpului vitezelor** se deosebesc:

a. **mișcări nepermanente (nestaționare)** la care câmpul vitezelor variază în timp  $\bar{V} = \bar{V}(\bar{r}, t)$

b. **mișcări semipermanente (semistaționare)** în care direcția vectorului viteză nu variază în timp  $\bar{V} = v(r, t) \cdot \bar{e}(\bar{r})$  unde  $\bar{e}(\bar{r})$  este un versor definit de suportul vitezei;

c. **mișcări permanente (staționare)** la care câmpul vitezelor este constant în timp  $\bar{V} = \bar{v}(\bar{r})$ .

2. Din punct de vedere al **variației în spațiu al câmpului vitezelor** se deosebesc:

a. **mișcări tridimensionale (spațiale)** la care câmpul vitezelor variază în spațiu, adică  $\bar{V} = u(x, y, z, t)\bar{i} + v(x, y, z, t)\bar{j} + w(x, y, z, t)\bar{k}$

b. **mișcări bidimensionale (plane)**, la care câmpul vitezelor este identic în toate planele paralele cu un plan fix, iar vectorii viteză aparțin numai acestor plane, adică  $\bar{V} = u(x, y, t)\bar{i} + v(x, y, t)\bar{j}$ , când planul fix este  $xoy$ .

c. **mișcări unidimensionale (liniare sau paralele)** în care toți vectorii viteză sunt normali la un plan fix, adică  $\bar{V} = u(x, t)\bar{i}$ , dacă planul fix este  $yoz$ .

d. **mișcări axial simetrice** - în care câmpul vitezelor este identic în toate planele care trec printr-o axă fixă, iar vectorii viteză aparțin numai acestor plane, adică în care  $\bar{V} = V_R(R, z, t)\bar{e}_R + V_z(R, z, t)\bar{e}_z$ . S-au utilizat coordonate cilindrice cu versorii  $\bar{e}_R$  după rază și  $\bar{e}_z$  după axa cilindrului.

Alte clasificări ale mișcării fluidelor se dau în alte părți ale cursului.

### 5.3. Ecuația de continuitate

Ecuația de continuitate exprimă sub formă matematică legea conservării masei pentru un fluid în mișcare. Această lege se poate scrie în coordonate carteziane, cilindrice, sferice sau pentru un curent din tub. În cele ce urmează se

prezintă ecuația de continuitate în coordonate carteziene și pentru un curent de fluid din tub.

### 5.3.1. Ecuația de continuitate în coordonate carteziene

Se consideră un volum de control, de forma unui paralelipiped elementar  $dx, dy, dz$ , într-un fluid în mișcare, caracterizat prin câmpul vitezelor  $\bar{V}(x, y, z, t)$  având componentele vitezei  $u, v$  și  $w$ , respectiv densitatea  $\rho(x, y, z, t)$  (fig. 5.14).

Diferența dintre masa de fluid ce intră și ce iese în și din paralelipipedul de control, în intervalul de timp  $dt$ , este egală cu variația masei de fluid din interiorul volumului de control. Pe fețele concurente în  $O$  intră o masă cu vitezele  $u, v$  și  $w$ , iar pe fețele opuse iese altă masă, variabilă diferențial cu distanța, cu exces de masă.

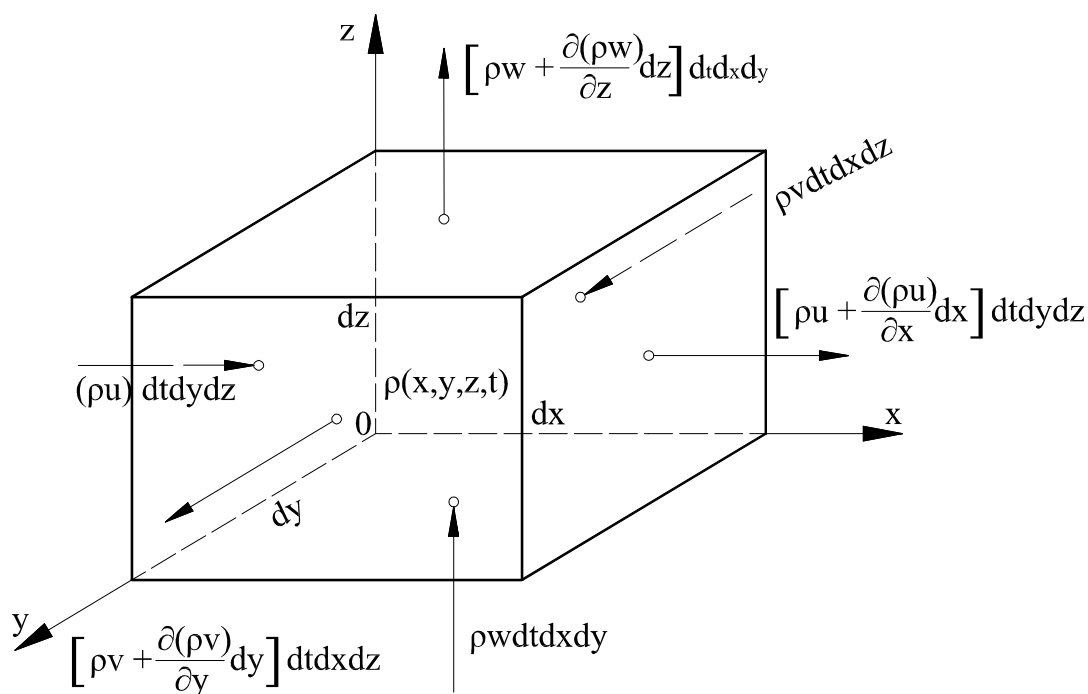


Fig. 5.14. Schemă pentru deducerea ecuației de continuitate

Bilanțul maselor intrate și ieșite este după axa  $ox$ :

$$\rho u dt dy dz - \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dt dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$



dupa axa oy:

$$\rho v dt dx dz - \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dy \right] dt dx dz = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt$$

dupa axa oz:

$$\rho w dt dx dy - \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dt dx dy = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt$$

deci:

$$dm_1 = - \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

Această diferență de masă este egală cu variația masei din interiorul volumului de control în același interval de timp  $dt$ . Variația masei din volumul de control are loc datorită variației densității în timp, astfel:

$$dm_2 = \left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right] dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Din egalitatea  $dm_1 = dm_2$  se obține:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.36)$$

sau vectorial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad (5.36')$$

care este ecuația de continuitate pentru fluide compresibile în mișcare nepermanentă.

În cazul mișcării nepermanente  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , deci:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.37)$$

sau

$$\operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad (5.37')$$

pentru fluide incompresibile  $\rho = \text{const.}$  și se obține

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.38)$$

### 5.3.2. Ecuația de continuitate pentru curent din tub

Se consideră un curent de fluid dintr-un tub de curent între secțiunile normale 1 și 2, aflate la distanța  $dl$ , tubul având secțiunea vie medie  $A$  (fig. 5.15), iar densitatea fluidului  $\rho(l, t)$ .

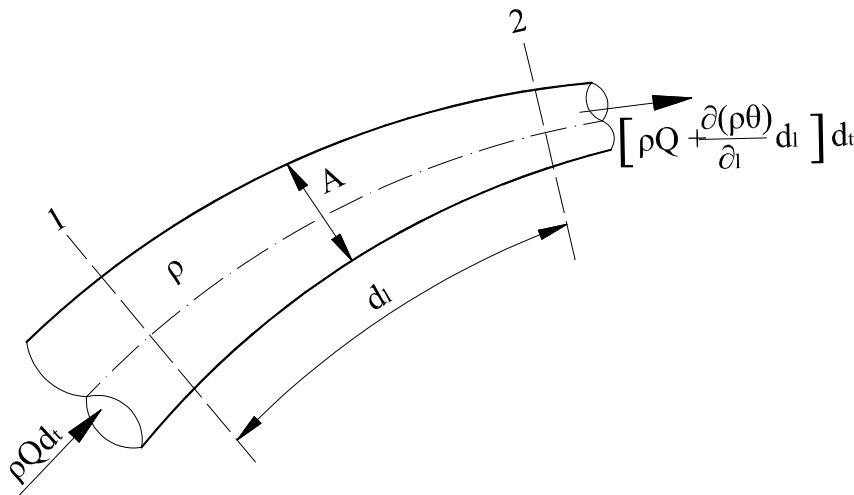


Fig. 5.15. Schemă pentru deducerea ecuației de continuitate pentru un curent din tub

Diferența dintre masa fluidă  $dm_1$  ce intră și iese din tub este egală cu variația masei  $dm_2$  din interiorul tubului în intervalul de timp considerat, deci

$$dm_1 = \rho Q dt - \left[ \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \right] dt = - \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl dt$$

și

$$dm_2 = \left[ \rho A + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} dt \right] dl - \rho A dl = - \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dl dt$$

sau

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial l} = 0 \quad (5.39)$$

Valabil fluidului compresibil în mișcare permanentă. Pentru fluidul incompresibil  $\rho = \text{const.}$ , (5.39) devine

$$\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (5.40)$$

În mișcare permanentă  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  și rezultă:

$$Q = A_1 v_1 \quad (5.41)$$

## 5.4. Aplicații

**5.1.** Să se determine expresia liniilor de curent și sensul de parcurgere a acestora în cazul mișcării unui fluid incompresibil, definit prin componentele vitezelor

$$u = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{și } w = 0 \quad (\text{cu } Q \in \mathbb{R})$$

Obs. Mișcarea nu este definită în originea sistemului de coordonate.

**Rezolvare:** Se verifică ecuația de continuitate pentru mișcarea permanentă și lichid incompresibil

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$$

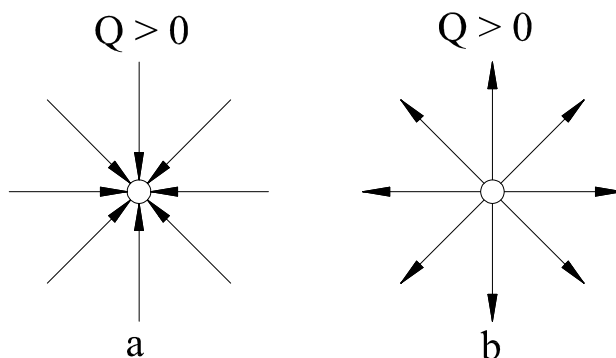


Fig. 5.16. Sursă plană.  
a-negativă; b-pozitivă

Liniile de curent sunt  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

$$\frac{\frac{dx}{\frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}}}{\frac{dy}{\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}}} = \frac{dx}{dy}$$

sau

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

care prin integrare sunt  $y = Cx$ , deci liniile de curent sunt o familie de drepte concurente in origine (fig. 5.16). Liniile de curent sunt parcurse divergent pentru  $Q > 0$  si convergent pentru  $Q < 0$ . Miscarea se mai numește sursa plană (sau izvor) pozitivă sau negativă. Sursa negativă se mai numește izvor debitant (fig. 5.16. a), iar sursa pozitivă izvor absorbant (fig. 5.16. b).

**5.2.** Să se determine liniile de curent și sensul de parcurgere al acestora pentru un fluid incompresibil pentru care componentele vitezei sunt:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ și } w=0, \text{ unde } \Gamma \in R$$

Obs. Mișcarea nu este definită în originea sistemului de coordonate.

**Rezolvare:** Componentele vitezei verifică ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$$

pentru mișcarea permanentă plană și fluid incompresibil.

Ecuația diferențială a liniilor de curent  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{w}$  devine:

$$\frac{\frac{dx}{\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}}}{\frac{dy}{\frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}}} = \frac{dx}{dy}$$

sau

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

Prin integrare ecuația  $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$  devine  $x^2 + y^2 = C$ , deci liniile de curent sunt cercuri concentrice, decalate prin constanta  $C = R^2$ . Liniile de curent sunt parcurse în sens orar pentru  $\Gamma < 0$  și antiorar pentru  $\Gamma > 0$  (fig. 5.17). Mișcarea se numește vârtej (sau turbion) de circulație  $\Gamma$ .

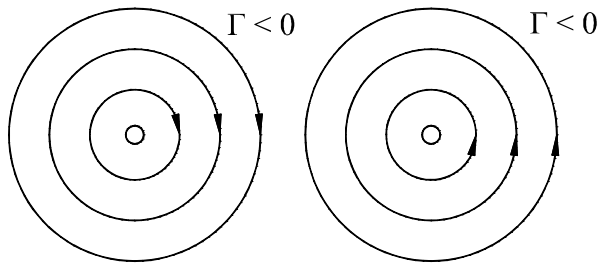


Fig. 5.17. Vârtejul de circulație  $\Gamma$

**5.3.** Curgerea turbulentă în conducte circulare, de rază  $r_0$ , este caracterizată prin distribuția vitezei  $u = u_{\max} \left( \frac{y}{r_0} \right)^{1/n}$ , unde  $y = r_0 - r$  este distanța de la peretele conductei,  $u_{\max}$  = viteza maximă, iar exponentul  $n$  are valoarea 7. Să se determine expresia vitezei medii și coeficientul Coriolis  $\alpha$  (factor de corecție al energiei cinetice). Coeficientul  $\alpha$  are expresia:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{u}{u_m} \right)^3 dA$$

**Rezolvare:** Viteza medie se definește prin:

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u_{\max} \left( \frac{r_0 - r}{r_0} \right)^{1/n} 2\pi r dr$$

unde  $dA$  este suprafața inelului circular de rază  $r$  și grosime  $dr$ . Se face schimbarea de variabilă  $\frac{r}{r_0} = 1 - t$ , rezultând

$$u_m = 2u_{\max} \int_0^1 t^{1/n} (1-t) dt$$

sau

$$u_{\max} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_{\max}$$

Pentru  $n=7$  se obține  $u_m = \frac{98}{100} u_{\max} = 0,817 u_{\max}$

Coeficientul Coriolis este:

$$\alpha = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{u_{\max}^3 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{3/n}}{\left[\frac{2n}{(n+1)(2n+1)} u_{\max}\right]^3} 2\pi r dr = \frac{(n+1)^3 (2n+1)^3}{4n^6} \int_0^1 t^{3/n} (1-t) dt$$

sau

$$\alpha = \frac{(n+1)^3 (2n+1)^3}{4n^6 (3+n)(3+2n)} \text{ care pentru } n=7 \text{ este } \alpha = 1,058$$

**5.4.** Admițând o accelerație medie constantă "a" într-o conductă de lungime L care transportă debitul  $Q$ , să se determine modul de variație a diametrului în lungul conductei în ipoteza secțiunii circulare. Se cunoaște viteza de intrare în confuzor  $V_0$ .

**Rezolvare:** Conform definiției accelerației substanțiale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

la mișcare permanentă accelerația locală este nulă  $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ , rămânând componenta convectivă, accelerația în lungul confuzorului, deci:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} = a \text{ sau } \partial \left( \frac{v^2}{2} \right) = a dx$$

Dupa integrare avem:  $\frac{V^2}{2} = ax + C$

Constanta de integrare rezultă pentru  $x=0$ , unde  $V = V_0$ , deci:

$$C = \frac{V_0^2}{2}, \text{ respectiv } V^2 = V_0^2 + ax$$

Din ecuația de continuitate rezultă:

$$A_0 V_0 = \frac{\pi D_0^2}{4} V_0 = AV = \frac{\pi D^2}{4} v$$

respectiv:

$$D = D_0 \sqrt{\frac{V_0}{V}} = D \sqrt{\frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2ax}}} = \frac{D}{\sqrt[4]{1 + \frac{2ax}{V_0^2}}}$$

## CAPITOLUL 6

### DINAMICA FLUIDELOR EULERIENE

Dinamica fluidelor studiază mișcarea acestora și interacțiunea lor cu corpurile solide ținând seama de forțele care determină, sau modifică starea de mișcare și de transformările energetice în fluid în timpul mișcării. Ipoteza fluidului eulerian ( $\rho = \text{const.}$ ) reprezintă o primă aproximație, etapă premergătoare, în abordarea studiului mișcării fluidelor newtoniene sau reale. Rezultatele obținute la mișcarea fluidelor euleriene, prin aplicarea unor coeficienți de corecție pot fi utilizate la rezolvarea unor probleme practice de la mișcarea fluidelor reale.

În studiul dinamic al mișcării fluidului se aplică principiile, teoremele și legile mecanicii generale, aplicate mediilor continue. Astfel se utilizează principiul conservării masei, principiul conservării și transformării energiei, teoremele variației impulsului și momentului cinetic, legea a II-a a lui Newton etc.

#### 6.1. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor euleriene

##### 6.1.1. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sub forma dată de Euler

Ecuațiile generale de mișcare ale unei particule de fluid eulerian (în coordonate carteziane) se obțin din ecuațiile generale ale mișcării unui mediu continuu (cap. 3) în care influența vâscozității și compresibilității sunt nule. Forțele de legătură între particule se reduc la componentele normale la suprafața particulei - cele rezultate din presiune. Totodată densitatea  $\rho$  este constantă. Din sistemul (3.2) și (3.4) pentru  $\tau_{ij} = 0$  și  $p_x = p_y = p_z = p$ , rezultă:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (6.1)$$



În sistemul de ecuații Euler, din punct de vedere fizic, fiecare termen are semnificația unei forțe unitare (corespunzătoare unității de masă).

La fluide euleriene necunoscutele sistemului sunt componentele vitezei  $u$ ,  $v$  și  $w$  și presiunea  $p$ . Pentru aflarea necunoscutelor sistemul (6.1) se completează cu ecuația de continuitate sub forma (5.38).

Sistemul de ecuații formate din (6.1) și (5.38) este un sistem neliniar de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I, având variabilele independente  $x, y, z$  și  $t$ , iar variabilele dependente  $u, v, w$  și  $p$ .

La fluide pascalene (compresibile) densitatea  $\rho(x, y, z, t)$  este o necunoscută, împreună cu  $u, v, w$  și  $p$ ; deci pentru rezolvarea sistemului (6.1) se mai adaugă ecuația de continuitate (5.38) și ecuația de stare  $\rho = \rho(p, \theta)$ , care caracterizează evoluția fluidului compresibil.

Înmulțirea sistemului (6.1) cu  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  și adunarea ecuațiilor conduce la

$$\bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z - \frac{1}{\rho} \left( \bar{i} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} (\bar{i} \cdot u + \bar{j} \cdot v + \bar{k} \cdot w)$$

sau

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (6.2)$$

care este forma vectorială a ecuației mișcării fluidelor euleriene.

Sub acțiunea forțelor unitare de inerție  $\left( \frac{d\bar{V}}{dt} \right)$ , masice ( $\bar{F}$ ) și celor rezultate din presiune  $\left( \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right)$  fluidul în mișcare se găsește în echilibru dinamic.

Termenii ecuației sunt forțe unitare, corespunzătoare unității de masă, deci au dimensiunea de accelerație. Când forța masică derivă din potențialul  $U$  se obține:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + \text{grad} \left( U + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (6.3)$$

iar când  $U$  este generat de câmpul gravitațional,  $U = g \cdot z$ , (6.3) se particularizează în:

$$\frac{dV}{dt} + grad \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (6,3')$$

La soluționarea ecuațiilor se ține seama de condițiile inițiale și la limită, impuse de problema concretă de mișcare studiată.

**1. Condițiile inițiale** sunt condiții care se impun câmpului vitezelor și câmpului presiunii la un moment dat  $t_0$  (considerat moment inițial). Acestea au forma:

$$\begin{cases} u_0 = u(x, y, z, t_0) \\ v_0 = v(x, y, z, t_0) \\ w_0 = w(x, y, z, t_0) \\ p_0 = p(x, y, z, t_0) \end{cases} \quad (6.4)$$

unde  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  și  $p_0$  sunt funcții cunoscute, de coordonate  $x$ ,  $y$  și  $z$ . Aceste condiții se impun mișcărilor nepermanente. La mișcări permanente parametrii acestora nu depind de timp și dacă se cunosc la un moment dat " $t$ ", ele sunt identice pentru orice moment.

**2. Condiții la limită** (de margine) sunt condiții care trebuiesc verificate pe **frontierele** curentului de fluid la un moment dat. Se disting două tipuri de condiții limită și anume: condiții la limită **cinematice** (care trebuiesc verificate de viteze) și condiții la limită **dinamice** (care trebuie verificate de presiune). Numărul mare de condiții limită existente (practic fiecare problemă are condițiile ei la limită specifice) impune ca în continuare să fie prezentate doar câteva dintre cele mai importante și semnificative.

a. **Condiții la limită cinematice** se exemplifică în cazul mișcării unui solid într-un fluid, mărginit de pereți solizi (fig. 6.1).

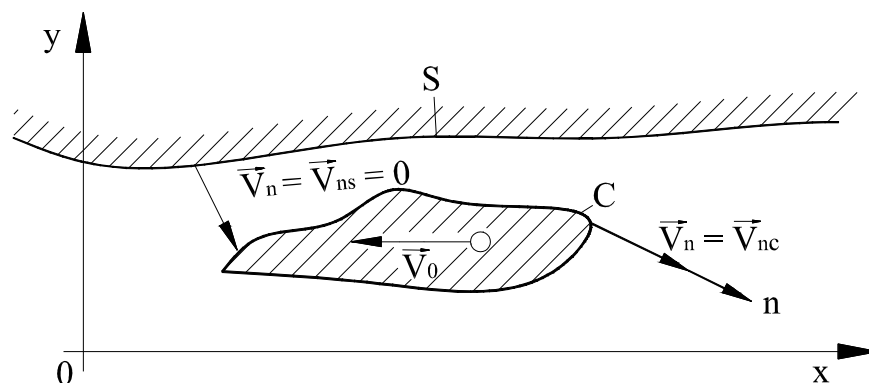


Fig. 6.1. Condiții la limită cinematice la mișcarea unui corp rigid într-un fluid mărginit de pereți solizi

Se presupune că mișcarea corpului are loc în planul  $xoy$ , cu viteza  $V_0$ , în sensul negativ al axei  $x$ . La o oarecare distanță de corp, fluidul este limitat de suprafața solidă  $S$  (materializată prin urma sa la intersecția cu planul  $xoy$ ). Condiții la limită cinematice se pun pe frontierele spațiului ocupat de fluid și anume: într-un punct  $M$  de la infinit (cel puțin o coordonată este infinită), pe suprafața corpului rigid ( $C$ ) și pe suprafața ( $S$ ) a peretelui solid care limitează fluidul.

Mișcarea fluidului provocată de mișcarea corpului solid - la o distanță mare de corp, practic nu există, deci

$$\lim_{M \rightarrow \infty} V(M, t) = 0 \quad (6.5)$$

(ex:  $V = 0$  pentru  $x = -\infty$ ).

Pentru precizarea condiției de margine pe suprafața corpului în mișcare, se notează cu  $V_{nc}$  componenta normală a vitezei unui punct solid oarecare aparținând frontierei ( $C$ ) și cu  $V_n$  componenta normală a vitezei particulei de fluid care în momentul considerat se găsește în acel punct. Datorită impermeabilității suprafeței solide ( $C$ ) și a curgerii fără dezlipire de această suprafață, rezultă:

$$V_n = V_{ns} = 0 \big| (C) \quad (6.6)$$

care este condiția cinematică pe suprafața ( $C$ ) a rigidului, numită condiție de impermeabilitate (Dacă  $V_n < V_{nc}$  atunci particula pătrunde prin peretele corpului, iar

dacă  $V_n > V_{nc}$  atunci particula lichidă se desprinde de corp, ambele fenomene nefiind posibile).

Deoarece suprafața  $S$  nu se deplasează, rezultă  $V_{ns}=0$  și, implicit,  $V_n=0$ , deci

$$V_n = V_{ns} = 0|_S \quad (6.7)$$

care este condiția cinematică pe suprafața fixă.

Condițiile limită pentru fluid în mișcare în jurul unui corp rigid se determină asemănător având  $V_\infty$ , viteza înfinit amonte de corp

$$\lim_{M \rightarrow \infty} V(M, t) = V_\infty \quad (6.8)$$

Condiția limită la suprafața (C) este

$$V_n|_C = 0 \quad (6.9)$$

deci viteza este tangențială la corp, deci conturul rigidului într-un curent de fluid eulerian este o linie de curent. Într-un curent de fluid eulerian orice linie de curent poate fi înlocuită cu perete solid, fără ca prin aceasta mișcarea fluidului să fie conturbată.

**b. Condiții la limită dinamice** sunt condiții care se impun presiunii în anumite frontiere ale curgerii sau la infinit. Un exemplu îl constituie presiunea pe suprafața liberă a lichidului în mișcare. La suprafața de separație lichid-gaz presiunea este constantă (în caz contrar are loc amestecul particulelor de lichid și gaz datorită diferenței de presiune).

Condiția descrisă sub formă analitică se scrie

$$p = p_a|_{S_0} \quad (6.10)$$

### 6.1.2. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor euleriene sub formele date de Helmholtz și Gromeka-Lamb

Relațiile Euler nu evidențiază unele particularități cinematice și energetice ale mișcării și din acest considerent se mai utilizează și alte forme de exprimare a ecuațiilor mișcării.

Se consideră identitatea

$$\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (6.11)$$

care se derivează în raport cu axa  $x$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.12)$$

și se scade din prima ecuație a lui Euler (6.1), rezultând:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) + w \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) + u \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (6.13)$$

Ultimile două ecuații se obțin în mod similar sau prin permutări. Sistemul (6.13) reprezintă forma Herlmoltz a ecuațiilor de mișcare. Sub formă vectorială ecuația (6.13) devine

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (6.14)$$

Când forța masică derivă din potențialul  $U$  (cu  $\bar{F} = \text{grad} U$ ) rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + 2(w\omega_y - v\omega_x) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + 2(u\omega_z - w\omega_x) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + 2(w\omega_x - u\omega_y) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

care sunt ecuațiile de mișcare după Gromeka-Lamb. Înmulțirea ecuațiilor (6.15) respectiv cu  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$ , după adunare, conduce la forma:

$$d\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(udx + vdy + wdz) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (6.16)$$

sau sub formă vectorială

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + grad\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + rot\bar{V} \times \bar{V} = 0 \quad (6.16')$$

remarcă termenul Bernoulli

$$U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = e \quad (6.17)$$

în care termenii au semnificația de energii unitare, corespunzătoare unității de masă.

Termenii ecuației (6.16) reprezintă după cum urmează:

- primul termen - variația energiei unitare totale;
- al doilea termen - lucrul mecanic unitar efectuat de forțele de inerție locală;
- al treilea termen - lucrul mecanic unitar al forțelor de inerție datorită accelerației convective (variației vârtejurilor).

### Cazuri particulare ale ecuației mișcării

Se analizează cazurile când termenul Bernoulli este constant. Aceasta se

îndeplinește în mișcare permanentă,  $\frac{\partial}{\partial t}(udx + vdy + wdz) = 0$ , în situațiile când determinantul din (6.16) se anulează.

Anularea determinantului poate avea loc:

a. când  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  care reprezintă o mișcare **irrotatională** și se mai numește **potențială**, deoarece viteza derivă din potențialul  $\varphi$ , deci

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

b. când determinantul satisface ecuația liniei de curent,  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ .

Determinantul se anulează de-a lungul liniei de curent căci ecuația acesteia exprimă proporționalitatea primelor două linii ale determinantului;

c. când mișcarea satisface condiția liniei de vârtej

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z};$$

d. la o mișcare elicoidală

$$\frac{u}{\omega_x} = \frac{v}{\omega_y} = \frac{w}{\omega_z}$$

deci vectorul viteză este paralel cu vectorul vârtej.

Pentru alte forme de mișcare (ex. mișcării nepermanente) este preferabilă o altă formă a ecuației mișcării.

### 6.1.3. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor euleriene în coordonate intrinseci

Se consideră ecuațiile lui Euler sub formă vectorială (6.2) sau (6.3)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = -grad \left( \frac{p}{\rho} + U \right) \quad (6.3)$$

Pentru exprimarea componentelor accelerației în coordonate intrinseci se consideră o masă de fluid în mișcare, iar o particulă la un moment dat  $t$  se află în punctul  $M$  și se mișcă pe traiectoria  $MM_I$ . În punctul  $M$  se consideră un triedru ortogonal, format din tangenta la traiectorie, normala principală și binormală (fig. 6.2).

Versorii axelor de coordonate sunt  $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ .

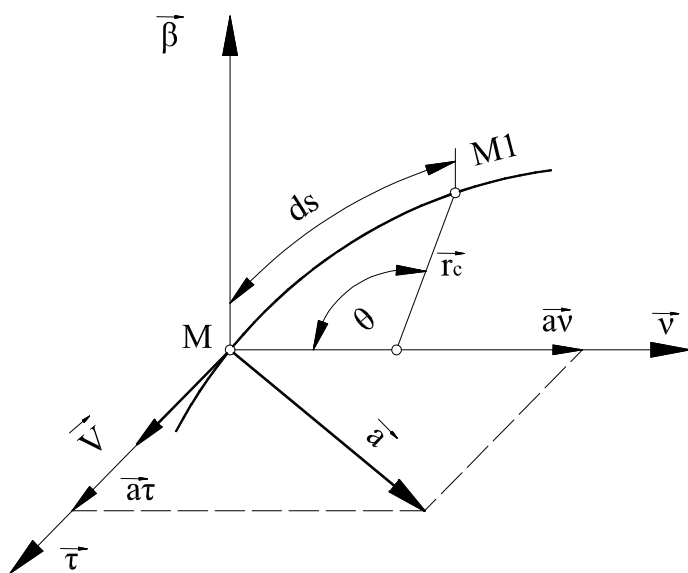


Fig. 6.2. Exprimarea componentelor accelerației în coordonate intrinseci

Mișcarea particulei pe traiectoria  $MM_1=ds$  se studiază în funcție de coordonata curbilinie  $s=s(t)$ . Viteza  $\bar{V} = \bar{ds}/dt$  are componentele  $V_\tau = V; V_v = 0; V_\beta = 0$  iar sub formă vectorială  $\bar{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau}$ .

Accelerația (derivata vitezei în raport cu timpul) este

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \bar{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\bar{\tau}}{dt} \quad (6.18)$$

însă

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \bar{v} = \frac{V}{r_c} \bar{v} \quad \text{și} \quad \frac{ds}{dt} = V$$

respectiv  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$ , astfel încât

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt} \bar{\tau} + \frac{V^2}{r_c} \bar{v} \quad (6.19)$$

sau



$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, a_v = \frac{V^2}{r_c}, a_\beta = 0$$

În aceste condiții proiecțiile ecuației (6.3) după axele de coordonate sunt

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{p}{\rho} + U \right) = 0 \\ \frac{V^2}{r_c} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{p}{\rho} + U \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{p}{\rho} + U \right) = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

care pentru câmpul gravitațional ( $U=gz$ ), cu  $g=const.$ , devine:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + g \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) = 0 \\ \frac{V^2}{r_c} + g \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) = 0 \\ g \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{p}{\gamma} + U \right) = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Aceste ecuații permit determinarea variației presiunii în jurul unui punct într-un lichid în mișcare:

- ultima ecuație a sistemului (6.21) arată că după direcția binormalei presiunea, variază după legea hidrostaticii în câmp gravitațional ( $p / \gamma + z = const.$ );
- a doua ecuație arată că la o traiectorie curbă a unei particule cota piezometrică  $p / \gamma + z$  crește în sensul negativ al normalei, adică de la partea concava spre partea convexă a curbei. Când raza de curbură  $r_c \rightarrow \infty$  (curenți paraleli, liniari) presiunea după normală variază după legea hidrostaticii în câmp gravitațional.

Chiar atunci când  $r_c$  are valori mari, deci  $\frac{V^2}{r_c}$  se poate neglija, variația presiunii este tot după legea hidrostaticii (ex. la curenți lent variați);

- prima relație a sistemului permite determinarea variației presiunii în lungul curentului (traectoriei).

## 6.2. Ecuația energiei (Ecuația lui Bernoulli)

Termenul Bernoulli (6.17) din ecuația mișcării are o importanță deosebită în hidraulică și în aplicațiile practice ale acesteia. Se folosește pentru diferite cazuri particulare ale mișcării și diverse modele de fluid, astfel: fir și curent de fluid, mișcare permanentă și semipermanentă, mișcare relativă, model eulerian sau newtonian de fluid.

### 6.2.1. Ecuația energiei (relația lui Bernoulli) pentru un fir de fluid

În multe cazuri practice de hidraulică inginerescă se întâlnesc mișcări unidimensionale la care parametrii mișcării au o dezvoltare și variație apreciabilă după o singură direcție. În aceste cazuri, admitând o distribuție uniformă a vitezelor și presiunilor pe secțiune, se lucrează cu modelul unidimensional de lichid.

Elementele cinematice ale mișcării se reduc la:

$$x = x(x, t); u = u(x, t) = \frac{dx}{dt}; a = a(x, t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6.22)$$

În această situație ecuațiile mișcării se reduc la forme mai simple, mai ales în câmpul gravitațional, când  $U=gz$ .

#### 1. Ecuația energiei pentru un fir de fluid în mișcare permanentă

S-a arătat că în ecuația (6.16) termenul (6.17) este o energie unitară, corespunzătoare unității de masă.

Pentru un fir de curent (firul fiind asimilat la limită cu o linie de curent) în mișcare permanentă (6.16) devine:

$$d\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (6.23)$$

iar cu particularizarea  $V(u, 0, 0)$  și  $U=gz$ , după integrare, avem

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

sau

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (6.24)$$

care este ecuația energiei pentru firul de curent eulerian în mișcare permanentă. Acesta ecuație a fost dedusă de Daniel Bernoulli în anul 1738 - prin aplicarea teoremei variației energiei cinetice unei porțiuni din firul de curent, care arată că lucrul mecanic efectuat de forțele care acționează asupra porțiunii de fir este egal cu creșterea energiei cinetice pentru intervalul de timp  $dt$  considerat. Scriind ecuația (6.24) pentru cele două secțiuni normale care delimitează firul de curent (fig. 6.3), avem

$$\frac{u_1}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (6.25)$$

Relatia este valabilă atât lichidelor cât și gazelor când  $\rho = \text{const.}$

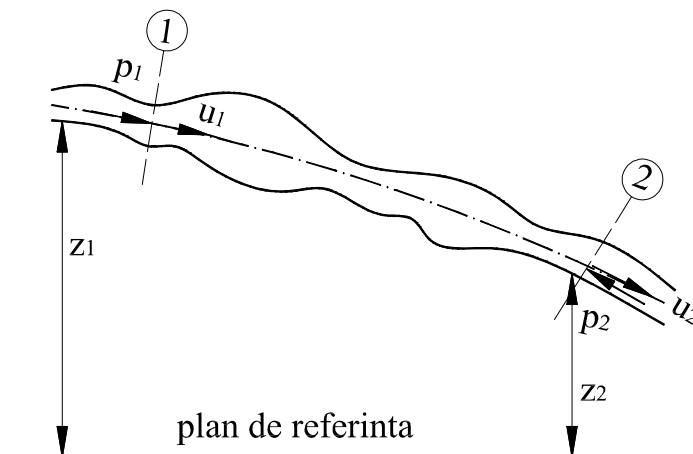


Fig. 6.3. Aplicarea ecuației lui Bernoulli în două secțiuni ale firului de curent

## 2. Ecuația lui Bernoulli pentru un fir de fluid în mișcare semipermanentă

Mișcarea semipermanentă a unui fluid este mișcarea în care, în punctele curentului, vitezele particulelor fluide variază numai ca mărime, nu și ca

direcție. Mișcarea semipermanentă este un caz particular de mișcare nepermanentă. De exemplu, mișcarea variabilă a fluidelor în tuburi cu pereți rigizi și imobili este și caz de mișcare semipermanentă. La această mișcare liniile de curent coincid cu traiectoria. Pentru a scrie ecuația energiei în mișcare semipermanentă pentru un mod unidimensional se consideră prima ecuație intrinsecă a mișcării din sistemul (6.21) cu specificația că pentru notația direcției tangentei la traiectorie se folosește „ $s$ ” în loc de „ $\tau$ ”, astfel

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\partial}{\partial s} \left( U + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (6.26)$$

Pentru  $\bar{V}(u, 0, 0)$  cu  $u=u(s, t)$  se poate scrie

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2} \right) \quad (6.27)$$

În câmp gravitațional  $U=gz$ , iar prin înlocuire și împărțire cu  $g$  se obține

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) = 0 \quad (6.28)$$

sau după integrare

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \frac{1}{g} \int_0^s \frac{\partial u}{\partial t} ds = \text{const.} \quad (6.29)$$

care aplicat celor două secțiuni vii 1 și 2 din fig. 6.3. devine

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds \quad (6.30)$$

Relația este ecuația lui Bernoulli în mișcarea semipermanentă a unui fluid eulerian.

### 3. Ecuația energiei pentru un fir de fluid în mișcare relativă (Cazul unui fir de curent în mișcare de rotație uniformă)

Se consideră un tub de curent elementar (în sistemul cartezian OXYZ) în care mișcarea unei particule fluide este caracterizată prin viteza de translație unidirecțională  $u$ . Mișcarea particulei de fluid în lungul tubului elementar este descrisă de ecuația energiei sub forma:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const.} \quad (6.31)$$

Se presupune că sistemul OXYZ, împreună cu tubul elementar, se rotește în jurul axei Z (fig. 6.4) cu viteză unghiulară constantă  $\omega$ . Asupra particulei din punctul M acționează câmpul gravitațional ( $G = mg$ ) și câmpul centrifugal ( $F = m\omega^2 r$ ). Componentele forței masice unitare sunt:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 r \cos \theta = \omega^2 x \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 r \sin \theta = \omega^2 y \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -g \end{cases} \quad (6.32)$$

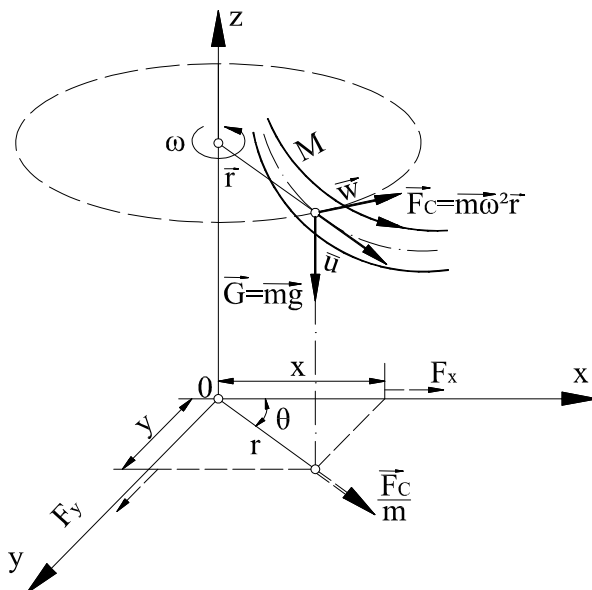


Fig. 6.4. Schemă pentru calculul ecuației Bernoulli în mișcarea relativă

Potențialul care generează forța masică este

$$U = \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

care după integrare este

$$U = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + gz + c = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + gz + c \quad (6.33)$$

Termenul  $\omega^2 \cdot r^2 = w^2$  este pătratul vitezei periferice, deci

$$U = -\frac{w^2}{2} + gz + c \quad (6.34)$$

Înlocuind potențialul  $U$  în relația (6.31), după împărțire cu  $g$  se obține

$$\frac{u^2 - w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const} \quad (6.35)$$

care reprezintă ecuația lui Bernoulli pentru mișcarea relativă.

Ecuația are o largă întrebuințare în teoria turbomașinilor hidraulice (pompe și turbine centrifugale).

#### 4. Interpretarea geometrică și energetică a ecuației energiei pentru fire de curent euleriene

Ecuația energiei (Bernoulli) pentru un fir de curent poate fi interpretată geometric și energetic ca și ecuația hidrostaticii.

##### a. Interpretarea geometrică

Dimensional, termenii ecuației (6.25), respectiv (6.30) reprezintă lungimi,

$$\left[ \frac{u^2}{2g} \right] + \left[ \frac{p}{\gamma} \right] + [z] + \left[ \frac{1}{g} \int \frac{\partial u}{\partial t} ds \right] = L$$

ceea ce permite interpretarea geometrică a ecuației energiei (fig. 6.5. a și b) pentru o mișcare permanentă și semipermanentă.

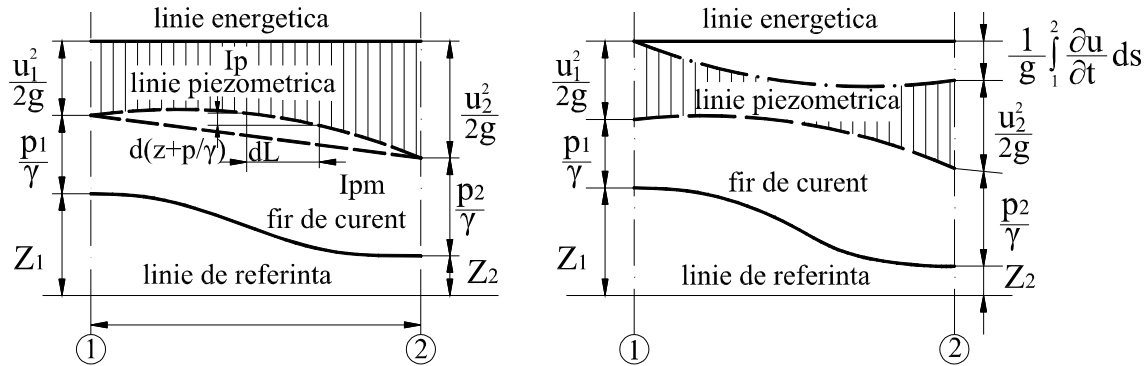


Fig. 6.5. Interpretarea geometrică a ecuației energiei pentru un fir de curent eulerian. a. în mișcare permanentă; b. în mișcare semipermanentă.

Termenii  $z$  și  $\frac{p}{\gamma}$  au fost interpretați la hidrostatică, ei reprezentând cota,

respectiv înălțimea de presiune, iar suma  $z + \frac{p}{\gamma}$  - înălțime piezometrică. Termenul  $\frac{u^2}{2g}$

este înălțimea cinetică. În cazul mișcării permanente ecuația (6.24) și (6.25) definește linia energetică, suma termenilor din ecuații fiind înălțimea energetică (hidrodinamică). Pentru modelul de lichid eulerian linia energetică este paralelă cu linia de referință (fig. 6.5. a). Distribuția înălțimii energetice pe termeni permite definirea pantei piezometrice medii

$$I_{pm} = \frac{(p_1 / \gamma + z_1) - (p_2 / \gamma + z_2)}{L} \quad (6.36)$$

sau a pantei piezometrice locale

$$I_p = \frac{d(z + p / \gamma)}{dL} \quad (6.37)$$

### b. Interpretarea energetică

În cadrul hidrostaticii (4.24) termenii  $z$  și  $\frac{P}{\gamma}$  ai ecuațiilor (6.25) și (6.30)

s-au interpretat energetic,  $z$  reprezentând energia specifică de poziție și  $\frac{P}{\gamma}$  – energie specifică de presiune. Suma lor, în cazul de față, reprezintă energia specifică piezometrică. Aceste energii specifice sunt energiile unității de greutate de lichid.

Termenul  $\frac{u^2}{2g}$  se interpretează astfel: energia cinetică a particulei de masă

" $m$ " și greutate " $m \cdot g$ ", care se mișcă cu viteza " $u$ " este  $m \frac{u^2}{2g}$ . Raportând acesta energie cinetică la greutatea particulei, rezultă:

$$\frac{mu^2}{2} \frac{1}{mg} = \frac{u^2}{2g}$$

termenul cinetic al ecuației lui Bernoulli, care este de fapt energia cinetică a unității de greutate de fluid, deci energie cinetică specifică.

Pentru un model de lichid eulerian energia specifică este constantă, dar distribuția sa pe termeni poate diferi de la o secțiune la alta.

Termenul  $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds$ , caracteristic mișcării semipermanente, reprezintă

energia specifică inerțială, energie specifică pentru modificarea vitezelor locale în raport cu timpul  $dt$ , de-a lungul firului de curent, pe distanța  $ds$ .

### 6.2.2. Ecuația energiei pentru curent de fluid eulerian de secțiune finită

În cazul mișcării fluidelor în tuburi de curent de secțiune finită distribuția vitezelor și presiunilor variază atât într-o secțiune transversală cât și între secțiuni în lungul curentului. Când curentul de lichid este format din fire paralele și liniare sau ușor curbate (mișcare lent sau gradual variată), termenul  $z + \frac{P}{\gamma}$  din ecuația energiei se supune legii hidrostaticii și este constant pe secțiunea transversală (vezi interpretarea ec. 6.21).

Din definiția vitezei medii rezultă:



$$Q = VA = \int_A u dA \quad (6.38)$$

Viteza locală  $u$  diferă de viteza medie  $V$  prin cantitatea  $\Delta u$ , deci

$$U = V \pm \Delta u \quad (6.39)$$

Înlocuind (6.39) în (6.38) rezultă,

$$Q = \int_A V dA \pm \int_A \Delta u dA = Q \pm \int_A \Delta U dA$$

de unde este evident că  $\int_A \Delta u dA = 0$ .

Raportul energiilor cinetice calculate cu viteza locală  $u$  și viteza medie  $V$  definește coeficientul Coriolis:

$$\alpha = \frac{\int \frac{u^2}{2} dm}{\frac{V^2}{2} m} = \frac{\frac{\rho t}{2} \int_A u^3 dA}{\frac{\rho t}{2} V^3 A} = \frac{\int_A u^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A (V \pm \Delta u)^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A (V^3 \pm 3V^2 \Delta u + 3\Delta u^2 V \pm \Delta u^3) dA}{V^3 A} \quad (6.40)$$

Într-o mișcare permanentă  $V = \text{constant}$ , iar termenul cu  $\Delta u^3$  se poate neglija întrucât  $\Delta u \ll V$ , rezultând

$$\alpha = 1 + \frac{3 \int_A \Delta u^2 dA}{V^2 A} = 1 + 3\eta \quad (6.40')$$

S-a utilizat notația  $\eta = \int_A \Delta u^2 dA / V^2 A$

Coeficientul Coriolis evidențiază abaterea energiei cinetice calculată cu viteza medie și energia cinetică reală a curentului. Valorile lui  $\alpha$  au fost determinate pentru diferite tipuri de mișcări, astfel:

- pentru viteze uniforme  $\alpha = 1$
- în mișcări laminare  $\alpha = 2$
- în mișcări turbulente  $\alpha = 1,03 \dots 1,10$

De fapt valoarea lui  $\alpha$  depinde de profilul vitezei și condițiile de contur (tab. 6.1 și 6.2).

**Tabelul 6.1.** Coeficienții  $\alpha$  și  $\beta$  pentru curgeri sub presiune

Regim de curgere	Legea variației vitezei	$\alpha$	$\beta$
Laminar	$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{y^2}{r_0^2} \right)$	2	1,33
Turbulent neted și tranziție	$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right)^n$	$n = \frac{1}{7}$	1,05
		$n = \frac{1}{10}$	1,02
Turbulent rugos		1,03	1,01
		1,05-1,1	1,02-1,03

**Tabelul 6.2.** Coeficientul Coriolis pentru curgeri în canale

$\frac{u_1}{u_2}$	1	1,5	2	5	80	Observații
Formă secțiune						
Trapez	1	1,04	1,11	1,44	2	$u_1$ -viteză de suprafață
Parabolă	1	1,04	1,09	1,31	1,54	$u_2$ -viteză de fund

### 1° Pentru mișcare permanentă

Energia cinetică specifică a curentului care curge în unitatea de timp pe secțiunea A, este energia raportată la greutatea fluidului

$$\frac{\int \frac{u^2}{2} dm}{\gamma t VA} = \frac{\rho t \int_A u^3 dA}{2 \rho g t VA} = \frac{1}{2g} \frac{\int_A u^3 dA}{VA} = \frac{\alpha V^3 A}{2g VA} = \frac{\alpha V^2}{2g}$$

Astfel, pentru curent de secțiune finită ecuația energiei (Bernoulli), când termenul cinetic se calculează cu viteza medie, devine

$$\frac{\alpha_1 V_1}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (6.41)$$

unde cotele  $z_1$  și  $z_2$  reprezintă cota axului tubului de curent în care are loc mișcarea. Interpretarea geometrică este conform fig. 6.6.a.

## 2°. Pentru mișcarea semipermanentă

În cazul mișcării nepermanente a fluidelor în tuburi de secțiune finită ecuația (6.29), caracteristică firului de curent, se transcrie:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{\beta}{g} \int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds = \text{const.}, \quad (6.42)$$

atât termenul cinetic cât și termenul inerțial fiind calculați cu viteza medie. Termenul inerțial este afectat de coeficientul lui Boussinesq " $\beta$ ", care corectează abaterea când termenul inerțial se calculează cu viteza medie " $V$ " față de profilul de viteză real " $u$ ".

Determinarea coeficientului  $\beta$  necesită să se lucreze cu energii, deci termenul inerțial se înmulțește și împarte cu greutate fluidului:

$$\frac{\frac{\gamma}{g} \int_0^s \frac{\partial u}{\partial t} ds \cdot dQ}{\gamma Q} \quad (6.43)$$

Integrala din (6.43) se transformă astfel:

$$\int_0^s \int_0^A \frac{\partial u}{\partial t} dQ ds = \int_0^s \int_A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) dA ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^s ds \int_A \frac{u^2}{2} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^s \frac{\beta V^2 A}{2} ds \quad (6.44)$$

Deci

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{V^2 A} = \frac{\int_A (V \pm \Delta u)^2 dA}{V^2 A} = 1 + \int_A \left( \frac{\Delta u}{V} \right)^2 \frac{dA}{A} \quad (6.45)$$

Ținând seama de (6.40')

$$\beta - 1 = \frac{\alpha - 1}{2} \text{ sau } \beta = \frac{\alpha + 2}{2} \quad (6.46)$$

Valorile coeficientului  $\beta$  sunt date în tabelul 6.1. Interpretarea geometrică a relației (6.42) corespunde fig. 6.6. b.

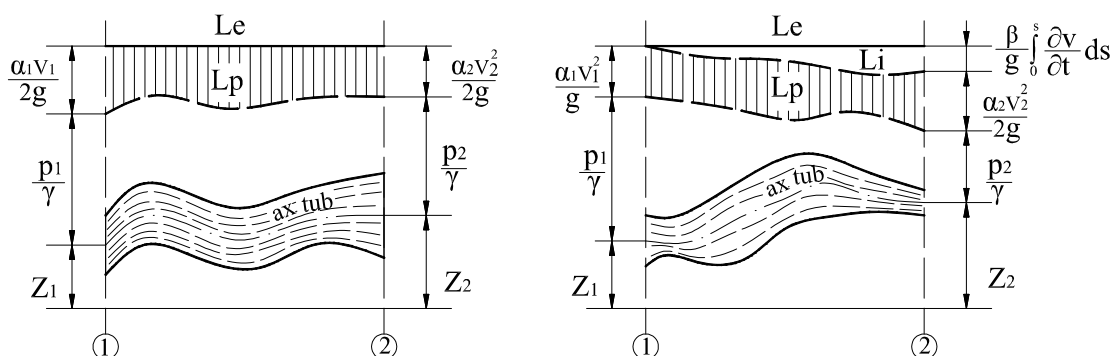


Fig. 6.6. Interpretarea geometrică a ecuației energiei pentru curent de secțiune finită, a. în mișcare permanentă; b. în mișcare semipermanentă

### 6.2.3 Ecuația energiei pentru model de fluid newtonian și real

Deși capitolul tratează dinamica fluidelor euleriene, în cadrul ecuației energiei (pct. 6.2) se cuvine a se dezbate principial și cazul modelelor de lichid newtonian și real, care din punctul de vedere al prezentării implică același rezultat.

Descrierea mișcării lichidului newtonian sau modelului de lichid real trebuie să țină seama de eforturile unitare tangențiale care se dezvoltă în fluidul în mișcare datorită vâscozității și turbulenței. Aceste eforturi tangențiale, expresie a forțelor tangențiale (de frecare), arată că mișcarea are loc cu un "consum de energie"; o parte a energiei hidraulice se transformă în căldură care, din punct de vedere hidraulic reprezintă o "pierdere de energie" sau "pierdere de sarcină".

Față de modelul de lichid eulerian, pentru care energia specifică totală este constantă, pentru modelul de lichid newtonian sau real energia specifică se micșorează în lungul curentului. Notând energia specifică totală în secțiunea 1 cu  $E_1$  și  $E_2$  în secțiunea 2 (aval), pentru modelul de fluid newtonian și real  $E_1 > E_2$ ,

respectiv  $E_1 - E_2 = \Delta E = hr$  ;  $hr$  reprezintă energia specifică consumată de fluid în deplasarea sa de la secțiunea 1 la 2.

Ecuția energiei pentru fir de lichid newtonian (sau real) în mișcarea permanentă va fi:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + hr_{1-2} \quad (6.47)$$

respectiv în mișcarea semipermanentă

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + hr_{1-2} \quad (6.48)$$

Termenul  $hr$  modifică interpretarea geometrică și energetică a ecuației lui Bernoulli,  $hr$  reprezentând geometric înălțimea pierdută (fig. 6.7), iar energetic - energia specifică pierdută.

Linia energetică este o linie strict descrescătoare situată la distanța  $hr$  sub planul orizontal, definit de  $E_l$ . Se poate defini panta hidrolică ( $I_h$ ) sau energetică ( $I_e$ ) medie

$$I_{hm} = \frac{h_r}{s} = \frac{\left( \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)}{s} \quad (6.49)$$

și panta hidrolică (sau energetică locală)  $I_h$ .

$$I_h = \frac{dhr}{ds} = - \frac{d \left( \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right)}{ds} \quad (6.50)$$

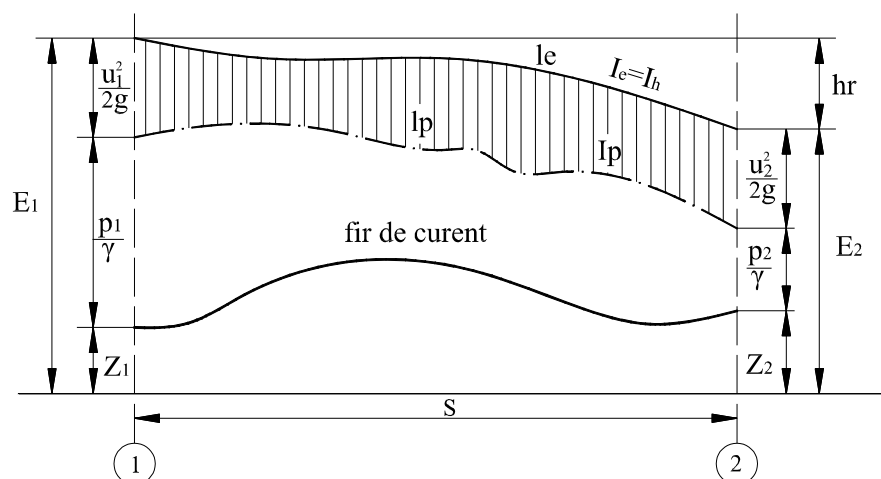


Fig. 6.7. Interpretarea geometrică a ecuației energiei pentru fir de curent newtonian (sau real)

Semnul minus are semnificația fizică: energia specifică scade în lungul firului.

Pentru curent de lichid newtonian (sau real) de secțiune finită, ecuația lui Bernoulli este:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + hr_{1-2} \quad (6.51)$$

pentru mișcare permanentă, și

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{\beta}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + hr_{1-2} \quad (6.52)$$

pentru mișcare semipermanentă.

#### 6.2.4. Aplicațiile ecuației energiei

Ecuația energiei are numeroase aplicații, ea folosindu-se atât la demonstrarea unor probleme teoretice din hidraulică, cât și pentru rezolvarea probleme tehnice concrete.

### 1°. Curgerea lichidelor din rezervoare prin orificii

Se consideră un rezervor din care curge lichidul printr-un orificiu (fig. 6.8).

Aplicând ecuația energiei pentru firul de curent  $AB$  (model de fluid eulerian) sub forma (6.25), particularizată pentru  $u_A=0$  și  $p_A=p_B=p_0$  se obține

$$z_A = \frac{u_B^2}{2g} + z_B,$$

sau

$$u_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh}, \quad (6.53)$$

care este ecuația lui Toricelli.

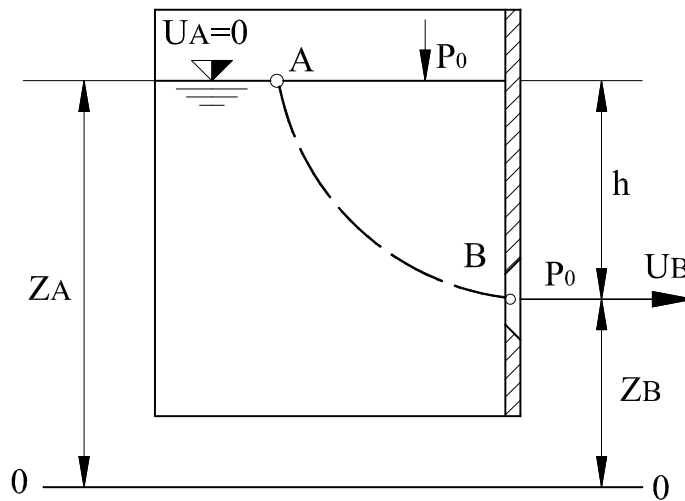


Fig. 6.8. Curgerea lichidului din rezervoare prin orificii

În realitate firele de curent nu devin paralele chiar în secțiunea orificiului (fig. 6.9), ci la o anumită distanță, ceea ce conduce la contracția jetului ce iese din orificiu ( $A_c = \varepsilon A$ ). Pe de altă parte la lichid real, prin mișcare, între secțiunea  $A$  și  $C$  se produc pierderi de sarcină care implică  $u_{real} < u$  ( $u_{real} = \varphi u$ ) astfel că

$$u_{real} = \varphi \sqrt{2gh} \quad (6.54)$$

$$Q = A_c u_{real} = \varepsilon \varphi A \sqrt{2gh} \quad (6.55)$$

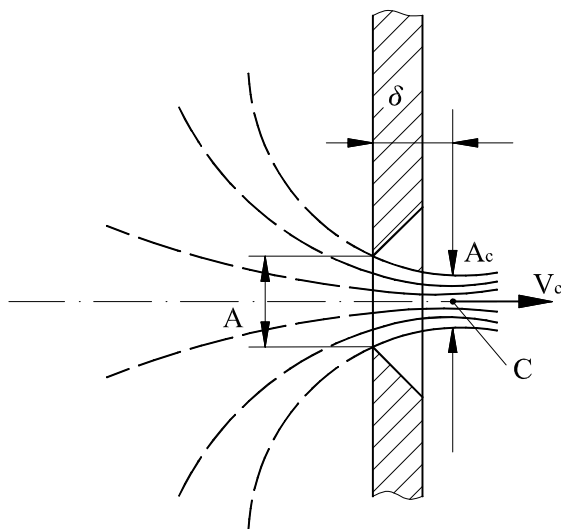


Fig. 6.9. Con tracția jetului lichid

## 2°. Presiunea de impact (stagnare)

Într-un curent orizontal de lichid în punctul A sunt caracteristice cota  $z_A$ , presiunea  $p_A$  și viteza  $u_A$ . În punctul B, unde se interpune în curent un perete solid, normal pe direcția curgerii, parametrii hidraulici vor fi  $z_B$ ,  $p_B$  și  $u_B=0$  (fig. 6.10).

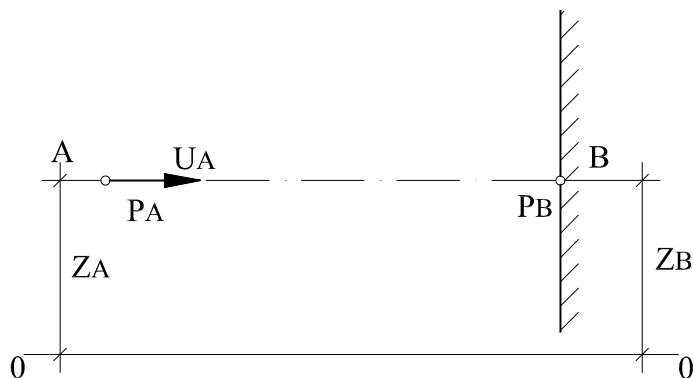


Fig. 6.10. Schema de calcul a presiunii de impact

Presiunea din B este **presiunea de impact** (de stagnare) și se obține din ecuația energiei, aplicată firului de curent eulerian între punctele A și B:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + 0$$

Întrucât  $z_A = z_B$ , rezultă



$$p_B = p_A + \frac{\gamma u_A^2}{2g} \quad (6.56)$$

sau

$$p = p_B - p_A = \frac{\gamma u_A^2}{2g} \quad (6.57)$$

Dacă obstacolul introdus în curentul de lichid este un tub îndoit, având axa paralelă cu direcția de curgere, atunci un astfel de tub devine un instrument de măsurare pentru presiunea de impact și în asociație cu un tub piezometric, un instrument de măsurare a termenului cinetic (fig. 6.11).

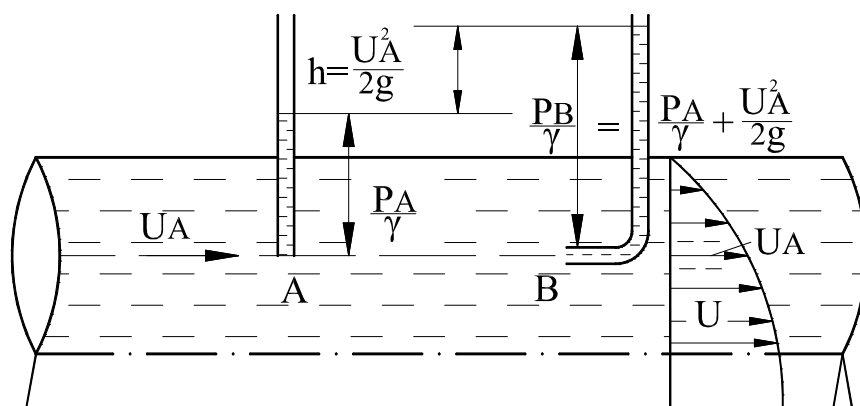


Fig. 6.11. Tubul Pitot

Asociația în această formă a celor două tuburi este tubul Pitot și se folosește pentru măsurarea vitezei locale. Tubul Pitot măsoară viteza medie pentru secțiune sa, însă în comparație cu secțiunea de curgere aceasta este foarte mică și se poate considera că se măsoară practic viteza locală în A.

Cu ajutorul tubului îndoit B se măsoară energia totală a firului, iar cu tubul piezometric energia potențială din punctul A. Diferența de nivel "h" permite determinarea vitezei  $u_A$  cu ajutorul formulei lui Toricelli. Corectitudinea măsurărilor depinde de calitatea execuției și pozării celor două tuburi. Tubul drept nu trebuie să capteze energie cinetică, buza sa să fie paralelă cu firele de curent, iar la buza tubului îndoit viteza trebuie să fie nulă ( $u_B=0$ ). Imperfecțiunile de execuție a tuburilor se iau în considerare prin introducerea unui coeficient de corecție  $k$  în relația vitezei, care se determină experimental

$$u = k\sqrt{2gh} \quad (6.58)$$

Tubul Pitot de obicei este îmbrăcat cu tubul piezometric (fig. 6.12), iar înălțimea cinetică se citește pe un manometru diferențial  $\left(h = \frac{P_B - P_A}{\gamma}\right)$ .

Prizele piezometrului se execută în generatoarea tubului, la o distanță de minimum  $3d$ , unde presiunea se restabilește după conturbarea sa de către tub. Tubul cu vârful semisferic este cunoscut sub denumirea de tub Pitot-Prandtl, iar cel cu vârf tronconic tub Pitot-Darcy. Distribuția presiunii pe tubul Pitot-Prandtl are forma diagramei din fig. 6.13.

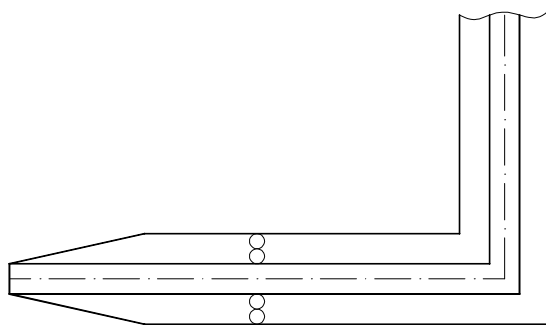


Fig. 6.12. Tubul Pitot-Darcy

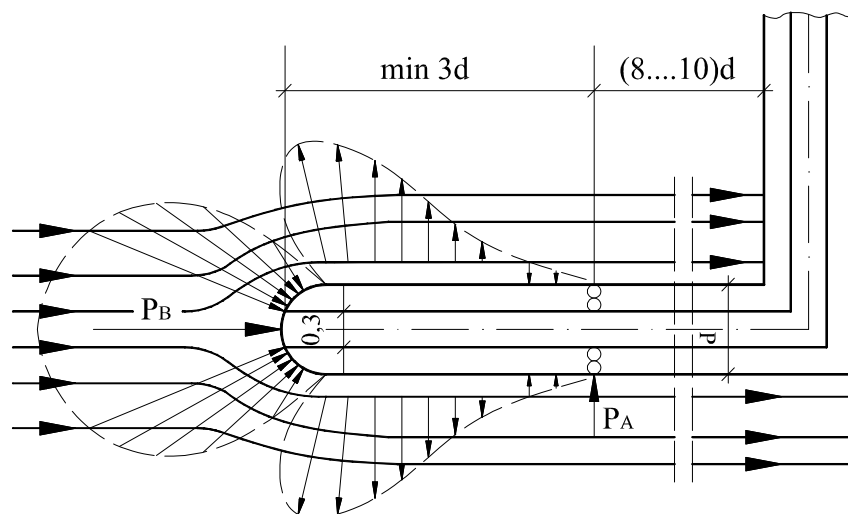


Fig. 6.13. Tubul Pitot-Prandtl

### 3°. Măsurarea vitezei prin strangularea locală a secțiunii

Prin modificarea (micșorarea apoi lărgirea) secțiunii de curgere se modifică distribuția energiei specifice pe termeni din ecuația Bernoulli, se modifică raportul energiei cinetice și potențiale.

Strangularea pune în evidență parametrii măsurabili pe baza cărora se poate determina viteza medie și implicit, debitul.

Asemenea aparate sunt: tubul Venturi, diafragmele, apometru cu strangulare generalizat (ISCH) etc. Ecuația lor caracteristică se obține utilizând și ecuația energiei.

#### a. Tubul Venturi

Tubul Venturi (fig. 6.14), sau venturimetrul, este compus dintr-un tub conic (sau conoidal) convergent, continuat cu un tub conic divergent.

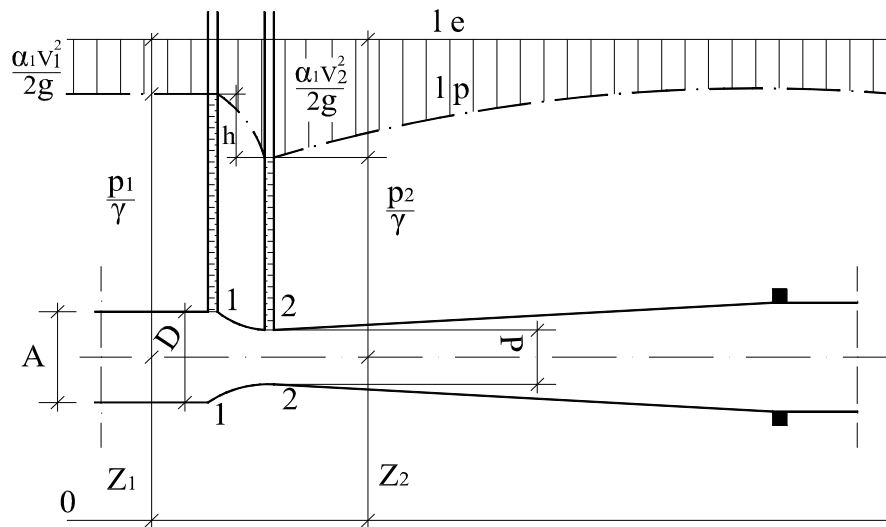


Fig. 6.14. Schema venturimetrului

Tot ansamblul este intercalat pe conducta unde se măsoară debitul. Venturimetrului i se atașează un manometru diferențial cu prizele sau traductoarele de presiune în secțiunea 1 și 2. Dacă în locul manometrului diferențial se prevede un element secundar integrator de debit în timp, se obține volumul de lichid ce trece prin secțiunea de măsurare. În mișcare permanentă ecuația de continuitate are forma:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \text{ cu } A_1 = \frac{\pi D^2}{4}, A_2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Presupunând venturimetrul cu ax orizontal rezultă  $z_1 = z_2$ . Din ecuația energiei pentru curent de lichid cu secțiunea finită (6.14) rezultă:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g}$$

Datorită micșorării diametrului între secțiunile 1 și 2 se redistribuie energia pe termeni; În 2 crește viteza și termenul cinetic (implicit) și scade presiunea  $p_2 < p_1$ , punându-se în evidență diferența de presiune  $p_1 - p_2$  măsurabilă. Ținând seama de ecuația de continuitate, se obține

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} \left[ \alpha_2 - \alpha_1 \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{V_2^2}{2g} \left[ \alpha_2 - \alpha_1 \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

respectiv viteza medie

$$V_2 = \frac{\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \left( \frac{d}{D} \right)^4}} \quad (6.59)$$

Revenind la ecuația de continuitate rezultă debitul

$$Q = \frac{\pi d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \left( \frac{d}{D} \right)^4}} = k' \sqrt{h} \quad (6.60)$$

Fiindcă s-a lucrat cu modelul de fluid eulerian și de fapt intervin pierderi de sarcină, precum și imperfecțiunile de execuție ale venturimetrului, acestea se etalonează și ecuația lor se corectează cu un factor "k". Notând  $k = k' \cdot k''$  se obține

$$Q = k \sqrt{h} \quad (6.61)$$

care poartă numele de cheia debitelor venturimetrului.

Deseori astfel de debitmetre sunt utilizate la automatizarea debitmetrică a stațiilor de pompare. Tubul Venturi este echipat cu traductor de presiune diferențială, extractor de rădăcină pătrată, element secundar de comparare a debitului cerut (măsurat) și cel dat de pompe, element decizional - care ia hotărârea de reglare (continuă sau discretă) și elementele de execuție.

### b. Diafragmele (fig. 6.15)

Diafragmele reprezintă tot strânguturi ale secțiunii de curgere sub formă circular-axială (fig. 6.15) sau segment de cerc (fig. 6.16), ele fiind orificii în perete frontal pe direcția curgerii. Firele de curent sunt mai pronunțat deranjate decât în cazul venturimetrelor, în aval se formează, între paramentul aval al diafragmei și peretele conductei, o serie de vârtejuri, iar în amonte, o zonă de stagnare (fig. 6.17).

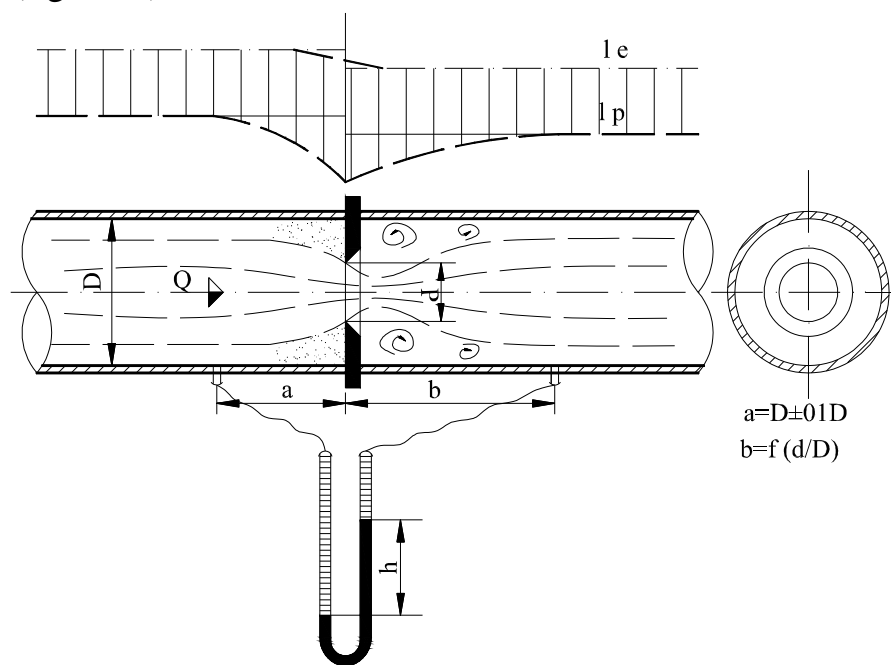


Fig. 6.15. Diafragma circulară

Diafragmele segment se folosesc în special când fluidul transportă și solid sau în cazul fluidelor bifazice (de solid-lichid, solid-gaz), pentru a preîntâmpina depunerile în amonte.

Teoria diafragmelor corespunde teoriei generale a măsurării debitului prin metoda strânguturii secțiunii, rezultând pentru un fluid compresibil

$$Q = \alpha \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho_1}} \quad (6.62)$$

unde  $\varepsilon$  este coeficientul de detentă (dat tabelar). Pentru lichidele incompresibile  $\varepsilon = 1$  și se ajunge la relația de forma (6.60) sau (6.61), unde  $k$  ține seama și de poziționarea prizelor de presiune, care, la rândul lor, pot fi cu cameră inelară, în flanșe sau venă contractă. Presiunile amonte și aval ar trebui măsurate la anumite distanțe de elementul primar - în amonte într-o zonă în care presiunea să nu fie influențată de șocul vanei asupra elementului primar, iar în aval, în secțiunea contractată. Plasarea prizelor lângă diafragmă implică necesitatea unor corecții determinate pe cale experimentală.

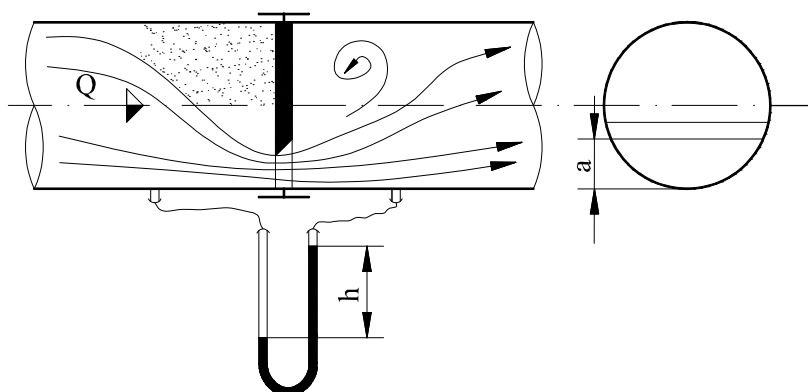


Fig. 6.16. Diafragmă segment

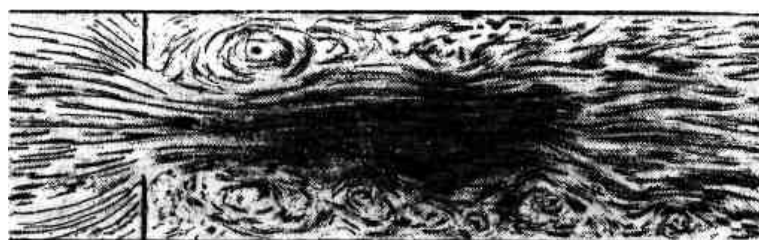


Fig. 6.17. Aspectul curgerii printr-o diafragmă.

Sub denumirea de element primar se înțelege diafragma propiu-zisă și prizele de presiune, iar elementul secundar aparatul pentru măsurarea presiunilor sau diferențelor de presiune și legăturile la prizele de presiune.

Deseori diaframelor li se atașează ajutoraj sau ele sunt profilate după forma ajutorajului conoidal, ceea ce mărește coeficientul de debit și reduce

pericolul apariției cavitației. Ecuația lor este de forma (6.61) sau (6.62), necesită etalonare pentru domeniul debitelor utilizate. Aspectul curgerii corespunde fig. 6.18.

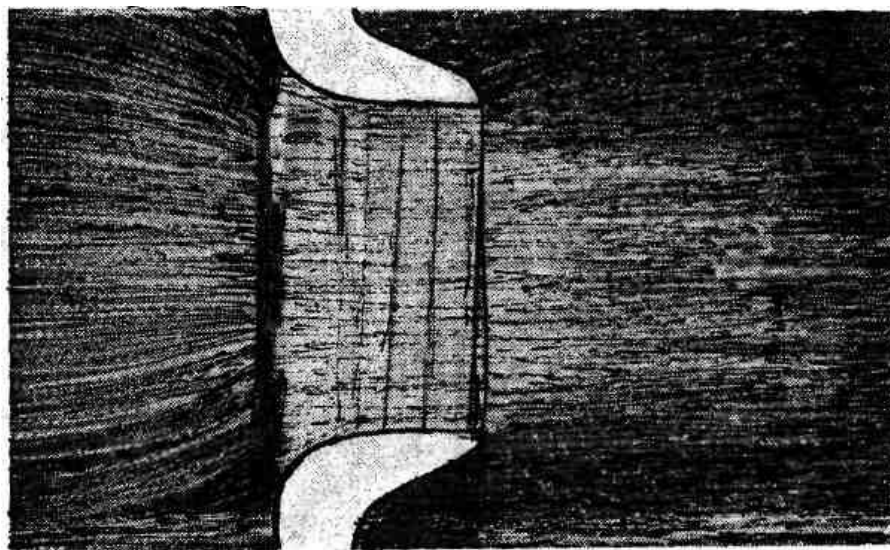


Fig. 6.18. Aspectul curgerii prin diafragmă conoidală.

### c. Debitmetru generalizat prin strangularea secțiunii (fig. 6.19)

Acest debitmetru constă din intersecția normală, verticală, asimetrică sau simetrică a conductei cu un element cilindric, de preferat cu același diametru cu conducta. A fost normalizat la ICH și se folosesc frecvent pe tronsoane orizontale de conducte pentru măsurarea debitelor sau volumelor lichide.

Teoria de ansamblu pentru aceste debitmetre este aceeași cu cea a Venturimetrelor, însă conturbarea diferită a curgerii implică plasarea prizelor de presiune în alte secțiuni. Corecțiile necesare, datorită poziționării prizelor de presiune și imperfecțiunilor de execuție, se introduc prin coeficienți determinați experimental. Relația generală a debitului este (6.61). În unele cazuri, ca elemen secundar, se utilizează contor de apă, pe o legătură cu un anumit modul de rezistență, obținând un apometru (înregistrator de volum) care necesită etalonare.

De fapt toate debitmetrele cu strangulare prin înregistrarea diferenței de presiune în timp, permit determinarea volumelor de apă tranzitate. La toate debitmetrele prin strangularea secțiunii se limitează viteza  $V_2$  (din secțiunea strangulată) astfel ca presiunea  $p_2$  de aici să nu scadă la valoarea presiunii de vaporizare. În astfel de situații apare cavitația. Limitarea  $p_2 = Cp_{vap}$  (cu  $C > 1$ )

pentru debitul maxim de măsurat este o restricție la proiectarea debitmetrelor, prin care se previne apariția fenomenului de cavitație.

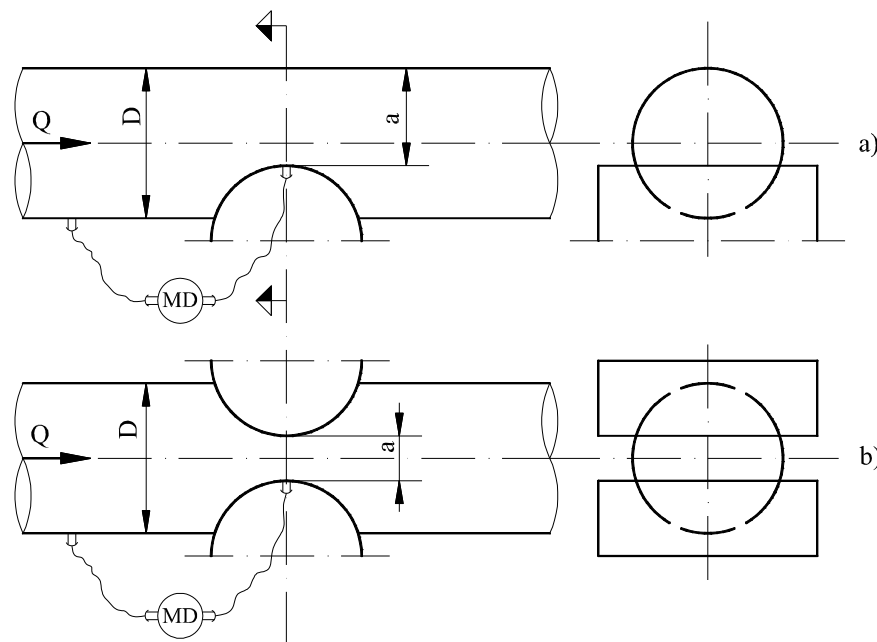


Fig. 6.19. Debitmetru generalizat tip ICH. a - cu strangulare asimetrică; b - cu strangulare simetrică; MD-manometru diferențial sau contor de apă.

#### 4°. Folosirea ecuației energiei (Bernoulli) în calculul sistemelor hidraulice închise (conduce)

Tehnica inginerescă utilizează des interpretarea (și reprezentarea) geometrică a ecuației energiei pentru sisteme hidraulice închise, care permite o vedere generală a distribuției presiunilor, vitezelor și pierderilor de sarcină. Pe lângă ecuația energiei se utilizează frecvent ecuația de continuitate. În majoritatea cazurilor se lucrează în presiuni relative-față de cea atmosferică. Important este să se țină seama de condițiile de valabilitate a acestei ecuații în mișcare permanentă - în lungul unei linii de curent, linii de vârtej sau o linie de mișcare elicoidală.

Trasarea liniilor energetice și piezometrice pleacă de la secțiuni de comandă, unde se cunosc parametrii mișcării. Aceste secțiuni deseori coincid cu capetele (amonte sau aval) ale sistemului hidraulic închis.

##### a. Instalație hidraulică cu rezervoare cu nivel liber (fig. 6.20)

Parametrii de comandă în secțiunea A sunt:  $z_A$ ,  $p_A=0$  și  $V_A=0$ , iar în secțiunea B:  $z_B$ ,  $p_B=0$  și  $V_B=0$ . Termenii energiilor specifice se obțin prin aplicarea ecuației continuității și energiei între o secțiune cu parametrii cunoscuți și



secțiunea unde trebuie să calculăm acești parametri. Întâi se trasează din aproape în aproape linia energetică, parcurgând sistemul din amonte spre aval ori invers, apoi linia piezometrică.

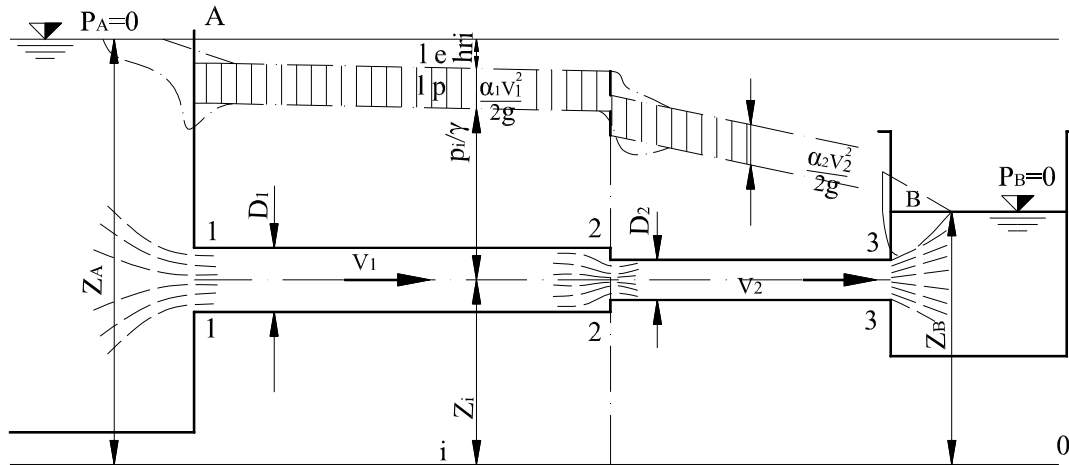


Fig. 6.20. Instalație hidraulică cu rezervoare cu nivel liber

**b. Instalație hidraulică alimentată din rezervor cu pernă de aer** (fig. 6.21).

Secțiunile de comandă sunt A, cu:  $z_A, p_A, V_A = 0$ , respectiv B, cu:  $z_B, p_B, V_B = 0$

### 6.3. Puterea curentului în secțiune

Energia specifică a unui curent este  $H = \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$ , energia totală fiind produsul între aceasta și greutatea lichidului ( $G = \gamma W$ ), deci:

$$E = GH = \gamma WH \quad (6.63)$$

Puterea curentului este energia dezvoltată în unitate de timp

$$P = \frac{E}{T} = \gamma H \frac{W}{T} = \gamma QH = p_i Q \quad (6.64)$$

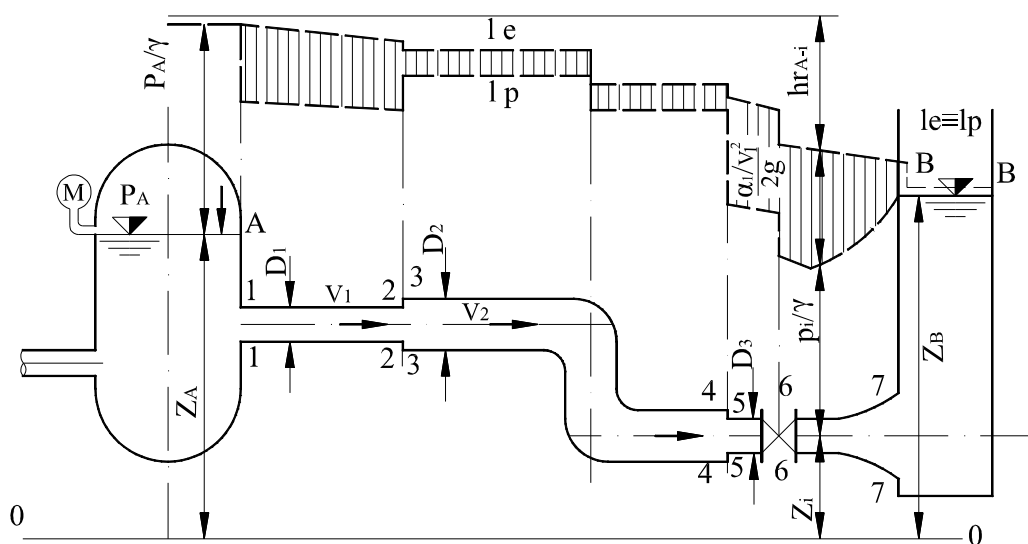


Fig. 6.21. Instalație hidraulică cu rezervor cu pernă de aer sub presiune

Ecuția puterii conține puterea cinetică  $p_c = \gamma Q \frac{\alpha V^2}{2g}$  și puterile potențiale - de poziție  $p_z = \gamma Q z$  și de presiunea  $P_p = Q p$ . Când termenii ecuației (6.64) sunt exprimați în unitățile de bază ale S.I. puterea rezultă în watt. Într-o secțiune, în mișcare permanentă puterea este constantă.

În cazul când mișcarea fluidului are loc printr-o conductă, pe care se află un motor hidraulic (turbină), iar aceasta acționează un receptor consumator de energie, diferența puterilor curentului amonte și aval de turbină este puterea cedată turbinei (fig. 6.22). Fiindcă transformarea energiei prin turbină are loc cu pierderi, puterea preluată de receptor este inferioară puterii cedate de curent

$$P_T = \eta_T (p_1 - p_2) = \eta_T \gamma Q H \quad (6.65)$$

unde  $H = H_1 - H_2$  și  $\eta_T < 1$  randamentul turbinei.



frecări (interne și cu pereții) în căldură și reprezintă energia necesară în unitate de timp pentru transportul debitului  $Q$  al fluidului de greutate specifică  $\gamma$  pe distanța " $l$ ".

$$P_1 - P_2 = \gamma Q (H_1 - H_2) = \gamma Q \left[ \left( \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \right] \quad (6.67)$$

În cazul unui curent uniform cu suprafața liberă, presiunile și vitezele fiind egale în secțiuni succesive, puterea disipată în transport corespunde energiei specifice  $H = z_1 - z_2$  și debitului  $Q$ .

$$P = \gamma Q (z_1 - z_2) \quad (6.68)$$

Pe sectoare economic favorabile, parte a acestei puteri se transformă în putere a unui motor hidraulic (hidrocentrală, roată de apă etc).

### Aplicații ale ecuației puterii curentului

Ecuația puterii se folosește la dimensionarea ejectoarelor.

Ejectorul este un dispozitiv care folosește o cantitate de apă cu viteză mare la ieșirea dintr-un confuzor (A) - la al cărui capăt aval se produce o presiune vacumatică - și o altă cantitate de lichid este absorbit prin conducta (B), iar amestecul se refulează prin difuzorul (C) - fig. 6.24. Din ecuația energiei între 1-2 se obține  $p_2 \sim p_3 \sim p_4$ . Din ecuația energiei între 3-6 se obține  $Q_2$ , apoi din ecuația energiei între 4-5 se obține  $p_5$ . Condiția de nod este  $Q_3 = Q_1 + Q_2$ , iar ecuația puterii este

$$Q_1 p_1 = Q_2 p_2 + Q_3 p_3 + \Delta P \quad (6.69)$$

unde  $\Delta P$  este pierderea de putere prin dispozitiv.

În tehnică ejectoarele se folosesc la evacuarea apelor aflate la cote joase, la amorsarea pompelor, depresionarea conductelor de evacuare a turbinelor, dozarea de soluții de dezinfectant în apa potabilă, a soluției de îngrășămintă în apa de irigație, trompă de vid în laboratoare și medicină, suveică pneumatică în țesătorie ș.a.

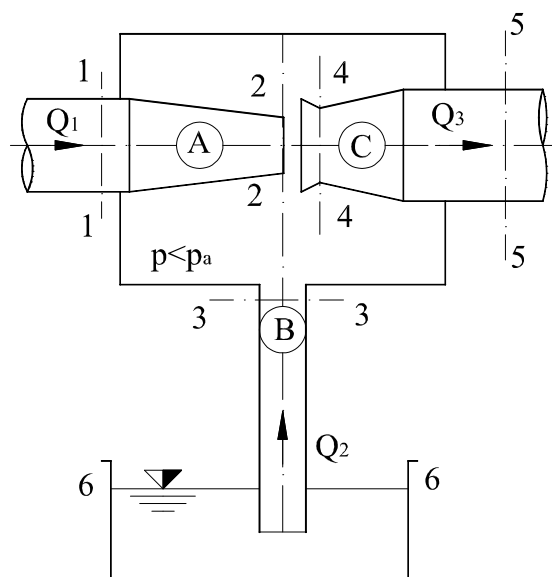


Fig. 6.24. Schema ejectoarelor

#### 6.4. Teorema impulsului (cantității de mișcare) și teorema momentului cinetic

Teorema impulsului și a momentului cinetic, sunt des utilizate în hidraulică, deoarece servesc atât pentru demonstrarea relațiilor proprii hidraulicii (salt, unde, pierderi locale de sarcină, ecuațiile turbomașinilor hidraulice, portantă) cât și pentru determinarea acțiunii exercitate de fluid în mișcare asupra suprafețelor rigide cu care vine în contact. O largă întrebuințare au aceste teoreme pentru mișcarea permanentă, fiindcă - în cazul sistemului de puncte materiale, reprezentat de lichid în mișcare-interesează numai datele ce privesc suprafața domeniului mișcării nu și elementele acesteia în interiorul lichidului.

##### 6.4.1. Forma generală a teoremei impulsului și momentului cinetic

Sistemul de lichid se definește ca fiind o cantitate de lichid format tot timpul din aceleași particule de fluid. Domeniul ocupat de un sistem se va nota cu  $D(t)$ , deoarece variază în timp ca poziție și formă. Acceptând discretizarea lichidului-fiecare particulă este considerată punctuală în centrul său de greutate prin analogie cu un sistem de puncte materiale se definesc impulsul (cantitatea de mișcare)  $\bar{I}$  și momentul cinetic  $M$  în raport cu originea axelor de coordonate astfel:

$$\bar{I} = \int_{D(t)} \bar{u} dm \quad (6.70)$$

$$\bar{M} = \int_{D(t)} \bar{r} \times \bar{u} \cdot dm \quad (6.71)$$

în care  $dm = \rho dW$  este masa volumului elementar din domeniul  $D(t)$ ,  $\bar{u}$  – viteza centrului de greutate al particulei, iar  $\bar{r}$  - vectorul de poziție al centrului de greutate al particulei.

Pentru un sistem de "n" puncte materiale discrete teorema impulsului și momentului cinetic este

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{u}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (6.72)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{u}_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad (6.73)$$

unde  $m_i, \bar{u}_i, \bar{r}_i$  sunt masa, viteza și vectorul de poziție ale punctului material  $i$  iar  $\bar{F}_i$ , forța exterioară aplicată particulei.

Mișcarea particulelor unui sistem de lichid are loc după o lege analoagă punctelor materiale discrete și relațiile precedente se pot extinde pentru un sistem de lichid.

**1°. Teorema impulsului.** *Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem lichid este egală cu suma forțelor exterioare exercitate asupra sistemului*

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho \bar{u} dW = \sum \bar{F}_e \quad (6.74)$$

**2°. Teorema momentului cinetic.** *Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem lichid este egală cu momentul rezultat al forțelor exercitate asupra sistemului, toate momentele fiind determinate față de același punct*

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \bar{r} \times \rho \bar{u} dW = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (6.75)$$

Relațiile (6.72 și 6.73) se pot obține din a doua lege a lui Newton însă (6.74) și (6.75) nu, și trebuie să fie considerate axiome, valabilitatea lor fiind verificată prin totalitatea consecințelor lor.

Însă când sistemul lichid se reduce la o singură particulă relațiile (6.74) și (6.75) sunt similare cu (6.72) și (6.73). Aplicarea ecuațiilor (6.74) și (6.75) cazurilor practice necesită transformarea lor în alte forme, referire făcându-se numai mișcării permanente. Se definește o suprafață fixă de control  $A$  care mărginește domeniul  $D$  și care are versorul normalei exterioare  $\bar{n}$ . Suprafața  $A$  este împărțită în elemente  $dA$  (fig. 6. 25).

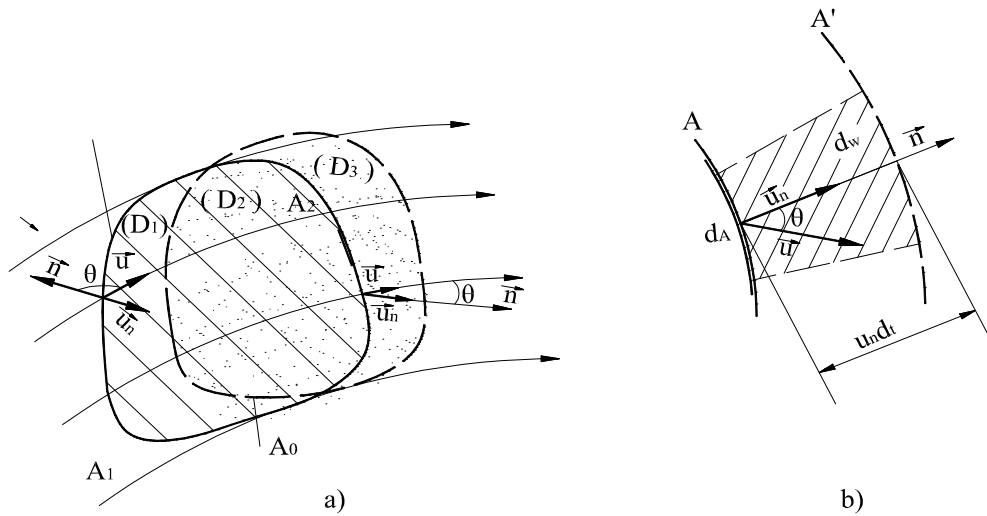


Fig. 6.25. Variația în timp și spațiu a impulsului masei lichide

**1°. Teorema impulsului.** În mișcarea permanentă a unui lichid impulsul ce trece printr-o suprafață de control în unitatea de timp este egală cu suma forței exterioare exercitate asupra lichidului din interiorul suprafeței de control.

$$\int_A \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dA = \sum \bar{F}_e \quad (6.76)$$

Sistemul la un moment dat  $t$  ocupă domeniul  $D(t) = D_1 + D_2$  și este limitat de  $A$ , iar în momentul  $t + \Delta t$ , ocupă domeniul  $D(t + \Delta t) = D_2 + D_3$ . Se notează cu

$$I_t^{(i)} = \int_{D(t)} \rho \bar{u} dW. \text{ Din definiția derivatei se obține}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho \bar{u} dW = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{D(t+\Delta t)} \rho \bar{u} dW - \int_{D(t)} \rho \bar{u} dW \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{I}_{t+\Delta t}^{(3)} - \bar{I}_t^{(1)}}{\Delta t} \quad (6.77)$$

deoarece diferența integralelor de sub limită se pot scrie

$$\left( \bar{I}_{t+\Delta t}^{(2)} + \bar{I}_{t+\Delta t}^{(3)} \right) - \left( \bar{I}_t^{(1)} + \bar{I}_t^{(2)} \right) = \bar{I}_{t+\Delta t}^{(3)} - \bar{I}_t^{(1)}$$

căci în mișcarea permanentă  $\bar{I}_t^{(2)} = \bar{I}_{t+\Delta t}^{(2)}$ . Notând cu  $\theta$  unghiul dintre  $\bar{u}$  și  $\bar{n}$ , iar  $\bar{u}_n$  componenta normală a lui  $\bar{u}$ , pe baza fig. 6.25. b, volumul elementar este  $dW = u_n dt dA = u \cos \theta \Delta t dA = \bar{u} \cdot \bar{n} \cdot \Delta t \cdot dA$ .

Suprafața  $A$  este împărțită în porțiuni pe care intră lichid în domeniu  $A_I$ , pe care iese lichid  $A_2$  și pe care nu circulă lichid  $A_0$  ( $A = A_0 + A_I + A_2$ ). Pentru suprafața de ieșire rezultă impulsul

$$\bar{I}_{t+\Delta t}^{(3)} = \int_{D_3(t+\Delta t)} \rho \bar{u} dW = \int_{A_2} \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t \cdot dA \quad (6.78)$$

și analog pentru intrare pe volumul  $D_I$ , elementul de volum este

$$dW = u_n \Delta t dA = u \cos(\pi - \theta) \Delta t dA = -u \cos \theta \Delta t dA = -\bar{u} \cdot \bar{n} \Delta t dA$$

iar impulsul pe suprafața de intrare  $A_I$  devine

$$\bar{I}_t^{(1)} = \int_{D_I(t)} \rho \bar{u} dW = - \int_{A_I} \rho (\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t dA \quad (6.79)$$

Făcând înlocuirile (6.77) devine

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho \bar{u} dW = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{A_2} \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t dA + \int_{A_I} \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t dA \right] = \int_A \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dA \quad (6.80)$$



fiindcă:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} = 1$  și  $\int_{A_0} \rho \bar{u}(\bar{u}, n) dA = 0$  deoarece pe  $A_0$  nu circulă lichid. Din  $\bar{u} dm = \rho \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t dA$  se observă că aceasta este cantitatea de mișcare, deci prin  $dA$  trece în unitatea de timp cantitatea de mișcare  $\rho \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) dA$ , și integrala din (6.76) reprezintă cantitatea de mișcare ce trece în unitatea de timp prin întreaga suprafață de control  $A$  (debitul de cantitate de mișcare prin  $A$ ).

**2°. Teorema momentului cinetic.** *În mișcarea permanentă a unui lichid, momentul cinetic ce trece printr-o suprafață de control în unitatea de timp este egală cu suma momentelor exterioare exercitate asupra lichidului din interiorul suprafeței de control, toate momentele fiind calculate în raport cu același punct.*

$$\int_A \bar{r} \times \rho \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) dA = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (6.81)$$

Notând  $\bar{r} \times \bar{u} = \bar{N}$ , (6.77) ia forma

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho \bar{N} dW = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e$$

și după un procedeu analog celui precedent rezultă

$$\int_A \rho \bar{N}(\bar{u}, \bar{n}) dA = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e$$

Dar,  $\bar{r} \times \rho(\bar{u} \cdot \bar{n}) \Delta t dA = \bar{r} \times \bar{u} dm$  este momentul cinetic ce trece în timpul  $\Delta t$  prin  $dA$ , deci  $\bar{r} \times \rho(\bar{u} \cdot \bar{n}) dA$  este momentul cinetic ce trece în unitatea de timp prin întreaga suprafață de control  $A$  (debitul de moment cinetic  $A$ ).

### 6.4.2. Teorema impulsului și momentului cinetic pentru lichid din tubul de curent

Ecuațiile (6.76) și (6.81) se simplifică mult dacă suprafața de control a domeniului  $D$  este formată dintr-o porțiune  $A_0$  a unui tub de curent și două secțiuni drepte ale acestuia  $A_1$ , prin care intră lichid în  $D$  și  $A_2$ , prin care iese lichid din  $D$  (fig. 6.26).

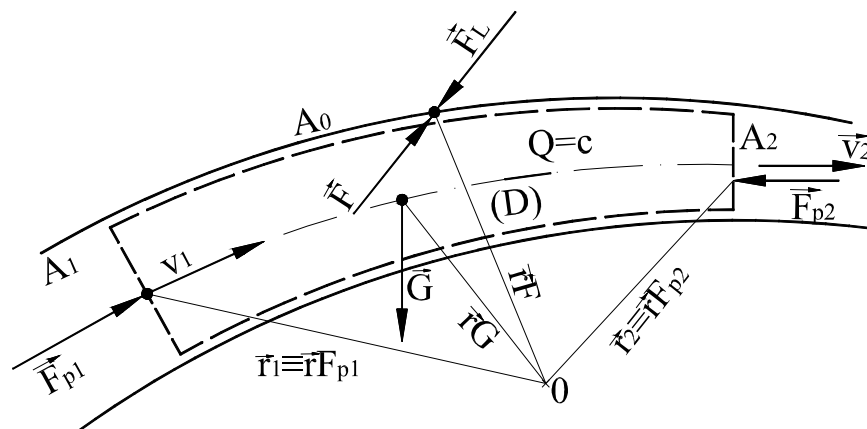


Fig. 6.26. Schemă pentru teorema impulsului și momentului cinetic pentru un curent permanent din tub

Suprafețele  $A_1$  și  $A_2$  se aleg astfel ca în vecinătatea lor liniile de curent să fie drepte paralele între ele. În mișcare permanentă debitului  $Q$  pe secțiunile  $A_1$  și  $A_2$  îi corespund vitezele medii  $V_1$  și  $V_2$ .

**1°. Teorema impulsului.** În mișcarea permanentă a unui lichid într-un tub de curent, diferența dintre cantitatea de mișcare ce iese din  $D$  prin  $A_2$  și ce intră prin  $A_1$  în unitatea de timp, este egală cu suma forțelor exterioare exercitate asupra lichidului din  $D$ .

$$\rho Q (\beta_2 \bar{V}_2 - \beta_1 \bar{V}_1) = \sum \bar{F}_e \quad (6.82)$$

Pentru  $A_1$  se obține  $\bar{u} \cdot \bar{n} = -u$ , pe  $A_2$   $\bar{u} \cdot \bar{n} = u$  iar pe  $A_0$   $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ , deci (6.76) se poate scrie

$$\int_{A_2} \rho \cdot \bar{u} \cdot u \cdot dA - \int_{A_1} \rho \cdot \bar{u} \cdot u \cdot dA = \sum \bar{F}_e \quad (6.83)$$

$A_1$  și  $A_2$  fiind secțiuni drepte, liniile de curent sunt normale pe aceste suprafețe și utilizând vitezele medii pe astfel de secțiune  $A$  se poate scrie:

$$\int_A \bar{u} \cdot u \cdot dA = \beta \cdot \bar{V} \cdot VA \quad (6.84)$$

unde  $\beta$  este coeficientul de corecție al cantității de mișcare calculată cu viteza medie față de cea reală, prin ecuația de definiție (6.45) și numeric egal cu coeficientul lui Boussinesque:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{u}{v} \right)^2 dA \quad (6.85)$$

Notând  $\beta_1$  și  $\beta_2$  corespunzătoare secțiunilor  $A_1$  și  $A_2$ , respectiv din continuitate  $V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$ , din (6.83) rezultă (6.82). În cazuri practice se poate considera  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  (6.82) devenind:

$$\rho Q (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) = \sum \bar{F}_e \quad (6.86)$$

Pentru domeniul  $D$  din fig. 6.26 forțele exterioare sunt greutatea lichidului  $\bar{G}$ , forțele rezultate din presiune pe suprafețele de control  $A_1, A_2, A_0$  respectiv  $\bar{F}_{p1}, \bar{F}_{p2}$  și  $\bar{F}_l$ . Deseori interesează forța cu care lichidul din tub acționează asupra suprafeței laterale  $A_0$ , respectiv  $\bar{F} = -\bar{F}_l$  care rezultă din

$$\bar{F} = \rho Q (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + \bar{F}_{p1} + \bar{F}_{p2} + \bar{G} \quad (6.86')$$

**2°. Teorema momentului cinetic.** *În mișcarea permanentă a unui lichid într-un tub de curent, diferența dintre momentul cinetic ce iese din  $D$  prin  $A_2$  și mometul cinetic ce intră în  $D$  prin  $A_1$  în unitatea de timp, este egală cu suma momentelor forțelor exterioare exercitate asupra lichidului din  $D$ , toate momentele fiind calculate în raport cu același punct.*

$$\rho Q (\beta_2' \bar{r}_2 \times \bar{V}_2 - \beta_1' \bar{r}_1 \times \bar{V}_1) = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (6.87)$$

Procedând ca în cazul precedent se poate scrie:

$$\rho Q \int_{A_2} \bar{r} \times \bar{u} \cdot dA - \rho Q \int_{A_1} \bar{r} \times \bar{u} \cdot u dA = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e, \quad (6.88)$$

introducând viteza medie  $\int_A \bar{r} \times \bar{u} \cdot u \cdot dA = \beta' \bar{r} \times \bar{V} \cdot VA$ , unde  $\beta'$  este coeficientul momentului cinetic. Relatia pentru  $\beta'$  este identica cu (6.85), deci  $\beta' = \beta$  și, particular, se poate lua  $\beta' = 1$  în calcule practice. Astfel din (6.88) și (6.81) se obține (6.87) și, respectiv,

$$\rho Q (\bar{r}_2 \times \bar{v}_2 - \bar{r}_1 \times \bar{v}_1) = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (6.89)$$

Față de un reper neinertial, caracterizată prin viteza  $\bar{V}_0(t)$  și viteza unghiulară  $\bar{\omega}(t)$  a originii  $O$ , cu  $\bar{r}_{li} = \bar{r}_0 + \bar{r}_i$  și  $\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_t = \bar{V}_r + \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$  rezultă:

$$\frac{d\bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \bar{a}_0 + \bar{\omega}_x \times \bar{r} + \bar{\omega}_x \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega}_x \times \bar{V}_r \quad (6.90)$$

și ecuația generală a teoremei impulsului și momentului cinetic vor fi:

$$\int_A \rho \bar{V}_r \cdot (\bar{V}_r \cdot \bar{n}) dA = \sum \bar{F}_e - \int_D \rho \left[ \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r \right] dW \quad (6.91)$$

$$\int_A \bar{r} \times \rho \bar{V}_r (\bar{V}_r \cdot \bar{n}) dA = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e - \int_D \bar{r} \times \rho \left[ \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r \right] dW \quad (6.92)$$

care pentru  $D$ , o porțiune din tubul de curent, delimitat de două secțiuni normale  $A_1$  și  $A_2$ , cu  $A = A_0 + A_1 + A_2$ , devin:

$$\rho Q (\bar{V}_{r2} - \bar{V}_{r1}) = \sum \bar{F}_e - \int_D \rho \left[ \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r \right] dW \quad (6.93)$$

$$\rho Q (\bar{r}_2 \times \bar{V}_{r2} - \bar{r}_1 \times \bar{V}_{r1}) = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e - \int_D \bar{r} \times \rho \left[ \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r \right] dW \quad (6.93')$$

unde s-a considerat  $\beta = \beta' = 1$ .

### Observații

a) Dacă în interiorul volumului de control există corpuri rigide suprafețele acestora trebuie considerate aparținând suprafeței de control. Alegerea suprafețelor de control corespunde dezideratului ca elementele sale să se calculeze cât mai ușor.

b) Ecuațiile teoremei impulsului și momentului cinetic sunt valabile modelelor de lichid Eulerian, Newtonian și real.

c) În calculele practice ecuațiile obținute nu se utilizează sub forma lor vectorială, ci sub formă proiectată după direcția axelor unui triedru cartezian.

d) În cazul curenților ramificați, cu  $m$  secțiuni de intrare și  $n$  secțiuni de ieșire ecuațiile (6.86) și (6.89) devin:

$$\rho \left( \sum_{i=1}^n Q_{ei} \bar{V}_{ei} - \sum_{i=1}^m Q_{ii} \bar{V}_{ii} \right) = \sum \bar{F}_e \quad (6.94)$$

și

$$\rho \left( \sum_{i=1}^n Q_{ei} \times \bar{r}_{ei} \times \bar{V}_{ei} - \sum_{i=1}^m Q_{ii} \times \bar{r}_{ii} \times \bar{V}_{ii} \right) = \sum \bar{F}_e \times \bar{r}_e \quad (6.95)$$

### 6.4.3. Aplicațiile teoremei impulsului și momentului cinetic

#### 1°. Reacțiunea pereților conductelor fixe la mișcarea uniformă al unui fluid Newtonian

La mișcarea unui fluid Newtonian sau real în conducte pereții opun rezistență mișcării datorită eforturilor tangențiale ce apar la suprafața de contact între fluid și perete. Se consideră o conductă, de secțiune normală constantă, înclinată cu unghiul  $\theta$  față de orizontală (fig. 6.27).

La mișcarea uniformă viteza este constantă în lungul curenului  $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}$ , respectiv  $A_1 = A_2 = A$ .

Aplicând ecuația (6.86'), proiectată în lungul conductei, se obține

$$F = p_1 A - p_2 A + G \sin \theta$$

Greutatea fluidului, de greutate specifică  $\gamma$ , în volumul de control este  $G = \gamma A l$  iar  $l \cdot \sin \theta = z_1 - z_2$ ; după înlocuire se obține:

$$F = \gamma A \left[ \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \right]$$

Termenul cinetic fiind constant, geometric -vezi figura- rezultă:

$$h_r = \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

respectiv

$$F = \gamma \cdot A \cdot h_r = \gamma \cdot A \cdot j \cdot l$$

Efortul tangențial mediu la perete este

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{\gamma \cdot A \cdot j \cdot l}{P \cdot l} = \gamma \cdot R \cdot j \quad (6.95)$$

unde:  $R = A/P$  este raza hidraulică,  $P$ - perimetrul ud,  $j$ -panta hidraulică.

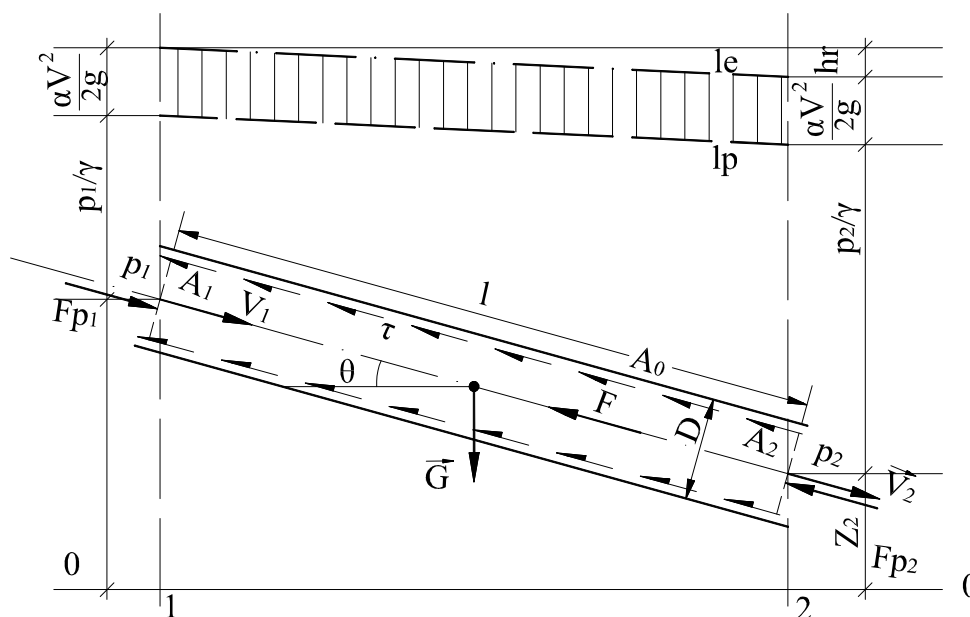


Fig. 6.27. Reacțiunea peretelui asupra mișcării uniforme a lichidului real în conducte drepte

## 2°. Acțiunea dinamică a jetului asupra suprafețelor fixe

### a. Perete plan normal pe direcția curentului (fig. 6.28)

Suprafețe de control sunt  $A_1$ ,  $A_1'$ ,  $A_2''$ , peretele și suprafața jetului. Presiunile în secțiunile normale de control sunt nule  $p_1 = p_{2'} = p_{2''} = p_a = 0$ .

Aplicând relația (6.86'), proiectată pe  $x$  se obține

$$F = \rho Q V_1 = \rho A_1 V_1^2 = 2\gamma h A_1 \quad (6.96)$$

Dacă  $h$  este adâncimea centrului de greutate a lui  $A_1$  față de nivelul lichidului, rezultă că forța hidrodinamică este dublul forței hidrostatice.

### b. Perete plan înclinat cu unghiul $\theta$ față de direcția jetului

Un jet de lichid sub forma unei lame de secțiune dreptunghiulară, cu grosimea  $a_1$  și lățime unitară, acționează asupra unui perete plan înclinat cu unghiul  $\theta$  față de jet (fig. 6.29). Presiunile relative în secțiunile de control sunt nule (atmosferică). În apropierea peretelui jetul se ramifică în două lame, de grosimea  $a_2$  și  $a_2''$ , vitezele din secțiunile 2' și 2'' putând fi considerate uniforme.

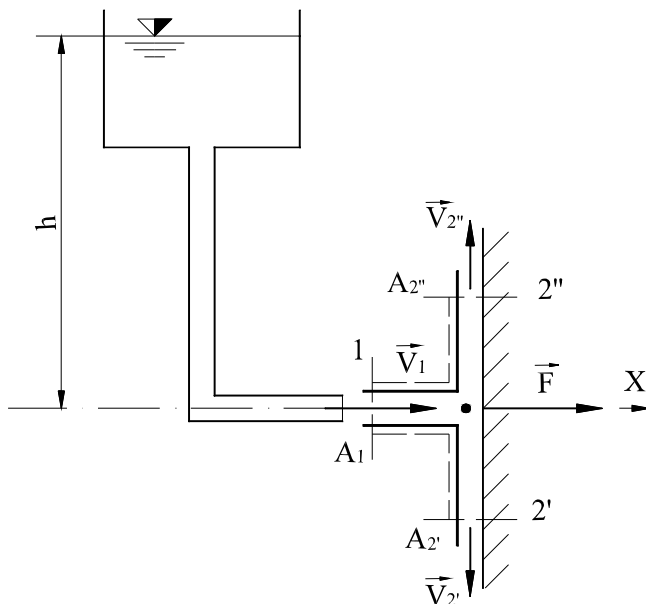


Fig. 6.28. Acțiunea jetului pe perete plan, normal

Se consideră că fig. 6.29 este o secțiune orizontală a situației spațiale, deci toate punctele din acest plan au aceeași cota.

Teorema impulsului sub forma (6.94), proiectată după direcția peretelui și o normală pe aceasta este:

$$\begin{cases} F_y = \rho(Q_{2''} \cdot V_{2''} - Q_{2'} \cdot V_{2'} + Q_1 V_1 \cos \theta) = 0 \\ F_x = \rho Q_1 V_1 \sin \theta = \rho a_1 V_1^2 \sin \theta \end{cases} \quad (6.97)$$

Măsurătorile experimentale evidențiază că  $V_1 = V_{2'} = V_{2''}$  iar din  $Q_1 = Q_{2'} + Q_{2''}$  se obține  $a_1 = a_{2'} + a_{2''}$  apoi cu ajutorul primei ecuații din (6.97), rezultă:

$$\begin{cases} a_{2'} = \frac{a_1}{2}(1 + \cos \theta) \\ a_{2''} = \frac{a_1}{2}(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (6.98)$$

Pentru determinarea punctului de aplicație a lui  $F$  se scrie ecuația momentului cinetic față de  $O$ , proiectată față de  $OZ$ .

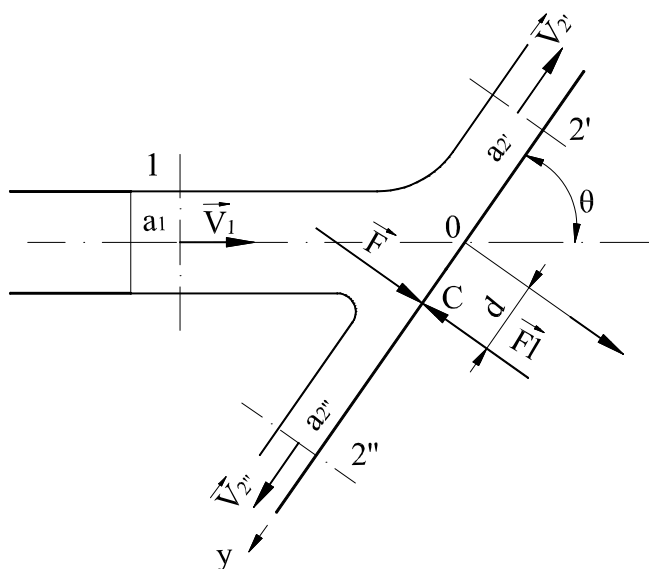


Fig. 6.29. Acțiunea unui jet pe suprafața plană înclinată

$$-Fd = \rho \left( Q_{2''} V_{2''} \frac{a_{2''}}{2} - Q_{2'} V_{2'} \frac{a_{2'}}{2} \right)$$

de unde rezultă

$$d = \frac{1}{2} a_1 \operatorname{ctg} \theta \quad (6.99)$$



Ecuatiile (6.97...6.99) particularizate pentru  $\theta = 90^\circ$  conduc la (6.96). Când jetul este circular,  $1 \cdot a = \pi D^2 / 4$  forța jetului este

$$F = \rho \frac{\pi D^2}{4} V^2 \sin \theta \quad (6.100)$$

### c. Acțiunea dinamică a unui jet asupra unei cupe de turbină Pelton

Jetul rezultat din injector are viteza  $\bar{c}$ , iar cupa turbinei se mișcă în același sens cu viteza periferică  $\bar{u}$  (fig. 6.30).

Rotorul turbinei Pelton este o roată, cu cupe în formă de scoică pe periferie. Acționarea sa se face cu una sau mai multe jeturi dirijate de injector, tangențial la rotor.

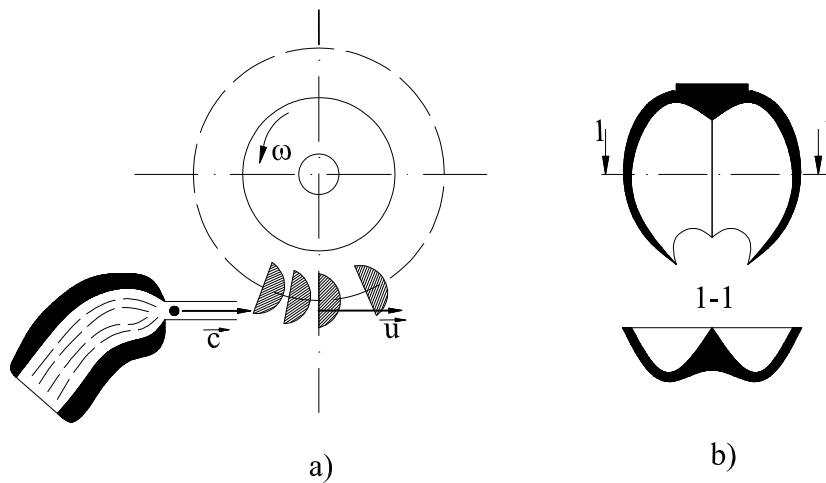


Fig. 6.30. Acțiunea jetului asupra rotorului turbinei Pelton

Fenomenul nu este permanent, fiindcă poziția cupelor se modifică permanent cu jetul. În cazul de față se studiază o cupă individuală în mișcare de translație cu viteza  $\bar{u}$  acționată de un jet de viteză  $\bar{c}$  (fig. 6.31).

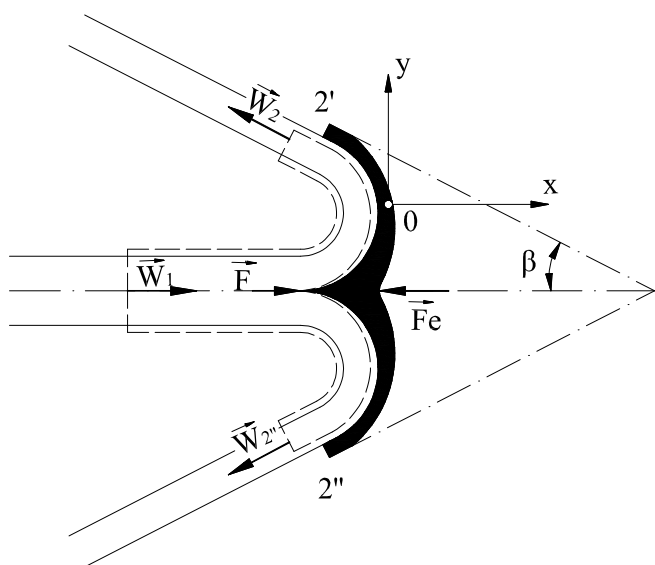


Fig. 6.31. Schema de calcul a acțiunii jetului pe cupa turbinei Pelton

Un referențial  $Oxy$ , solidar cu cupa are viteza de translație față de un reper fix  $\bar{u}$ , iar lichidul  $\bar{c}$ . Viteza relativă între cupă și lichid este  $\bar{w}_1 = \bar{c} - \bar{u}$ . Un observator din referențialul mobil poate aplica lichidului din volumul de control ecuația (6.94), cu condiția  $p_1 = p_{2'} = p_{2''} = p_a = 0$ . Tot ca la punctul  $b$ , rezultă  $w_1 = w_{2'} = w_{2''}$ , ecuația (6.94) luând forma

$$Q_{2'} \bar{w}_2 + Q_{2''} \bar{w}_{2''} - Q_1 \bar{w}_1 = \bar{F}_2 = -\bar{F},$$

care proiectat după axe devine

$$-F_X = \rho(-Q_{2'} w_{2'} \cos \beta - Q_{2''} w_{2''} \cos \beta - Q_1 w_1)$$

$$-F_Y = \rho(Q_{2'} w_{2'} \sin \beta - Q_{2''} w_{2''} \sin \beta)$$

Din condiția  $Q_1 = Q_{2'} + Q_{2''}$  și din cele de mai sus  $Q_{2'} = Q_{2''}$ , astfel încât

$$\begin{aligned} F_X &= \rho Q_1 w_1 (1 + \cos \beta) \\ F_Y &= 0 \end{aligned} \tag{6.101}$$

În practică unghiul  $\beta = 5 \dots 7^\circ$ .

### 3. Ecuația teoremei momentului cinetic aplicat la pompe centrifugale

O pompă centrifugală se compune din rotor, montat pe arbore, pus în mișcare de rotație de un motor. Rotorul are în componență suprafața de revoluție, împărțită în canale și rigidizată de pale cu suprafețe cilindrice sau suprafețe cu dublă curbă. Lichidul este aspirat în stator (împărțit în canale de pale fixe) și de camera spirală, apoi difuzor, legat de conducta de refulare. În stator și camera spirală, mare parte a energiei cinetice se transformă în energie potențială (fig. 6.32).

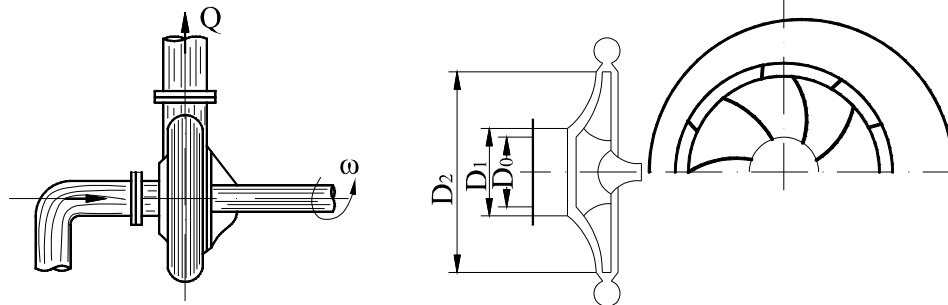


Fig. 6.32. Schema pompei centrifugale

Pompele transformă energia mecanică în energie hidraulică (de presiune și cinetică) prin centrifugare spre camera spirală a lichidului introdus prin conducta de aspirație.

Se presupune că în interiorul pompei fluidul se mișcă fără frecări, după traiectorii paralele cu palele rotorului (pentru aceasta se presupune pale fără grosime în număr infinit). Se notează cu  $\bar{u}$  viteza periferică a rotorului, normală pe rază, cu  $\bar{w}$  - viteza relativă a fluidului și  $\bar{c}$  - viteza absolută a fluidului. Se consideră 1-1 secțiune de intrare și 2-2 secțiune de ieșire din canalul rotorului (fig. 6.33). Momentul greutatei și a presiunilor pe ansamblu sunt nule față de  $O$  datorită simetriei.

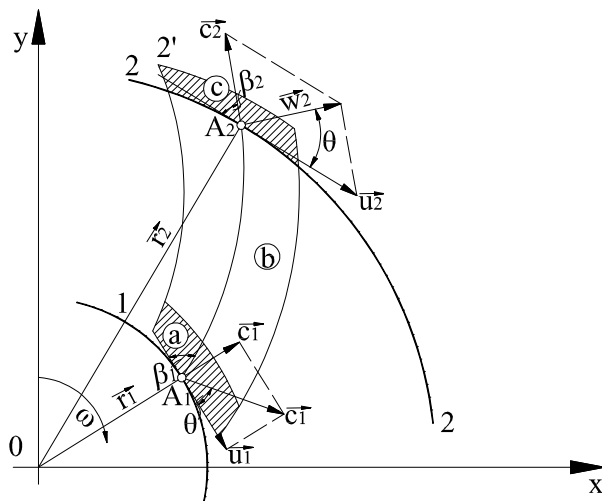


Fig. 6.33. Schema de calcul a variației momentului cinetic în canalul rotorului pompei centrifugale.

Singurul moment nenul față de  $O$  este dat de forțele exercitate asupra lichidului de către palele rotorice. Lichidul circulă numai pe suprafața  $A_1$  și  $A_2$ . Aplicând în aceste condiții ecuația (6.89) rezultă  $\overline{M} = \rho Q (\overline{r_2} \times \overline{c_2} - \overline{r_1} \times \overline{c_1})$  care proiectat devine

$$M = \rho Q (r_2 c_2 \cos \theta_2 - r_1 c_1 \cos \theta_1) \quad (6.102)$$

Puterea la axul rotorului este  $P$  și are expresia

$$P = M \omega = \rho Q (r_2 c_2 \cos \theta_2 - r_1 c_1 \cos \theta_1) = \rho Q (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1) \quad (6.103)$$

unde  $\omega = u \cdot r$  și  $c_{2u} = c_2 \cos \theta_2$  și  $c_{1u} = c_1 \cos \theta_1$  sunt proiecțiile vitezei absolute a lichidului pe direcția vitezei periferice.

Pe de altă parte puterea pompei este

$$P = \gamma Q H_{t\infty} \quad (6.104)$$

unde  $H_{t\infty}$  reprezintă înălțimea de pompare teoretică. Din (6.103) și (6.104) rezultă

$$H_{t\infty} = \frac{c_{2u} \cdot u_2 - c_{1u} \cdot u_1}{g} \quad (6.105)$$

Ecuația (6.105) este ecuația fundamentală a pompelor centrifugale, cu rotor ideal, demonstrat de Euler. Pentru model de lichid newtonian sau real și rotor cu număr finit de pale

$$H = k_n \eta H_t \quad (6.106)$$

unde  $k_n < 1$  corectează ecuația la număr finit de pale, iar  $\eta < 1$  este randamentul hidraulic și ține seama de pierderile de sarcină.

Analizând ecuația (6.105) se observă că la scăderea  $c_{1u}$  crește  $H_{t\infty}$ . La intrarea ortogonală în pompă  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\cos \theta_1 = 0$  și  $c_{1u} = 0$ , deci

$$H_{t\infty} = \frac{c_{2u} \cdot u_2}{g} \quad (6.105')$$

Studiul experimental al influenței lui  $\theta_2$  arată că aceasta trebuie să fi  $\theta_2 > \pi/2$  (pale orientate invers), valoare  $\theta_2 < \pi/2$ , deși teoretic avantajos, conduce la pierderi mari de sarcină.

#### 4°. Acțiunea dinamică a fluidului asupra unei porțiuni de profile hidrodinamice cilindrice, de lungime unitară în repaus

Se consideră o rețea de profile hidrodinamice formată dintr-o infinitate de profile hidrodinamice obținute prin translarea rectilinie și situate la echidistanța „t” unul de altul, care este situat într-un curent uniform de fluid având viteza constant  $\overline{V}_\infty$  normală pe generatoarea profilelor (fig. 6.34).

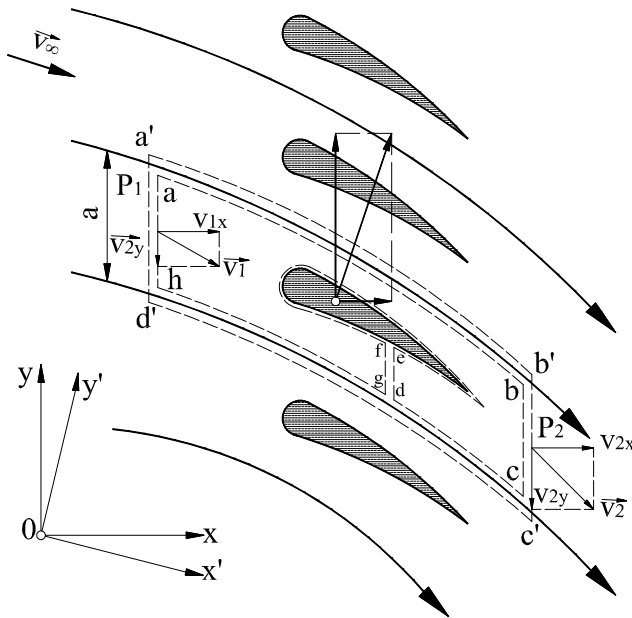


Fig. 6.34. Schema de calcul a secțiunii fluidului asupra unei rețele de profile

În jurul unui profil oarecare se alege o suprafață de control  $A = a b c d e f g h a$  astfel încât  $ab$  și  $hc$  sunt linii de curent obținute prin aceeași translare ca la profile și  $ah$  și  $bc$  sunt segmente normale pe liniile de curent la distanțe suficient de mari de profil. La distanță suficient de mare de profile distribuția vitezelor este uniformă, astfel

și

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= v_{1x} \bar{i} + v_{1y} \bar{j} \\ \bar{V}_2 &= v_{2x} \bar{i} + v_{2y} \bar{j}\end{aligned}$$

Datorită prezenței profilelor de obicei  $v_1 \neq v_2$ . Dacă se neglijează greutatea fluidului, din ecuația lui Bernoulli pe o linie de curent, aparținând lui  $ah$  și  $bc$ ,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{const} \quad (6.107)$$

rezultă că pe  $ah$  și  $bc$  presiunile sunt uniform distribuite. Astfel forțele rezultate din presiune pe secțiunile  $ah$  și  $bc$  sunt  $\bar{P}_1 = (a.1) p_1 \bar{i}$  și  $\bar{P}_2 = -(a.1) p_2 \bar{i}$ .

Forța,  $\bar{F} = R \bar{i} + P \bar{j}$  exercitată de fluid asupra profilului rezultă din proiecția ecuației (6.86').

$$\begin{cases} R = \rho Q (v_{1x} - v_{2x}) + (p_1 - p_2) a \\ P = \rho Q (v_{2y} - v_{1y}) \end{cases}$$

Dar în mișcarea permanentă  $Q = (a.1) v_{1x} = (a.1) v_{2y}$  deci  $v_{1x} = v_{2x} = v_x$  și

$$R = (p_1 - p_2) a. \text{ Din (6.107) } p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_{2y}^2 - v_{1y}^2) \text{ deci}$$

$$\begin{cases} R = \frac{\rho \cdot a}{2} (v_{2y}^2 - v_{1y}^2) \\ P = \rho a v_x (v_{2y} - v_{1y}) \end{cases} \quad (6.108)$$

Circulația vitezei în lungul curbei  $C=a' b' c' d'$  este

$$\Gamma = \int_C \bar{v} (ds) = \int_C (v_x \bar{i} + v_y \bar{j}) (\bar{i} dx + \bar{j} dy) = \int_C (v_x dx + v_y dy)$$

care pentru cazul concret este

$$\Gamma = \int_{a'd'} \bar{v} d\bar{s} + \int_{d'c'} \bar{v} d\bar{s} + \int_{c'b'} \bar{v} d\bar{s} + \int_{b'a'} \bar{v} d\bar{s}$$

Distribuția de viteze pe  $a'b'$  și  $d'c'$  este identică și arcele sunt parcurse în sens invers, integralele respective din relația precedentă sunt nule. Pe  $a'd'$   $v_y = v_{1y} = \text{const.}$  și  $dx=0$ , iar pe  $c'b'$   $v_y = v_{2y} = \text{const.}$  și  $dx=0$ ; rezultă

$$\Gamma = \int_{y_0+a}^{y_0} v_{1y} dy + \int_{y_0}^{y_0+a} v_{2y} dy = -v_{1y} \cdot a + v_{2y} \cdot a = a(v_{2y} - v_{1y})$$

și, prin înlocuire (6.108) devine

$$\begin{cases} R = \frac{\rho \cdot a}{2} \Gamma (v_{2y} + v_{1y}) \\ P = \rho \Gamma v_x \end{cases} \quad (6.109)$$

$\overline{F}$  este perpendicular pe  $\overline{w} = v_x \bar{i} - \left[ (v_{1y} + v_{2y}) / 2 \right] \bar{j}$ , deoarece  $\overline{F} \cdot \overline{w} = 0$ .

Presupunând că  $a \rightarrow \infty$ , circulația rămâne finită, deci  $v_{2y} - v_{1y} = 0$  sau  $v_{1y} = v_{2y} = v_y$ , deci  $\overline{v_1} = \overline{v_2}$ . Segmentele  $ah$  și  $bc$  sunt la mare distanță de profil, deci  $\overline{v_1} = \overline{v_2} = \overline{v_\infty}$ . Dacă în referențialul  $ox'y'$  axa  $x'$  este paralelă cu  $\overline{v_\infty}$ , atunci  $\overline{v_\infty} = v_\infty \bar{i}'$ , deci  $v_{1y'} = v_{2y'} = 0$  și  $\overline{w} = v_x \bar{i}' = \overline{v_\infty}$ . Astfel sistemul (6.109) devine

$$\begin{cases} \overline{R'} = 0 \\ \overline{P'} = \rho \Gamma v_\infty \end{cases} \quad (6.110)$$

Forța  $\overline{P'}$  se numește portantă, iar  $\overline{R'}$  - rezistență la înaintare. Într-un model de fluid Eulerian, rezistența la înaintare este nulă, concluzie ce se numește **paradoxul lui d'Alambert**, întrucât într-un fluid newtonian sau real această componentă există.

Ecuatiile (6.109) stau la baza calculului turbomașinilor axiale (fig. 6.35).

### 5°. Acțiunea dinamică a apei asupra coturilor conductelor

Când o conductă este prevăzută cu un cot la unghiul  $\theta$  față de aliniament, asupra acesteia acționează o forță suplimentară. Luând suprafața de control  $abcd$ , cu

$ab$  și  $cd$  normale pe liniile de curent și suficient de departe de cot, aceștia i se poate aplica ecuația teoremei impulsului sub forma (6.86') (fig.6.36).

Considerând cotul în plan orizontal, mișcarea permanentă cu debitul  $Q = \text{const.}$ , lichidul Eulerian la presiunea  $p$ , conductă cu diametru constant  $D$ ,  $v_1 = v_2 = 4Q / \pi D^2$ , componentele forței cu care lichidul acționează cotul sunt:

$$\begin{cases} F_x = \left( \rho Q v + p \frac{\pi D^2}{4} \right) (1 - \cos \theta) \\ F_y = \left( \rho Q v + p \frac{\pi D^2}{4} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (6.111)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (6.112)$$

$$\varphi = \arctg \frac{F_y}{F_x} = \arctg \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (6.113)$$

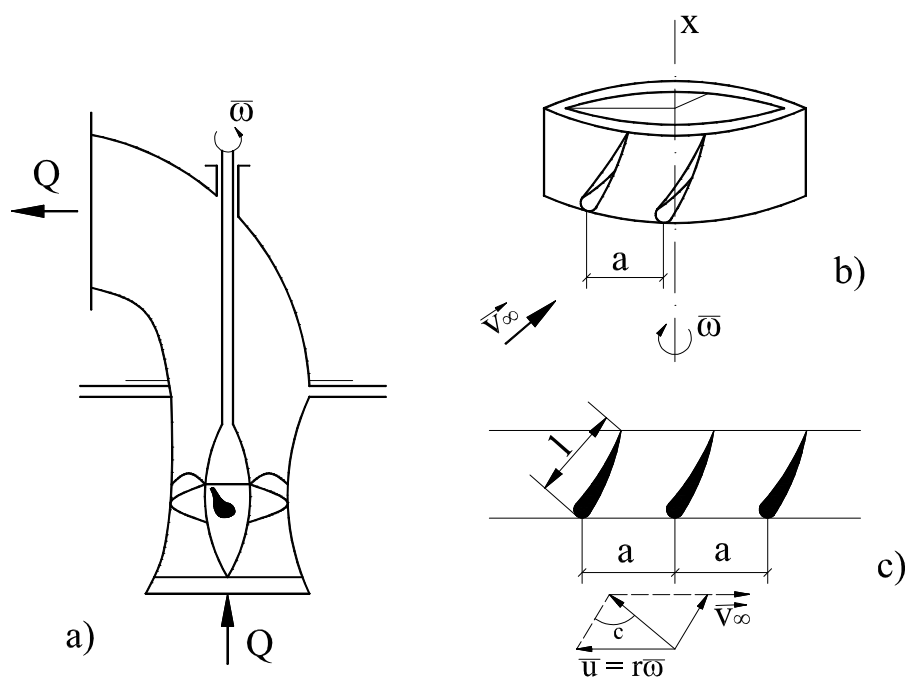


Fig. 6.35. Schema unei pompe axiale, a-ansamblu; b-rotor; c-rotor desfășurat



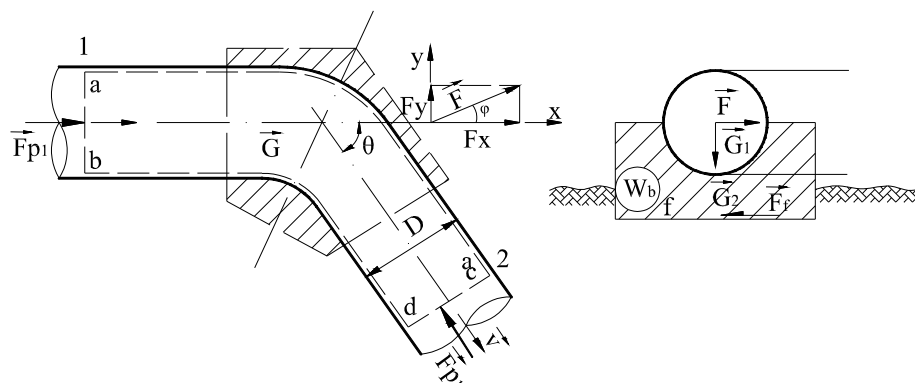


Fig. 6.36. Shema de calcul a forței neechilibrate la coturi

Acesta forță neechilibrată trebuie preluată de forța de frecare pe care o dă masivul de ancoraj la frecarea cu pământul. Volumul de beton, de greutate specifică  $\gamma_b$ , necesar masivului la un coeficient de frecare  $f$  cu pământul, este

$$W_b \geq \frac{\frac{F}{f} - G_1}{\gamma_b} \quad (6.114)$$

Conductele mici se ancorează cu bride, tăpli etc.

### 6°. Acțiunea dinamică a fluidelor asupra schimbărilor de secțiune ale conductelor

La schimbările de secțiune - lărgiri sau îngustări - pe conductele liniare apar forțe neechilibrate din acțiunea curentului asupra acestora (fig. 6.37) care, de obicei, se preiau de către masive de ancoraj.

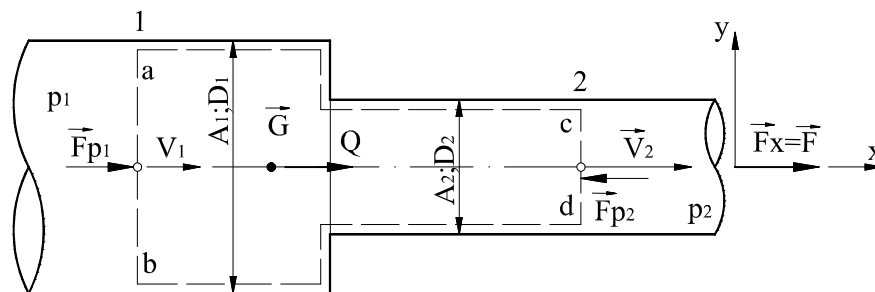


Fig. 6.37. Shema de calcul a forței dinamice ce acționează o schimbare de secțiune

Se consideră conducta orizontală, lichidul Eulerian, mișcare permanentă  $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ . Cunoscând vitezele se poate calcula presiunea  $p_2$ , cunoscându-se  $p_1$  din ecuația energiei. Aplicarea ecuației (6.86') permite calculul  $\bar{F} = \bar{F}_x$ , deoarece  $F_y = 0$ .

$$F_x = \rho Q (V_1 - V_2) + p_1 \frac{\pi D_1^2}{4} - p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad (6.115)$$

Acesta forță trebuie preluată de conductă sau ancorajul său. În cazul lichidului newtonian sau real acesta forță neechilibrată este și mai mare fiindcă  $p_2$  se diminuează cu pierderile de presiune.

### 7°. Acțiunea dinamică a fluidelor asupra ramificațiilor conductelor

La ramificațiile conductelor cu schimbare de direcție, eventual de secțiune, forța cu care acționează fluidul asupra ramificației se poate calcula pe baza ecuației (6.94). Se consideră o ramificație în plan orizontal, mișcare permanentă  $Q_1 = Q_{2'} + Q_{2''}$  și presiunea  $p$ , fluid eulerian.

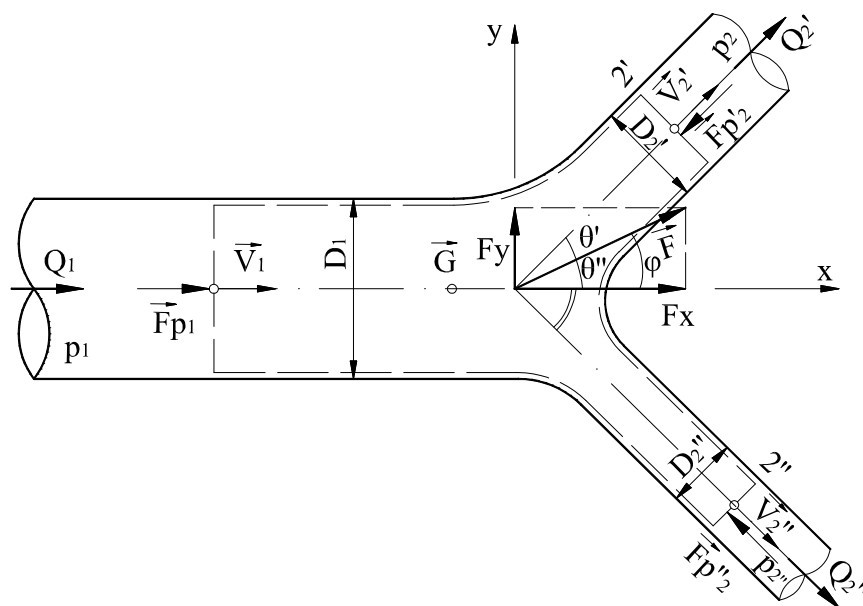


Fig. 6.38. Schema de calcul a forței hidrodinamice ce acționează o ramificație

Cunoscând diametrele  $D_1, D_2, D_3$  se pot determina vitezele  $v_1, v_2$  și  $v_3$  din ecuația de continuitate. Când ramificația este fără organ de închidere, presiunea în cele trei secțiuni (1, 2' și 2'') se poate considera egală cu  $p$  (în caz contrar se calculează). Proiecțiile ecuației (6.94) în referențialul arbitrar considerat sunt:

$$F_x = \rho(Q_1 v_1 - Q_2 v_2 \cos \theta' - Q_2 v_2'' \cos \theta'') + p \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D_2^2 \cos \theta' - D_2^2 \cos \theta'') \quad (6.116)$$

$$F_y = \rho(Q_2 v_2'' \sin \theta'' - Q_2 v_2 \sin \theta') + p \frac{\pi}{4} (D_2^2 \sin \theta' - D_2^2 \sin \theta'')$$

respectiv,  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  și  $\varphi = \arctg \frac{F_y}{F_x}$

## 6.5. Aplicații

**6.1.** Între un disc circular orizontal de rază  $R$  și un plan paralel la distanța  $t$  curge uniform debitul unei conducte de rază  $r_0$ , cu viteza  $V_0$  (fig. 6.39). Să se determine presiunea la ieșirea apei din conductă, dacă în exteriorul discului presiunea este cea atmosferică,  $p_0=0$ . Să se deducă distribuția presiunii la curgerea radială, distribuția vitezelor pe rază și forța hidrodinamică ce acționează discul; lichidul se consideră eulerian și distribuția vitezei pe secțiune constantă. Se ia  $p_a=0$ ,  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ;  $R=25\text{cm}$ ;  $r_0=5\text{cm}$ ;  $t=2\text{cm}$ ;  $v_0 = 2\text{m/s}$ .

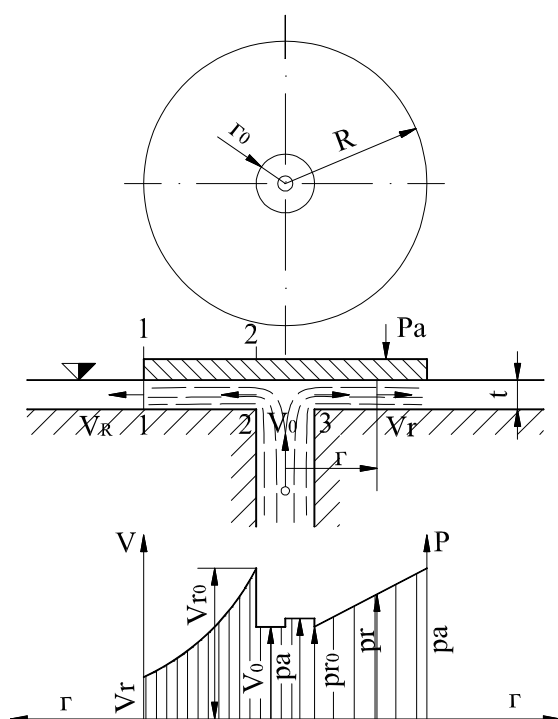


Fig. 6.39. Schema curgerii sub disc

**Rezolvare:** Viteza apei la distanța  $r$  este  $v_r$ , ce rezultă din ecuația de continuitate, debitul fiind cel scurs pe conductă  $\pi r_0^2 v_0 = 2\pi r t v_r$  sau  $v_r = \frac{r_0^2 v_0}{2rt}$ ; deci distribuția vitezei este hiperbolică, valoarea minimă fiind  $V_R = \frac{r_0^2 v_0}{2Rt}$ , iar valoarea maximă  $v_{r0} = \frac{r_0^2 v_0}{2r_0 t} = \frac{r_0 v_0}{2t}$ .

Când  $r_0 = 2t$ , rezultă  $v_r = v_0$ . Variația presiunii sub disc cu raza, pentru  $r \in [r_0, R]$  se obține din ecuația lui Bernoulli între secțiunile 1-1 și r-r

$$\frac{p_a}{\gamma} + \frac{V_R^2}{2g} = \frac{p_r}{\gamma} + \frac{v_r^2}{2g}$$

sau

$$\frac{p_r}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{r_0^4 v_0^2}{8gt^2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)$$

Pentru  $r_0 = 2t$  rezultă  $p_0 = p_{r0}$ , când  $r_0 > 2t$ ,  $p_0 > p_{r0}$ . Valoarea presiunii  $p_0$  se obține aplicând ecuația energiei între 2-2 și 3-3

$$\frac{p_{r0}}{\gamma} + \frac{v_{r0}^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}$$

deci

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_{r0}}{2g} + \frac{v_0^2}{2g} \left( \frac{r_0^2}{4t^2} - 1 \right)$$

Forța care acționează discul rezultă din ecuația teoremei impulsului

$$\bar{F} = \rho Q (\bar{V}_0 - \bar{V}_R) + \bar{F}_{p0} + \bar{F}_{p2-r_0} + \bar{F}_{pR} + \bar{G}$$

Greutatea lichidului se poate neglija,  $\bar{F}_{pr}$  este radial simetrică și are rezultantă nulă. Proiectând ecuația după direcția  $\bar{v}_0$ , rezultă:

$$F = \rho Q V_0 - F_{p0} - F_{pR-r_0},$$

unde

$$F_{p0} = \pi r_0^2 (p_a - p_0)$$

$$F_{pR-r_0} = \int_{r_0}^R (p_a - p_r) 2\pi r dr = \frac{\gamma \pi r_0^4 v_0^2}{4gt^2 R^2} \int \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) r dr = \frac{\gamma \pi r_0^4 v_0^2}{4gt^2} \left[ \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1 - \left( \frac{r_0}{R} \right)^2}{2} \right]$$

deci

$$F = \rho \pi r_0^2 v_0^2 - \pi r_0^2 (p_a - p_0) - \frac{\rho \pi r_0^4 v_0^2}{4t^2} \left[ \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1 - \left( \frac{r_0}{R} \right)^2}{2} \right]$$

Numeric se obține:

$$v_r = \frac{0,05^2 \cdot 2}{2 \cdot 0,02 \cdot r} = \frac{0,125}{r}$$

$$v_R = \frac{0,05^2 \cdot 2}{2 \cdot 0,25 \cdot 0,02} = 0,5 \text{ m/s}$$

$$v_{r0} = \frac{0,05 \cdot 2}{2 \cdot 0,02} = 0,25 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_{r0}}{\gamma} = -\frac{0,05^4 \cdot 2^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 0,02^2} \left( \frac{1}{0,05^2} - \frac{1}{0,25^2} \right) = -0,306 \text{ mCA}$$

$$p_{r0} = -3000 \text{ N/m}^2$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = -0,306 + \frac{2^2}{2 \cdot 9,81} \left( \frac{0,05^2}{4 \cdot 0,02^2} - 1 \right) = -0,191 \text{ mCA}$$

$$p_0 = -1877 \text{ N/m}^2$$

$$F = 1000 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot 2^2 - \pi \cdot 0,05^2 \cdot 1877 - \frac{1000 \pi (0,05)^4 \cdot 2^2}{4 \cdot 0,02^2} \left[ \ln \frac{0,25}{0,05} - \frac{1 - \left( \frac{0,05}{0,25} \right)^2}{2} \right] = -62,33 \text{ N}$$

**6.2.** Distribuția vitezei într-o conductă circulară satisface condiția  $u_{\max} = 1,2v$ . Viteza în centrul conductei se măsoară cu un tub Pitot, pe instrumentul secundar fiind înregistrată diferența de nivel  $h = 1,15 \text{ mCA}$ . Să se determine debitul conductei știind  $D = 0,4 \text{ m}$  și constanta aparatului  $k = 0,985$  (fig. 6.40).

**Rezolvare:** Tubul Pitot amplasat în axul conductei măsoară viteza maximă

$$u_{\max} = k \sqrt{2gh} \text{ și } v = 1,2u_{\max}, \text{ iar } Q = A, \text{ } v = \frac{\pi D^2}{4} v, \text{ deci}$$

$$Q = \frac{k}{1,2} \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} = \frac{0,985}{1,2} \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,15} = 0,49 \text{ m}^3/\text{s}$$

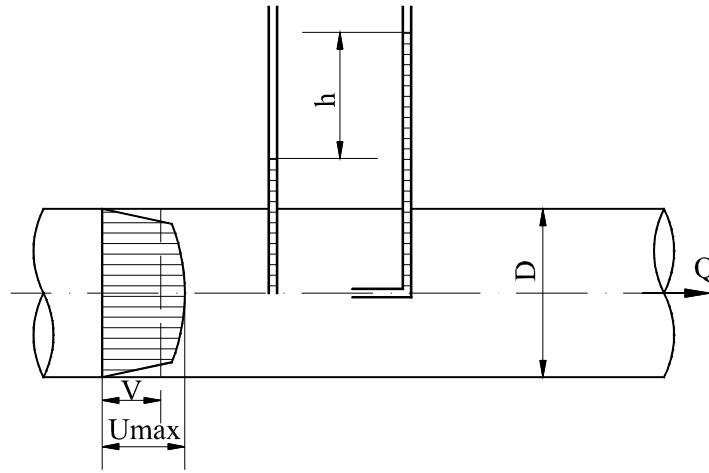


Fig. 6.40. Schema măsurării debitului cu tubul Pitot

**6.3.** Să se construiască cheia debitelor pentru un venturimetru care este instalat pe o conductă cu  $D=200\text{ mm}$  și are strangularea  $d = 100\text{ mm}$ , pentru ecartul de debite  $Q \in [15, 60]\text{ l/s}$ , ca aparat auxiliar fiind folosit un manometru diferențial indirect cu mercur ( $\rho_{Hg} = 13,6\text{ kg/l}$ ). Apa tranzitată ( $\rho_a = 1000\text{ kg/m}^3$ ) se consideră fluid eulerian și venturimetrul perfect. Se consideră  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,05$ .

Rezolvare: Conform fig. 6.14 și demonstrației aferente

$$Q = \frac{\pi d^2 \sqrt{2g}}{4 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \sqrt{h} = \frac{0,1^2 \sqrt{2 \cdot 9,81}}{4 \sqrt{1,05 - 1,05 \cdot \left(\frac{0,1}{0,2}\right)^4}} \sqrt{h} = 0,035 \sqrt{h}$$

unde  $h$  este diferența de presiune în  $mCA$ , iar  $Q$  - debitul în  $m^3/s$ . La utilizarea manometrului indirect citirea în coloană de mercur, transformată în coloană apă este

$$h = \frac{\rho_{Hg} - \rho_a}{\rho_a} h_{Hg}.$$

Cheia debitelor corespunde tabelului 6.3 și graficului din figura 6.41.

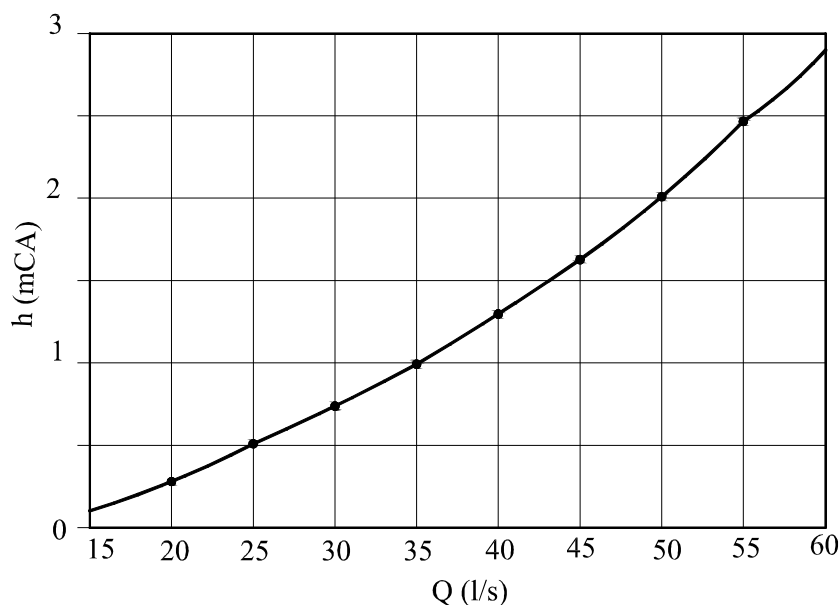


Fig. 6.41. Curba caracteristică a venturimetrului 200/100.

**Tabelul 6.3.** Cheia debitelor Venturimetrului

Nr.crt.	Q l/s	h mCA	$h_{Hg}$ mHg
1.	15	0,183	0,0145
2.	20	0,325	0,0258
3.	25	0,508	0,0403
4.	30	0,732	0,0580
5.	35	0,996	0,0790
6.	40	1,301	0,1031
7.	45	1,647	0,1305
8.	50	2,033	0,1611
9.	55	2,460	0,1950
10.	60	2,928	0,2320

**6.4.** Lichidul din două vase de secțiune orizontală constantă  $S_1$  și  $S_2$ , comunicând printr-o conductă de secțiune constantă  $A$  și lungime  $l$ , suferă o denivelare inițială. Neglijând frecările (fluid eulerian) să se calculeze ecuația oscilației și perioada acesteia, știind  $S_1$  și  $S_2 \gg A$ .



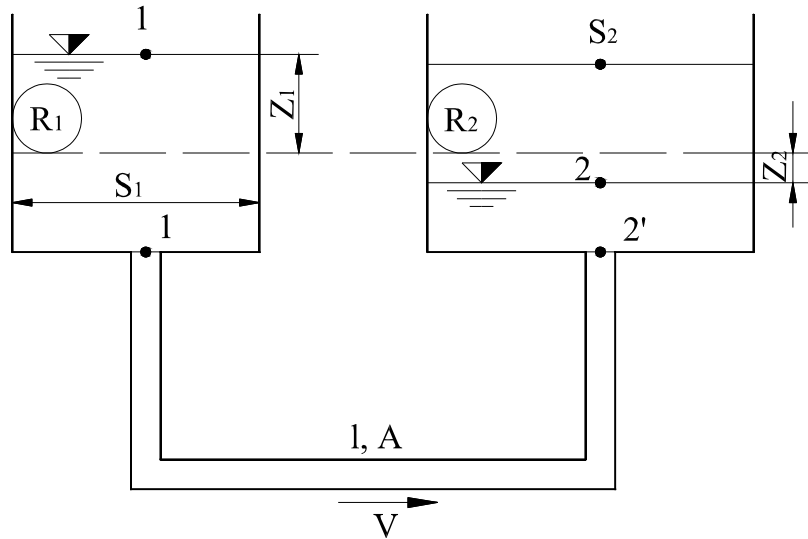


Fig. 6.42. Schema de calcul a oscilației de nivel în două vase comunicante

**Rezolvare:** Se aplică relația lui Bernoulli în mișcare nepermanentă (6.30) pentru o poziție oarecare a nivelelor 1 și 2 din cele două rezervoare, astfel:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds.$$

Se poate accepta,  $\frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) \sim 0$  și  $p_1 = p_2 = p_a$ , respectiv

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = \int_{1'}^{2'} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{\partial v}{\partial t} \int_{1'}^{2'} ds = l \frac{\partial v}{\partial t}$$

fiindcă:  $\int_1^{1'} \frac{\partial V}{\partial t} ds \sim \int_2^{2'} \frac{\partial V}{\partial t} ds \sim 0$ , rezultând:  $z_1 + z_2 = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt}$

Se știe:  $A \cdot v = S_1 v_1 = S_2 v_2$ , deci  $A \frac{dv}{dt} = S_1 \frac{dv_1}{dt} = S_2 \frac{dv_2}{dt}$  sau

$$A \frac{dv}{dt} = -S_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = S_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2}, \text{ respectiv } \frac{dv}{dt} = -\frac{S_1}{A} \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Pe de altă parte  $z_1 S_1 = z_2 S_2$  sau  $z_2 = \frac{S_1}{S_2} z_1$ . Prin înlocuiri, rezultă:

$$z_1 \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right) = -\frac{l}{g} \frac{S_1}{A} \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad \text{sau} \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \left( \sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}} \frac{Ag}{l} \right)^2 z_1 = 0$$

care este ecuația mișcării oscilatorii armonice. Notând:

$$k = \sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \frac{Ag}{l}}$$

soluția generală a ecuației este:

$$z_1 = C_1 \cos Kt + C_2 \sin kt$$

Considerând la trecerea prin poziția de echilibru  $t = 0$ ,  $z_1 = z_2 = 0$ , rezultă  $C_1 = 0$ . La trecerea prin poziția de echilibru viteza de modificare a nivelului în  $R_1$  este maximă, deci pentru  $t = 0$ ,  $V_1 = V_{1\max} = dz_1 / dt$ , însă  $z_1 = C_2 \sin kt$ , deci  $V_{1\max} = C_2 k \cos kt$  sau  $C_2 = V_{1\max} / k$ , deci ecuația mișcării este:

$$z_1 = \frac{V_{1\max}}{\sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \frac{Ag}{l}}} \sin \sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \frac{Ag}{l}} t$$

Perioada mișcării este:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2 \sqrt{\frac{S_1 S_2 l}{(S_1 + S_2) Ag}}$$

Pentru fluide newtoniene și reale oscilațiile se amortizează datorită frecărilor.

**6.5.** Să se determine caracteristicile unui hidrojector (fig. 6.43) care este caracterizat prin: diametrul duzei  $D_i = 20\text{mm}$  și este alimentat sub sarcina  $h_1 = 20\text{mCA}$ , diametrul tubului de aspirație  $D_2 = 50\text{mm}$  și ridică apa de la  $h_2 = 6\text{m}$ , diametrul tubului de refulare  $D_3 = 80\text{mm}$  și sarcina  $h_3 = 10\text{m}$ . Se consideră lichid eulerian,  $\alpha = 1$  și  $p_a = 0$ .

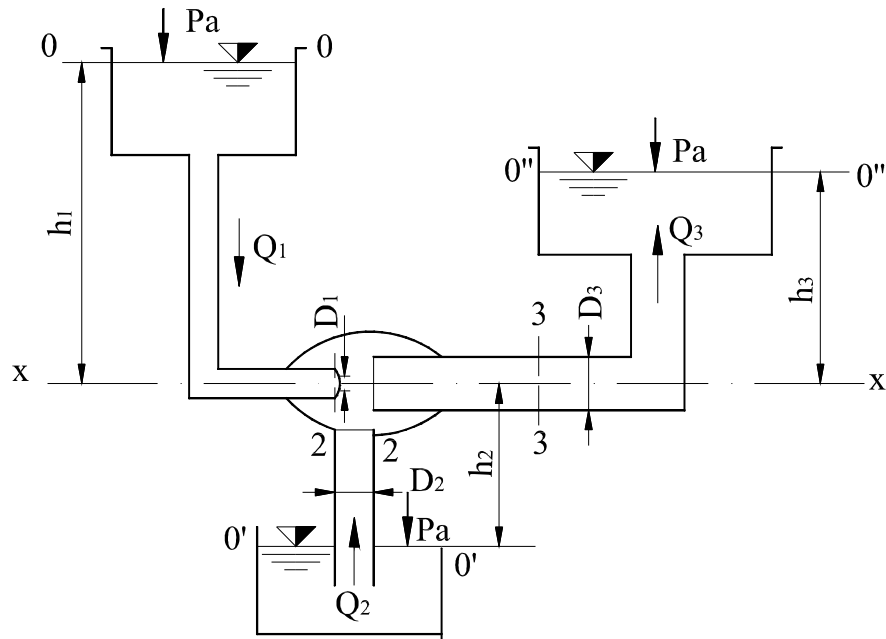


Fig. 6.43. Schema de. calcul a hidroejectorului

**Rezolvare:** Se scriu ecuațiile lui Bernoulli față de planul de referință x-x între secțiunile 0-1, 0'-2 și 0''-3, ținând seama că la nivelul liber  $p_a = 0$  și vitezele aici se pot neglija, suprafața liberă în rezervoare fiind mare față de secțiunea conductelor. Totodată presiunile în secțiunile 1 și 2 considerate egale  $p_1 = p_2$  (presiunea din camera ejectorului)

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}; -h_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}; h_3 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}$$

Conform continuității  $Q_3 = Q_1 + Q_2$  și pentru lichid Eulerian ecuația puterii este

$$Q_1 h_1 - Q_2 h_2 = Q_3 h_3$$

Din ecuația puterii rezultă

$$Q_2 = \frac{h_1 - h_3}{h_3 + h_2} Q_1.$$

Scăzând primele două ecuații ale lui Bernoulli, rezultă:

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2g} (v_1^2 - v_2^2)$$

Înlocuind vitezele din ecuația de continuitate

$$v_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2}; \quad v_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2}; \quad v_3 = \frac{4Q_3}{\pi D_3^2}$$

se obține

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 g (h_1 + h_2)}{8 \left[ \frac{1}{D_1^4} - \left( \frac{h_1 - h_3}{h_2 - h_3} \right)^2 \frac{1}{D_2^4} \right]}}$$

Numeric rezultă

$$Q_1 = \sqrt{\frac{9,81(20+6)\pi^2}{8 \left[ \frac{1}{0,02^4} - \left( \frac{20-10}{6+10} \right)^2 \frac{1}{0,5^4} \right]}} = 7,131 \cdot 10^{-3} m^3 / s$$

$$Q_2 = \frac{20-10}{6+10} 7,131 \cdot 10^{-3} = 4,457 \cdot 10^{-3} m^3 / s$$

$$Q_3 = (7,131 + 4,457) 10^{-3} = 11,588 \cdot 10^{-3} m^3 / s$$

$$V_1 = \frac{4 \cdot 4,457 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 22,70 m / s; \quad \frac{p_1}{\gamma} = 20 - \frac{22,70^2}{2 \cdot 9,81} = -6,263 mCA$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot 4,457 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,05^2} = 2,27 m / s; \quad \frac{p_2}{\gamma} = 10 - \frac{2,305^2}{2 \cdot 9,81} = 9,263 mCA$$

$$V_3 = \frac{4 \cdot 11,588}{\pi \cdot 0,08^2} = 2,305 m / s$$

**6.6.** O conductă orizontală, cu  $D_n=400 \text{ mm}$ , transportă debitul  $Q = 350 \text{ l/s}$  la presiunea  $p = 10 \text{ bar}$ . Conducta face un cot la un unghi  $\theta = 60^\circ$  în plan orizontal. Să se determine forța hidrodinamică ce acționează conducta și direcția acestei forțe. Lichidul se consideră eulerian și mișcarea permanentă,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Rezolvare:** Situația corespunde fig. 6.36 și ecuațiilor (6.86') și (6.111-113), rezultând

$$F_x = \left( \frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} + p \frac{\pi D^2}{4} \right) (1 - \cos \theta) = \left( \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,35^2}{\pi \cdot 0,4^2} + 10 \cdot 10^5 \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} \right) \cdot (1 - \cos 60^\circ) = 63319 N$$

$$F_y = \left( \frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} + p \frac{\pi D^2}{4} \right) \sin \theta = \left( \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,35^2}{\pi \cdot 0,4^2} + 10 \cdot 10^5 \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} \right) \cdot \sin 60^\circ = 109672 N$$

$$\varphi = \arctg \frac{F_y}{F_x} = \arctg \frac{109672}{63319} = 60^\circ$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{63319^2 + 109672^2} = 126638 N = 126 KN$$

## CAPITOLUL 7

### DINAMICA FLUIDELOR REALE

Studiul dinamicii fluidelor "reale" reprezintă un grad de aproximare mai fidel al fenomenelor de mișcare a acestora, prin considerarea eforturilor unitare tangențiale care se manifestă. Aceste eforturi unitare tangențiale se datoresc vâscozității lichidului, pe de o parte, și naturii mișcării pe de altă parte. Considerarea lor, deși îngreuiază studiul teoretic, explică o serie de fenomene și mărimi - parțial sau total - ce apar la fluide în mișcare.

În acest capitol se prezintă regimurile de mișcare ale fluidelor, cu ecuațiile generale ce le caracterizează, mișcarea laminară în conducte și între suprafețe plan paralele, mișcarea turbulentă în conducte și albi deschise, pierderi de sarcină distribuite (liniare) și locale. Mai ales mișcările turbulente nu sunt abordate sub forma generală, se studiază numai unele mișcări simple din punctul de vedere al unor teorii semiempirice care însă dau rezultate suficient de precise pentru practică.

#### 7.1. Regimuri de mișcare

Curgerea fluidelor reale se poate produce în două regimuri diferite din punct de vedere al structurii fizice, astfel:

- regim laminar și
- regim turbulent.

Existența celor două regimuri de mișcare a fost remarcată și vizualizată de O.Reynolds (1883), apoi s-a constatat că între cele două regimuri de mișcare se interpune "regimul de tranziție".

Regimurile de mișcare s-au pus în evidență experimental, prin colorarea unui fir de curent de lichid în mișcarea sa, într-o conductă circulară transparentă în care viteza medie se poate modifica după dorință. Condițiile materializării firului de curent și ale vizualizării regimurilor de mișcare sunt:

- colorarea se realizează la o anumită distanță de la intrarea în conductă, unde profilul de viteză este stabil și
- greutatea specifică a firului colorat este identică cu cea a lichidului în mișcare prin tubul transparent (altfel sub diferență de densitate direcția de mișcare a firului este afectată).

La viteze medii mici din conductă firul de curent colorat își menține individualitatea, este rectilinie și nu se amestecă cu restul lichidului (în afara

fenomenului de difuzie). Mișcarea se produce în straturi și se numește mișcare laminară. Traectoriile particulelor sunt drepte continue (fig. 7.1. a).

La creșterea vitezei medii peste o anumită valoare firul de lichid își pierde treptat forma sa regulată și stabilitatea, capătă un aspect neuniform, particulele componente ale diferitelor straturi se amestecă, traiectoriile particulelor sunt neregulate și variabile cu timpul. La viteze și mai mari are loc amestecul complet al firului colorat cu restul masei lichide în mișcare astfel că, după un anumit parcurs, tot lichidul pare uniform. Este **mișcarea turbulentă** (fig. 7.1. c).

La viteze puțin superioare limitei mișcării laminare se observă o ondulare a firului colorat și pe parcurs are loc o fragmentare al acestuia datorită diferențelor de viteză între straturi; este **tranziția** de la laminar la turbulent (fig. 7.1. b).

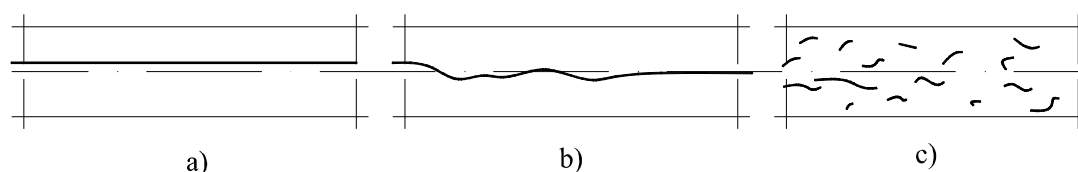


Fig. 7.1. Aspectul mișcării în regimul: a) laminar; b) tranziție; c) turbulent

O. Reynolds a stabilit factorii care determină apariția uneia din regimurile de mișcare și anume: viteza medie, diametrul conductei și coeficientul de vâscozitate cinematic. În scopul caracterizării regimului de curgere s-a introdus complexul adimensional, numit numărul lui Reynolds

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$$

și care are o anumită valoare critică ( $Re_{cr}$ ). Dacă mișcarea are loc la

o valoare a numărului  $Re$  inferioară lui  $Re_{cr}$  mișcarea este laminară, iar când  $Re > Re_{cr}$  mișcarea este turbulentă. Delimitarea regimului de tranziție, ca și caracteristicile acestuia este o problemă fundamentală a mecanicii fluidelor. Clarificarea proceselor fizice și descrierea lor matematică din regimul de tranziție este importantă pentru explicația științifică a mecanismului de apariție a turbulenței și pentru dirijarea unor procese de mare importanță pentru tehnica actuală.

Mișcarea turbulentă este cea mai răspândită în tehnică și în natură, excepție făcând hidrodinamica lubrificației și mișcarea în medii poroase.

Diferențieri calitative și cantitative ale celor două regimuri de mișcare de bază - laminar și turbulent - există la toate fenomenele din hidraulică și la toate mărimile caracteristice.

Valoarea critică a numărului Reynolds, ca medie statistică, în conducte (calculată la diametru) este  $Re_{Dcr}=2320$  sau  $Re_{Rcr}=580$  (calculată la raza hidraulică). În condiții speciale - când nu există cauze perturbatoare (zgomote, vibrații), rugozitate relativ mică, vâscozitate mare - regimul laminar se poate menține și la numere  $Re$  chiar de 40.000, dar în condiții de instabilitate. La existența perturbațiilor exterioare regim turbulent se poate obține și pentru  $Re < 2000$ .

Regimurile de mișcare sunt caracteristice tuturor fluidelor, deci și lichidele și gazelor.

## **7.2. Ecuațiile generale ale mișcării fluidelor reale (Ecuațiile Navier-Stokes)**

Ecuațiile Navier-Stokes sunt de fapt ecuațiile generale de mișcare a mediilor continui (3.2), în care componentele accelerațiilor în sistemul de reprezentare Euler sunt (3.4).

Starea de tensiune într-un punct este exprimată de tensorul eforturilor sub formă de matrice (3.9). Pentru fluide suma tensiunilor normale este invariantă; presiunea într-un punct este.

$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \quad (7.1)$$

### **7.2.1. Ecuațiile mișcării în regim laminar**

Ecuațiile de mișcare pentru fluide reale în regimul laminar pot fi scrise numai cu ajutorul componentelor de viteză  $V(u, v, w)$ . Pentru aceasta se ține seama de legătura dintre eforturi unitare, vâscozitatea fluidului și vitezele de deformății.

Pentru modelul de fluid real eforturile normale vor fi:



$$\begin{cases} p_x = p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V} \\ p_y = p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V} \\ p_z = p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V} \end{cases} \quad (7.2)$$

iar cele tangențiale

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (7.3)$$

Pentru modelul de fluid newtonian, cu compresibilitate nulă, viteza relativă de variație a volumului particulei este nulă,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{V} = 0 \quad (7.4)$$

și eforturile unitare normale devin

$$\begin{cases} p_x = p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_y = p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ p_z = p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (7.5)$$

Efectuând transformarea Helmholtz-Gromeka-Lamb ale sistemului (3.2) în condițiile (3.4), (7.2) și (7.3) ca în 6.1.2, se obține

$$d\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(udx + vdy + wdz) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = -\delta l_v \quad (7.6)$$

unde  $-\delta l_v$  reprezintă lucrul mecanic unitar al forțelor de vâscozitate (având și o componentă a forțelor de compresibilitate în cazul fluidelor compresibile) corespunzătoare unei deplasări elementare. Termenul este negativ, deoarece forțele de vâscozitate au sens opus deplasării și are expresia:

$$-\delta l_v = \vartheta \left[ \nabla^2 u dx + \nabla^2 v dy + \nabla^2 w dz + \frac{1}{3} d(\operatorname{div} \bar{V}) \right] \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (7.8)$$

La lichid eulerian, cu  $v = 0$ , termenul  $-\delta l_v = 0$

Determinantul din (7.6) este nul dacă are două linii proporționale, deci în următoarele cazuri:

- în lungul unei linii de curent

$$\frac{dx}{u} = \frac{dv}{y} = \frac{dw}{z} \quad (7.9)$$

- în lungul unei linii de vârtej

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dv}{\omega_y} = \frac{dw}{\omega_z} \quad (7.10)$$

- în lungul unei linii de mișcare elicoidală

$$\frac{u}{\omega_x} = \frac{v}{\omega_y} = \frac{w}{\omega_z} \quad (7.11)$$

Spre deosebire de mișcarea fluidelor euleriene, mișcarea fluidele newtoniene și reale este totdeauna rotațională, componentele mișcării de rotație nu se pot anula concomitent. Pentru mișcarea permanentă și când determinantul din (7.6) se anulează, aceasta devine:

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = -\delta l_v \quad (7.12)$$

Integrând (7.12) în condiția (7.9...11) între două puncte, rezultă

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right)\bigg|_1^2 = -\int_1^2 \delta l_v \quad (7.13)$$

unde termenul  $-\int_1^2 \delta l_v$  reprezintă lucrul mecanic unitar al forțelor de vâscozitate

pe drumul dintre punctele 1 și 2, deci o energie "pierdută" (disipată), deoarece nu mai poate fi utilizată ca energie hidraulică. Considerând legile termodinamicii se poate arăta că energia disipată se transformă în căldură.

Ecuția (7.13) este ecuația energiei (Bernoulli) pentru fluid real în mișcare permanentă. Scrisă secțiunilor 1 și 2 (7.13), pentru curentul din tub, devine:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \delta l_v \quad (7.14)$$

Pierderile de energie astfel capătă forma:

$$hr_{1-2} = \frac{1}{g} \int_1^2 \delta l_v \quad (7.15)$$

### 7.2.2. Caracteristicile mișcării în regim turbulent

Mișcarea turbulentă este structural diferită de mișcarea laminară și îi sunt caracteristice:

1. Liniile de curent nu sunt paralele sau cvasiparalele cu direcția mișcării ci sunt dezordonate și cu direcții diferite; în masa lichidă apar vârtejuri dispuse dezordonat față de direcția de curgere, mișcări elicoidale cu ax curb (fig. 7.2).

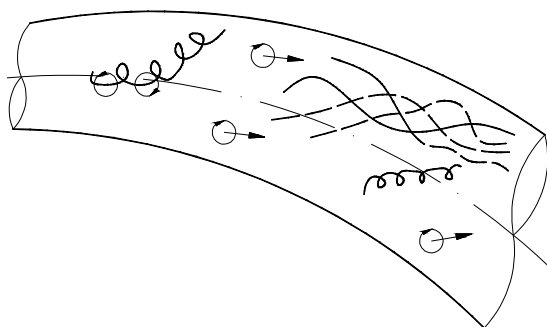


Fig. 7.2. Fenomene în mișcarea turbulentă cu linii de curent dezordonate, vârtejuri și mișcări elicoidale

2. Viteza într-un punct al domeniului mișcării nu este niciodată constantă în timp nici ca mărime, nici ca direcție. Mărimea vitezei oscilează în jurul unor valori medii.

Structural mișcarea turbulentă este determinată de suprapunerea unor mișcări de agitație ale particulelor de fluid peste o mișcare medie. Agitația nu are loc la nivel molecular (nu este o agitație termică), ci la nivel de grup de molecule. Deși mișcarea turbulentă este totdeauna nepermanentă (viteza fluctuează în timp), se poate defini o **mișcare turbulentă permanentă în medie**, dacă fluctuația vitezei se suprapune peste o viteză medie constantă (fig. 7.3. a). Când fluctuația vitezei se suprapune peste o viteză medie variabilă în timp este vorba de mișcarea turbulentă nepermanentă (fig. 7.3. b).

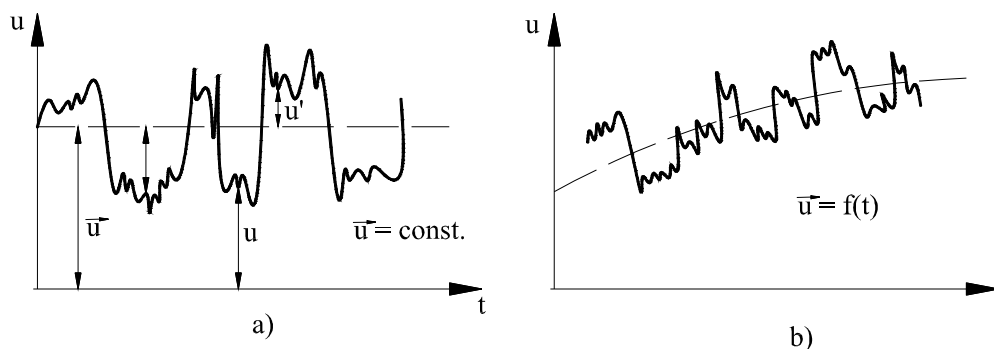


Fig. 7.3. Viteza în mișcare turbulentă, a. permanentă; b. nepermanentă

3. Pierderea de energie între două puncte la un curent de fluid turbulent este mult mai mare decât în mișcarea laminară, ceea ce arată că în mișcarea turbulentă apar eforturi unitare tangențiale suplimentare:

$$hr_{1-2\text{laminar}} < hr_{1-2\text{turbulent}} \quad (7.16)$$

Descrierea matematică a mișcării turbulente se face prin descompunerea ei într-o mișcare medie și o mișcare de pulsație. Notând cu  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  valorile medii ale componentelor vitezelor și cu  $u'$ ,  $v'$  și  $w'$  pulsațiile acestor mărimi, atunci componentele vitezelor instantanee sunt:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases} \quad (7.17)$$

Analog rezultă pentru presiune

$$p = \bar{p} + p' \quad (7.18)$$

Valorile medii ale acestor mărimi se calculează ca medii temporale într-un punct fix:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\bar{u} + u') dt \quad (7.19)$$

Valorile medii al pulsațiilor sunt nule

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{u} dt = 0 \quad (7.20)$$

deci

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = \bar{p}' = 0$$

În calcule intervalul de timp  $T$  se ia suficient de mare pentru ca valoarea calculată să nu depindă de timp, timpul inițial  $t_0$  este arbitrar, putând fi luat zero.

O. Reynolds a stabilit următoarele reguli pentru calculul valorilor medii în timp. Astfel, dacă  $a$  și  $b$  sunt două valori dependente pentru care se

calculează valori medii, iar  $s$  suma din variabilele independente  $x, y, z$  sau  $t$ , conform (7.19) și (7.20) rezultă următoarele reguli de calcul:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{a}, \quad \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \\ \overline{\frac{\partial a}{\partial s}} &= \frac{\partial \overline{a}}{\partial s}, \quad \overline{\int a ds} = \int \overline{a} ds \end{aligned} \quad (7.21)$$

### 7.2.3. Teoria amestecului turbulent

Sub acțiunea pulsației vitezei într-un curent de fluid are loc un schimb neîntrerupt între particulele straturilor învecinate, fapt ce duce la amestecul lichidului. Acest amestec este caracteristica principală a mișcării turbulente și este deosebirea esențială față de mișcarea în regim laminar. Din cauza acestui amestec, pe lângă eforturile unitare tangențiale datorită vâscozității, iau naștere eforturi unitare suplimentare, expresie a energiei consumate de fluid pentru schimbul de particule între straturi.

În procesul amestecului între straturile de fluid învecinate au loc schimburi de impuls (schimb de cantitate de mișcare). Din acest considerent **teoria amestecului** se mai numește și **teoria schimbului de impuls**.

Eforturile unitare suplimentare, datorate pulsațiilor turbulente, pot fi explicate facil prin analogia dată de B.A.Bahmetev, astfel:

- se presupun două vehicule  $A$  și  $B$  deplasându-se cu vitezele  $\overline{u}_A < \overline{u}_B$  pe fiecare vehicul existând mase asemenea discrete. Când cele două vehicule trec unul pe lângă altul se schimbă reciproc într-un interval de timp  $\Delta t$ , mase de aceeași mărime  $\Delta m$  între vehicule (fig. 7.4). Masele schimbate au vitezele  $\overline{u}_A$  și  $\overline{u}_B$ . Acest schimb de mase implică creșterea impulsului vehiculului  $A$  cu  $\Delta m(\overline{u}_A - \overline{u}_B) = \Delta mu'$  și scăderea impulsului vehiculului  $B$  cu  $-\Delta mu'$ . Masa vehiculelor în ansamblu rămâne constantă, dar în intervalul de timp  $\Delta t$  se modifică impulsul vehiculului  $A$  cu  $\Delta mu'$  în plus, și în minus pentru vehiculul  $B$ .

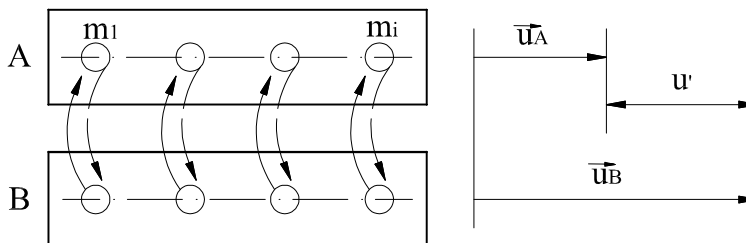


Fig. 7.4. Schemă pentru analogia lui Bahmetev

Conform legii a două a dinamicii pe vehiculul  $A$  creșterea de impuls este egală cu o forță

$$F = \frac{\Delta mu'}{\Delta t} \quad (7.22)$$

iar pentru vehiculul  $B$

$$F = -\frac{\Delta mu'}{\Delta t} \quad (7.23)$$

Aceste forțe modifică viteza vehiculelor, crește viteza lui  $A$  și scade viteza lui  $B$ , deci schimbul de impuls duce la o tendință de uniformizare a vitezelor.

Se imaginează două straturi de lichid paralele,  $A$  și  $B$ , care se deplasează în direcția  $OX$  cu viteza  $\bar{u}_A < \bar{u}_B$ , mișcarea fiind unidirecțională (fig. 7.5).

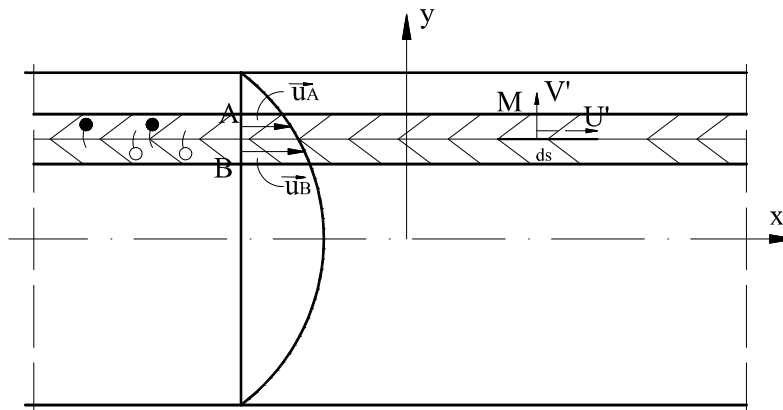


Fig. 7.5. Amestecul turbulent între două straturi paralele de fluid cu viteze diferite

Dacă  $Re > Re_{cr}$  mișcarea este turbulentă și se realizează amestecul turbulent sub influența pulsației vitezei, normale pe direcția de mișcare. Se realizează schimb de particule între straturi conform continuității și, implicit, schimb de impuls. Datorită schimbului de impuls între straturi apar forțe tangențiale suplimentare.

Pentru determinarea forțelor tangențiale suplimentare, respectiv a eforturilor unitare tangențiale aferente, se consideră un punct  $M$  caracterizat prin viteza medie  $\bar{u}$  și componentele vitezei de pulsație  $u'$  și  $v'$ . În jurul

punctului  $M$  se consideră o suprafață  $ds$ , paralelă cu  $\bar{u}$ , făcând parte din suprafața de separație a celor două straturi. Datorită componentei  $v'$  a pulsației vitezei prin suprafața  $ds$ , în timpul  $dt$  trece o cantitate de masă elementară în ambele sensuri (conform continuității),

$$dm = \rho |v'| ds \cdot dt \quad (7.24)$$

Variația impulsului pe direcția  $OX$  sub acțiunea celeilalte componente a pulsației  $u'$  este

$$dm \cdot u' = \rho \cdot ds \cdot u' |v'| dt \quad (7.25)$$

Conform teoremei impulsului forța cu care acționează suprafața  $ds$  asupra fluidului este

$$F = \frac{dm \cdot u'}{dt} = \rho \cdot ds \cdot u' |v'|, \quad (7.26)$$

iar efortul unitar suplimentar cu care acționează fluidul asupra suprafeței  $ds$  este

$$\tau'_{yx} = -\frac{F}{ds} = -\rho u' |v'| \quad (7.27)$$

În concluzie, în mișcarea turbulentă pe direcția  $OX$  efortul unitar tangențial este

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy} - \rho u' |v'| \quad (7.28)$$

care este relația lui L.Prandtl pentru efortul unitar tangențial. Relația (7.28) are două consecințe importante:

1. în mișcarea turbulentă eforturile unitare care se opun mișcării sunt mai mari decât în mișcarea laminară, deci pierderile de energie în mișcarea turbulentă sunt mai mari;

2. conform analogiei Bahmetev în mișcarea turbulentă există o aplatizare a profilului de viteză (a curbei de distribuție a vitezei).



#### 7.2.4. Eforturile suplimentare "aparente"

Conform analogiei Batmetev, aplicată fluidului real sau newtonian în mișcare, se pot calcula eforturile unitare suplimentare datorate turbulenței.

Se consideră o mișcare turbulentă cu viteza  $\bar{V}(u, v, w)$ , pulsațiile componentelor vitezei  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  și un element de suprafață  $dA$ , normală pe direcția  $OX$  (fig. 7.6). Masa de fluid ce trece prin suprafața  $dA$  în intervalul de timp  $dt$  este  $\rho \cdot u \cdot dA \cdot dt$ , iar componenta impulsului după axa  $OX$  este

$$dI_x = \rho \cdot u^2 \cdot dA \cdot dt$$

Celelalte componente ale impulsului după axa  $Y$ , respectiv  $Z$  sunt

$$dI_y = \rho \cdot u \cdot v \cdot dA \cdot dt$$

$$dI_z = \rho \cdot u \cdot w \cdot dA \cdot dt$$

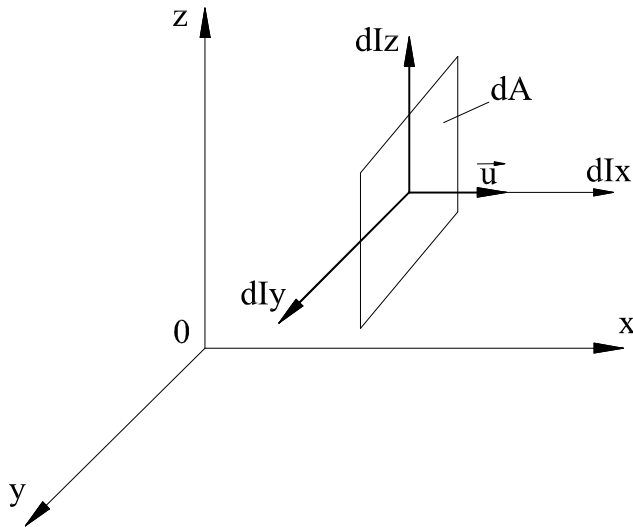


Fig. 7.6. Componentele impulsului masei de fluid ce trece prin elementul de suprafață  $dA$

Valorile medii ale acestor componente raportate la timp sunt

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{dt} = \rho \cdot \overline{u^2} \cdot dA \\ \frac{dI_y}{dt} = \rho \cdot \overline{u \cdot v} \cdot dA \\ \frac{dI_z}{dt} = \rho \cdot \overline{u \cdot w} \cdot dA \end{cases} \quad (7.29)$$

Valorile medii, calculate după regula stabilită de Reynolds sunt:

$$\begin{cases} \overline{u^2} = (\overline{u} + u')^2 = \overline{u^2} + 2\overline{uu'} + \overline{u'^2} = \overline{u^2} + \overline{u'^2} \\ \overline{uv} = (\overline{u} + u')(\overline{v} + v') + \overline{u \cdot v} + \overline{u'v'} \\ \overline{uw} = (\overline{u} + u')(\overline{w} + w') + \overline{u \cdot w} + \overline{u'w'} \end{cases} \quad (7.30)$$

Astfel (7.29) devine

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{dt} = \rho (\overline{u^2} + \overline{u'^2}) dA \\ \frac{dI_y}{dt} = \rho (\overline{u \cdot v} + \overline{u'v'}) dA \\ \frac{dI_z}{dt} = \rho (\overline{u \cdot w} + \overline{u'w'}) dA \end{cases} \quad (7.31)$$

Expresiile (7.31) sunt derivatele impulsului în raport cu timpul, forțe, reprezentând acțiunea suprafeței  $dA$  asupra fluidului; conform acțiunii-reacțiunii, pe suprafața elementară acționează eforturile suplimentare:

$$\begin{aligned} & - \text{după axa } OX \text{ (efortul normal)} \quad p'_x = -\rho \overline{u'^2} \\ & - \text{după axa } OY \text{ (efort tangențial)} \quad \tau'_{xy} = -\rho \overline{u'v'} \\ & - \text{după axa } OZ \text{ (efort tangențial)} \quad \tau'_{xz} = -\rho \overline{u'w'} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Orientând suprafața  $dA$  după direcția  $OY$  și  $OZ$ , în mod asemănător se obțin:

$$\tau'_{yx} = -\rho \overline{v'u'}; \quad p'_y = -\rho \overline{v'^2}; \quad \tau'_{yz} = -\rho \overline{v'w'} \quad (7.33)$$

și

$$\tau'_{zx} = -\rho \overline{w'u'}; \quad p'_z = -\rho \overline{w'^2}; \quad \tau'_{zy} = -\rho \overline{w'v'} \quad (7.34)$$

Aceste eforturi se numesc eforturi aparente ale mișcării turbulente și sunt legate de existența pulsațiilor de viteză. Ele se suprapun cu eforturile unitare datorită vâscozității de la mișcarea laminară. Eforturile suplimentare

aparente formează un tensor simetric, numit tensorul tensiunilor aparente, exprimat prin matricea

$$\begin{bmatrix} p'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & p'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho u'v'} - \overline{\rho u'w'} & \\ -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho v'w'} \\ -\overline{\rho u'w'} & -\overline{\rho v'w'} & -\overline{\rho w'^2} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Aceste eforturi unitare suplimentare se mai numesc și eforturile lui Reynolds.

### 7.2.5. Ecuațiile mișcării în regim turbulent (Ecuațiile Reynolds)

Efectuând transformarea Helmholtz-Gromeka-Lamb pentru sistemul de ecuații (3.2), cu medierea valorii mărimilor hidraulice (în concordanță cu regulile lui Reynolds) și ținând seama de existența eforturilor unitare suplimentare aparente în mișcarea turbulentă, se obține:

$$d\left(\frac{\overline{v^2}}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}dx + \overline{v}dy + \overline{w}dz) + 2\left[\frac{\overline{u}}{\omega_x} \quad \frac{\overline{v}}{\omega_y} \quad \frac{\overline{w}}{\omega_z}\right] = -\delta l_{\vartheta} - \delta l_{pt} \quad (7.36)$$

fiecare termen reprezentând un lucru mecanic elementar (energie elementară) corespunzătoare unității de masă. Termenul suplimentar  $-\delta l_{pt}$  este lucrul mecanic elementar al tensiunilor tangențiale aparente, având expresia

$$-\delta l_{pt} = C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz \quad (7.37)$$

unde

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{\rho u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{\rho u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{\rho u'w'}) \right] \\ C_2 = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{\rho u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{\rho v'^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{\rho v'w'}) \right] \\ C_3 = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{\rho u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{\rho v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{\rho w'^2}) \right] \end{cases} \quad (7.38)$$

Ecuția (7.36) integrată pentru mișcarea permanentă, în lungul unei linii de curent, vârtej sau de mișcare elicoidală și curent din tub, devine

$$\frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{\lambda} + z + \frac{1}{g} \int (\delta l_v + \delta l_{pt}) ds = 0 \quad (7.39)$$

sau scris pentru două secțiuni 1 și 2

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\lambda} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\lambda} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 (\delta l_v + \delta l_{pt}) ds \quad (7.40)$$

unde

$$\frac{1}{g} \int_1^2 (\delta l_v + \delta l_{pt}) = h r_{1-2} \quad (7.41)$$

reprezintă pierderile de energie între secțiunile 1 și 2 datorită vâscozității și pulsațiilor turbulente.

De fapt sistemul (7.36) în condițiile (7.37) și (7.38) nu poate fi integrat în cazul general, deoarece conține opt necunoscute:  $u, v, w, p, u', v', w', p'$  și numai patru ecuații.

### Observații

1. Dacă se compară ecuațiile Navier-Stokes pentru mișcarea laminară și turbulentă se constată că în mișcarea turbulentă ecuațiile conțin trei termeni suplimentari  $C_1, C_2$  și  $C_3$ , reprezentând lucrul mecanic elementar datorat pulsațiilor turbulente;

2. Ecuațiile lui Reynolds nu oglindesc întregul fenomen al mișcării turbulente. Sunt exprimate bine cauzele interne, legate de caracterul pulsatoriu al parametrilor mișcării, dar nu și cauzele externe, referitoare la natura (rugozitatea) pereților cu care curentul vine în contact.

3. Ecuațiile lui Reynolds reprezintă o bază teoretică pentru cercetări, însă ele pot fi folosite numai când se cunoaște dependența pulsațiilor de valorile medii ale mărimilor hidraulice. Legătura între valorile medii și pulsații se stabilește pe două căi: ipoteze simplificatoare și legi semiempirice, și măsurători sistematice și statistică matematică.

4. Condițiile la limită pentru viteze medii temporare sunt identice cu mișcarea laminară, iar pulsațiile de viteză sunt nule la perete, ceea ce arată că si

eforturile unitare suplimentare sunt nule la perete, rămânând cele datorită vâscozității.

### 7.3. Teoria stratului limită

Posibilitatea de soluționare exactă a ecuațiilor Navier-Stokes este limitată datorită dificultăților matematice ce apar la integrare. Soluționările aproximative au la bază ideea neglijării unor termeni din ecuații, rezultatele obținute fiind valabile numai cazurilor concrete, de obicei pentru curgeri la numere  $Re$  mici. Astfel de soluții rezolvă unele probleme practice pentru numere  $Re$  mici, dar majoritatea curgerilor practice sunt caracterizate de numere  $Re$  mari. Soluționarea problemelor în astfel de situații utilizează o aproximare, imaginată de Ludvig Prandtl, numită "**Teoria stratului limită**". Prin această teorie se pot rezolva două categorii de probleme practice: mișcări între plăci plane, paralele și mișcarea în conducte.

#### 7.3.1. Aspectul fizic al stratului limită

Se consideră (pentru simplificarea expunerii) mișcarea plană și permanentă a unui fluid puțin vâscos (ex. apă) în jurul unui corp solid, aflat în repaus și având forma unui cilindru drept, infinit de lung, a cărei secțiune dreaptă este un profil hidrodinamic. Mult în amonte (teoretic la infinit) lichidul are viteza  $\bar{V}_\infty$ , uniform distribuită și perpendiculară pe generatoarele cilindrului (fig. 7.7. a). Pentru un lichid eulerian viteza  $\bar{V}$  ar fi tangentă la suprafața  $S$  a corpului și ar varia după o lege ce satisface continuitatea (fig. 7.7. b), curba Eu. Lichidul fiind vâscos în realitate aderă la suprafața  $S$ . Experimental se constată că după normala la suprafața  $S$ , viteza  $\bar{V}$  variază după curba Ne, adică crește de la perete, unde  $v = 0$ , la  $v = V$  la o distanță " $\delta$ ", mică în raport cu dimensiunile curentului. Viteza  $v$  variază considerabil în raport cu distanța la perete în intervalul  $[0; \delta)$ . Locul geometric al punctelor unde  $v \sim V_\infty$  este limita exterioară, iar suprafața  $S$  limita interioară a așa numitului "**start limită**" sau "**strat de frecare**".

În interiorul stratului limită eforturile tangențiale sunt mari, chiar dacă vâscozitatea este mică, fiindcă gradientul de viteză este apreciabil. Pentru o distanță mică în lungul curentului în interiorul stratului limită se poate accepta că liniile de curent sunt drepte paralele între ele și cu suprafața corpului, deci  $V = V_x$  și  $v = v_x$ .

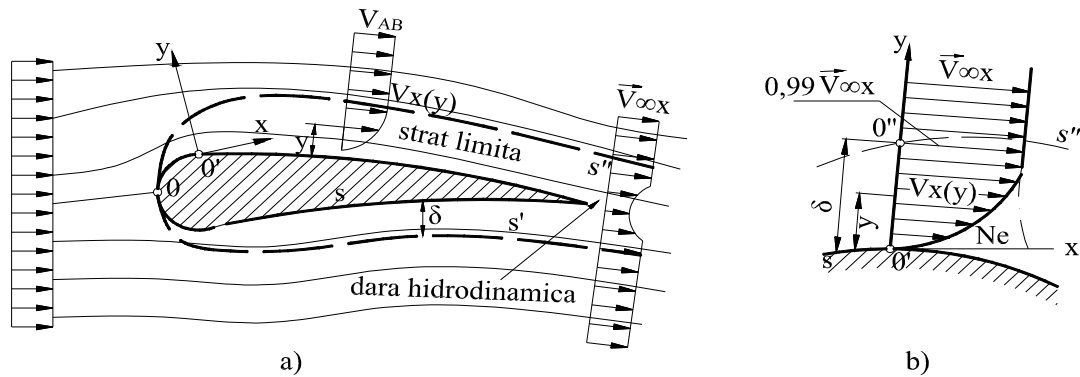


Fig. 7.7. Mișcarea fluidului vâscos în jurul unui corp

Însă  $v_x(y)$  variază foarte mult pe distanța  $\delta$  (grosimea stratului limită), deci  $\tau = \mu \frac{dv_x(y)}{dy}$  este mare în interiorul stratului limită. În exterior,  $y > \delta$ , se poate accepta  $\frac{dV_x(y)}{dy} \cong 0$ , deci  $\tau = 0$ . Astfel domeniului mișcării se împarte în două subdomenii:

- interiorul stratului limită, unde eforturile tangențiale sunt mari și obligatoriu trebuiesc luate în calcule;
- exteriorul stratului limită, unde eforturile tangențiale se pot neglija.

Se numește strat limită, stratul de lichid în mișcare din imediata vecinătate a corpului solid în care viteza variază de la zero (la suprafața corpului) la valoare corespunzătoare curgerii exterioare și în care se manifestă intens forțele tangențiale datorită vâscozității.

Fiind admis paralelismul liniilor de curent în stratul limită, iar grosimea sa mică permite neglijarea influenței greutateii în raport cu forțele de frecare, teoretic, presiunea în interiorul său (pe segmentul  $O'O''$ ) este constantă.

În avalul corpului, stratul limită se continuă printr-o **dără hidrodinamică** - numită și apă moartă. În această zonă, în apropierea corpului se mențin caracteristicile stratului limită, dar spre aval tind să se uniformizeze.

**Desprinderea stratului limită.** Când corpul are formă hidrodinamică alungită, viteza  $\bar{V}_\infty$  fiind dirijată în lungul corpului și are valoare mică, fluidul din stratul limită trece în mod continuu în dără hidrodinamică. Când corpul nu are formă hidrodinamică curentul nu poate urmări tot conturul corpului, se produce desprinderea stratului limită și o parte din fluidul din stratul limită este antrenat în dără hidrodinamică sub formă de vârtejuri.

Pentru exemplificarea fenomenului se consideră mișcarea în jurul unui corp cilindric simetric (fig. 7.8). Dacă fluidul este eulerian, pe jumătatea amonte al profilului corpului, între punctele  $A$  și  $B$ , fluidul se mișcă accelerat, iar presiunea scade pe măsura apropierii de punctul  $B$  (de secțiunea maximă a corpului). Pe jumătatea aval al corpului, între punctele  $B$  și  $D$ , are loc o mișcare încetinită, presiunea crescând o dată cu apropierea de punctul  $D$ . Pentru un fluid newtonian sau real domeniul curgerii se împarte în subdomeniul stratului limită și subdomeniul curgerii exterioare. Pentru zona curgerii exterioare sunt valabile relațiile deduse pentru fluid eulerian (se pot neglija frecările), dar în interiorul stratului limită se consideră forțele de frecare.

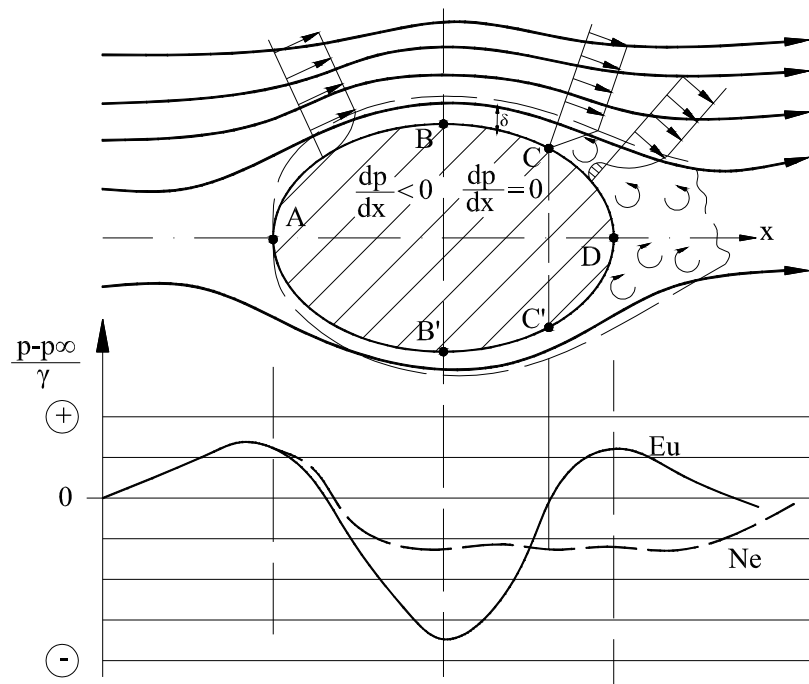


Fig. 7.8. Mișcarea unui curent de fluid în jurul unui corp solid.

Pentru un fluid newtonian sau real în mișcarea sa în interiorul stratului limită, pe domeniul  $AB$  o parte din energia particulelor este disipată (se transformă în căldură) și nu este suficientă pentru învingerea creșterii de presiune de pe drumul  $BD$ . Pe traseul  $BD$ , undeva într-un punct  $C$ , particula se oprește și este împinsă în afară de către celelalte particule sosite din amonte. Astfel particula ajunge în afara stratului limită de unde, sub efectul repartiției presiunii, particula este împinsă înapoi, dând naștere unui vârtej. Aspectul mișcării în aval de punctul  $C$  se schimbă radical față de mișcarea fluidului

eulerian și, bineînțeles, repartiția presiunilor. În zona de vârtejuri din aval presiunea este sensibil mai mică decât în cazul curgerii fluidului eulerian. (Acesta scădere a presiunii constituie cauza "rezistenței de presiune" a corpurilor în curenți de fluid).

Poziția punctului C, de desprindere a stratului limită, poate fi definită printr-o condiție matematică, examinând profilele de viteze succesive în jurul punctului C. Poziția acestui punct este stabilită de faptul că în apropierea peretelui după desprindere, particulele de fluid curg în sens contrar față de mișcarea exterioară, datorită gradientului de presiune  $\partial p / \partial x > 0$ . Punctul de desprindere reprezintă limita dintre cele două mișcări de sens contrar și, deci, în acest punct gradientul vitezei pe direcția perpendiculară pe corp este nul

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{\substack{x=x_c \\ y=0}} = 0 \quad (7.42)$$

De aici rezultă că tensiunea de frecare în acest punct este nulă  $\tau = 0$ . În spatele corpului, într-un curent cu numere  $Re$  suficient de mari, în dâra hidrodinamică se formează vârtejuri care se rotesc alternant spre dreapta și stânga. Această succesiune de vârtejuri alternante se mai numește aleea vârtejurilor lui Kármán. În tehnică deseori trebuie evitată sau atenuată desprinderea, acesta conducând la creșterea rezistenței de înaintare a corpurilor în fluide.

### 7.3.2. Grosimea stratului limită

Grosimea stratului limită nu se poate defini univoc, deoarece teoretic influența vâscozității se resimte în tot domeniul ocupat de fluid. Se acceptă convențional grosimea stratului limită, distanța " $\delta$ " de la perete la care valoare vitezei fluidului vâscos nu diferă mai mult de 1% de valoarea vitezei curgerii exterioare. De fapt racordarea profilului de viteză din stratul limita la profilului vitezei scurgerii exterioare are loc asimptotic. Grosimea stratului limită depinde de regimul de curgere din acest strat, care este caracterizat de numărul  $Re$  constituit cu viteza curentului exterior  $V$  și o lungime caracteristică  $x$ , măsurată de la bordul de atac în lungul suprafeței corpului:

$$R_e = \frac{V \cdot x}{\nu} \quad (7.43)$$



La o curgere în jurul unei plăci plane cu grosime neglijabilă, semiinfinită (fig. 7.9), regimul de mișcare în stratul limită este laminar pentru distanțe  $x$  mici (în apropierea bordului de atac), trece în tranziție pentru un  $X_{cr1}$ , apoi în turbulent pentru  $x > X_{cr2}$ .

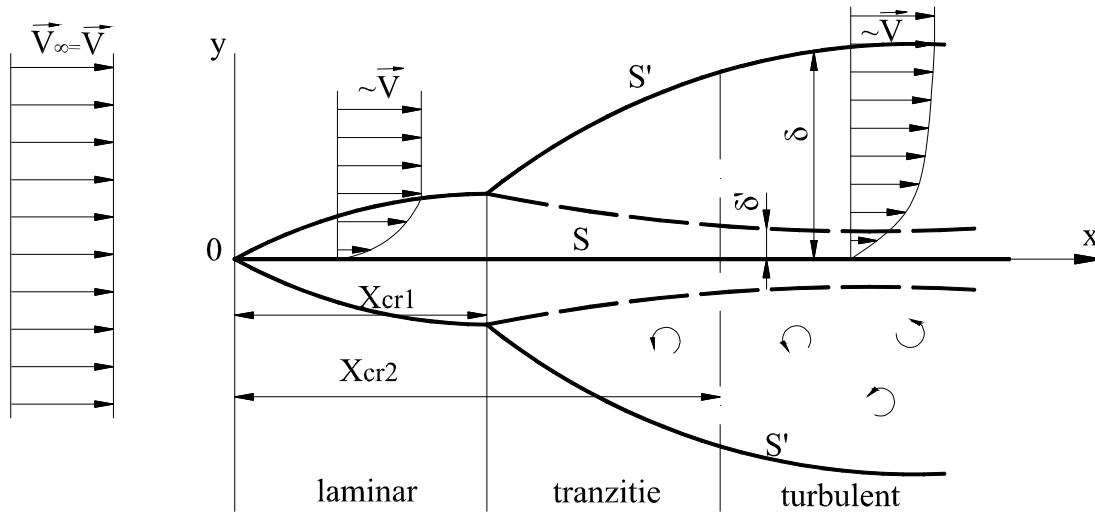


Fig. 7.9. Stratul limită și regimul de mișcare în interiorul acestuia la curgere în jurul plăcii plane.

Numerele  $Re$  critice depind de forma corpului. Pentru placă plană  $Re_{cr1} \approx 3,2 \cdot 10^5$  iar  $Re_{cr2} \approx 10^6$ . În interiorul stratului limită de tranziție și turbulent există un substrat în care caracteristicile curentului sunt laminare, numit "**substrat laminar**" sau "**substrat vâscos**".

Grosimea stratului limită în zona laminară se poate evalua aproximativ prin considerarea ordinilor de mărime ale forțelor de inerție și de vâscozitate.

Forța de inerție raportată la volum este  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Pentru placă de lungime  $L$ , în

curent cu viteza  $V$ , mărimea  $\frac{\partial u}{\partial x}$  este proporțională cu  $V/L$ , astfel ca ordinul de

mărime al forței de inerție este  $\rho V^2 / L$ . Forța de vâscozitate raportată la

unitatea de volum este  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ .

În zona laminară  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  forța de vâscozitate devenind  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Gradientul vitezei pe direcția normală pe placă  $\frac{\partial u}{\partial y}$  are ordinul de mărime  $V/\delta$ , ordinul de mărime al forței de vâscozitate devenind  $\frac{\mu V}{\delta^2}$ . În zona laminară forțele de inerție și de vâscozitate au același ordin de mărime, deci

$$\mu \left( \frac{V}{\delta^2} \right) \sim \rho \left( \frac{V^2}{L} \right) \quad (7.44)$$

Ordinul de mărime a grosimii stratului limită în zona laminară este:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{V}} \quad (7.45)$$

Experiențele lui Blasius calibrează ecuația (7.45), care este

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu L}{V}} \quad (7.45')$$

sau în mărime adimensională

$$\frac{\delta}{L} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{VL}} = 5 \sqrt{\frac{1}{Re_L}}, \quad (7.45'')$$

unde  $Re_L$  este numărul  $Re$  pentru  $L$ . Înlocuind  $L$  cu o lungime curentă  $x \in [0, x_{cr1}]$  rezultă grosimea relativă a stratului limită în zona laminară

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (7.46)$$

În zona de tranziție și turbulență, grosimea stratului limită face un salt de îngroșare, grosimea sa calculându-se cu relații empirice.

Pentru placă plană paralelă cu direcția curentului se poate utiliza relația

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{\sqrt[5]{Re_x}}. \quad (7.47)$$

Grosimea substratului vâscos " $\delta$ " scade în zona de tranziție, ajungând la valoarea constantă în zona turbulentă. Grosimea sa este foarte mică, însă prezintă importanță deosebită pentru pierderile de sarcină în regim turbulent.

### 7.3.3. Formarea profilului de viteză în conducte și între plăci plan paralele

La intrarea dreaptă într-o conductă sau la o curgere între plăci plan paralele distribuția vitezei pe secțiune poate fi considerată uniformă ca în cazul fluidelor euleriene. La fluid newtonian și real în mișcare intervine vâscozitatea, la perete viteza anulându-se. Se formează de la bordul de atac în aval stratul limită, care, după un parcurs oarecare, se extinde pe întreaga secțiune. Dacă numărul  $Re$  calculat la viteza medie și diametru este inferioară valorii critice se dezvoltă în conductă stratul limită laminar, radial simetric pentru conducte circulare și plan simetric pentru curgere între plăci plan paralele (fig. 7.10).

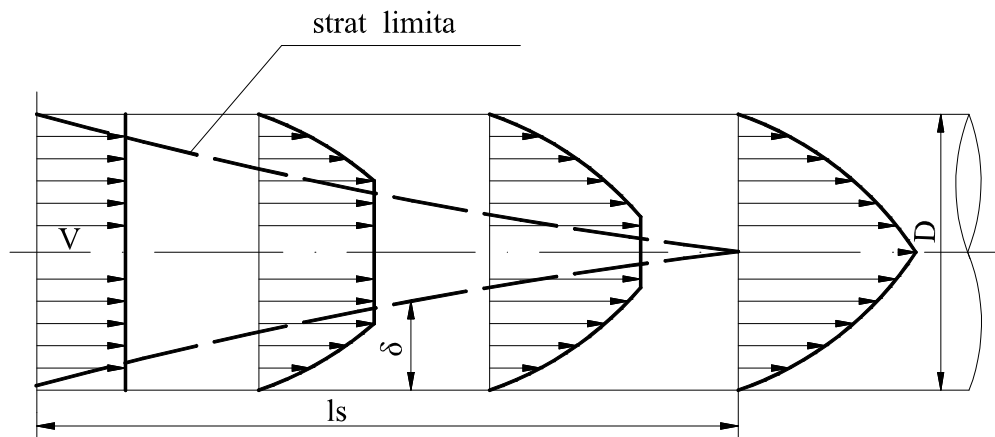


Fig.7.10. Formarea profilului de viteză în mișcarea laminară

În interiorul stratului limită se resimte efectul vâscozității asupra profilului de viteză, iar în exterior viteza este uniformă. Lungimea de stabilizare a profilului de viteză în conducte circulare este

$$l_s = 0,03 Re_D \cdot D \quad (7.48)$$

În cazul mișcării turbulente alura stratului limită diferă față de mișcarea laminară și în zona turbulentă, datorită schimbului de impuls, profilul de viteză se aplatizează. Extinderea sa de la bordul de atac spre aval este ca la mișcarea laminară (fig. 7.11).

Lungimea de stabilizare a vitezei în regim turbulent nu este cert determinată și variază în limitele

$$20D \leq l_s \leq 50D \quad (7.49)$$

#### 7.4. Mișcarea laminară a fluidelor newtoniene și reale

Problemele tehnice, aplicative ale mecanicii fluidelor se referă la calculul vitezelor, debitelor și presiunilor în instalații hidraulice închise sau deschise. În lungul acestora se găsesc diferite dispozitive, aparate ș.a.

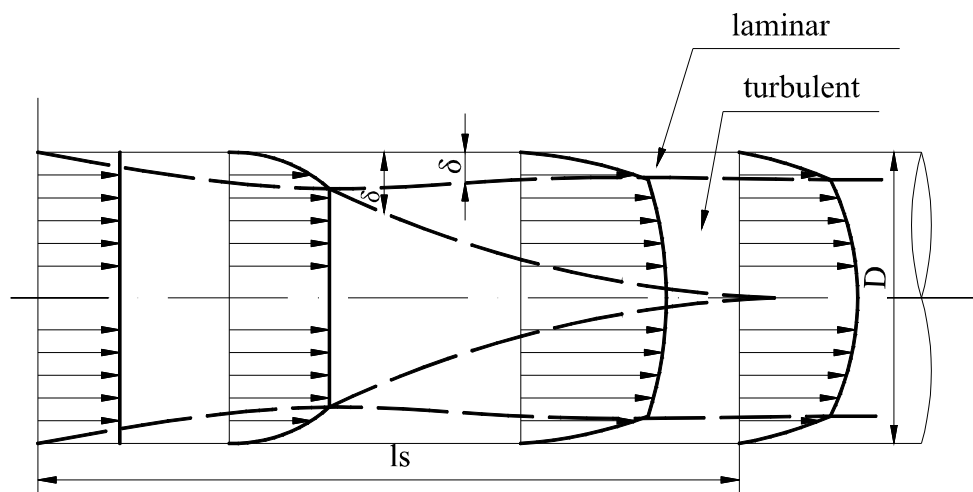


Fig. 7.11. Formarea profilului de viteză în mișcarea turbulentă

Deși în majoritatea cazurilor mișcarea este turbulentă și, pentru durate mari nepermanentă, se întâlnesc și cazuri de mișcări laminare, iar pe perioade scurte mișcarea poate fi considerată permanentă. De obicei dimensionarea sistemelor hidraulice se face pentru mișcarea permanentă, iar în mișcarea nepermanentă se fac verificări.

În continuare se tratează caracteristicile mișcării laminare în conducte circulare, între plăci plan paralele, cu nivel liber, între plăci plan paralele în jurul obstacolelor.

### 7.4.1. Mișcarea laminară în conducte circulare rectilinii (Mișcarea Hagen-Poiseuille)

În acest cadru se urmărește distribuția vitezelor, efortului unitar tangențial, debitul, viteza medie, pierderea de sarcină, coeficientul Coriolis, liniile de curent și de vârtej.

#### 1. Distribuția vitezelor

După cum s-a arătat la 7.3.3 distribuția vitezei în conductă este axial simetrică și se formează datorită eforturilor tangențiale. După distanța de stabilizare  $l_s$  în conductă se obține profil de viteză stabil, care se menține în aval în secțiuni succesive.

Se consideră o conductă circulară, orizontală, de rază  $r_0$ , în care mișcarea este laminară și permanentă. În interiorul conductei se delimitează un volum de control cilindric, coaxial cu conducta de rază " $r$ " și lungime " $l$ ". La generatoarea exterioară a volumului de control viteza este  $u$  și datorită gradientului de viteză se dezvoltă efortul tangențial  $\tau$  (fig. 7.12).

Se aplică ecuația teoremei impulsului volumului de control (6.86'), care se proiectează după axa  $X$ . Întrucât este o mișcare permanentă și  $A_1 = A_2$ , vitezele medii  $V_1$  și  $V_2$  sunt egale, diferența de presiune  $p_1 - p_2$  fiind expresia pierderilor de sarcină.

$$T = \tau \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = (p_1 - p_2) \pi r^2 \quad (7.50)$$

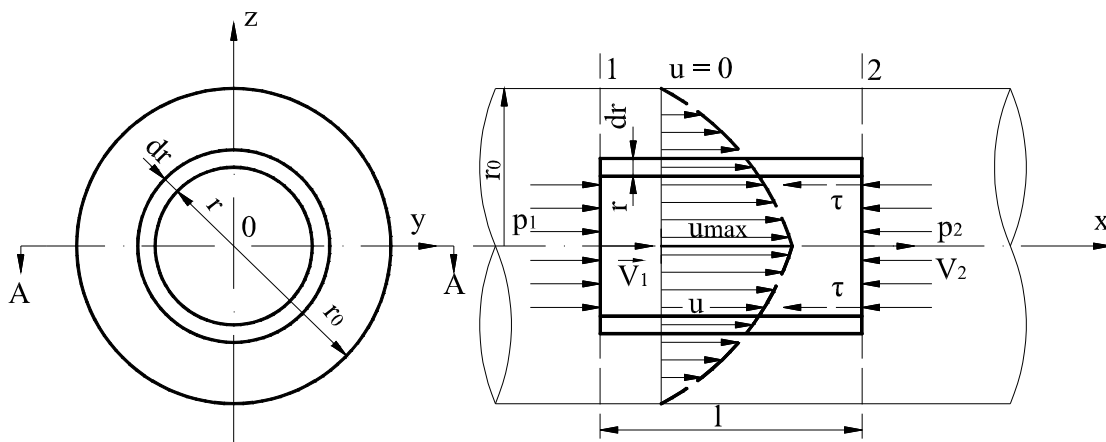


Fig. 7.12. Schema de calcul a distribuției vitezei în conducte circulare și mișcare laminară

Înlocuind  $\tau$  din expresia lui Newton se obține:

$$-\mu du / dr \cdot 2 \cdot l = (p_1 - p_2) r$$

sau

$$du = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr \quad (7.51)$$

care este ecuația diferențială a distribuției vitezei în secțiunea normală a conductei. Prin integrare rezultă:

$$u = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2 + c \quad (7.52)$$

Condiția la peretele conductei ( $r = r_0$ ) este  $u = 0$ , rezultând  $c$ , care, reînlocuit în (7.52) conduce la:

$$u = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \quad (7.53)$$

În coordonate cilindrice ecuația reprezintă un paraboloid de gradul 2. Viteza maximă se obține în axa conductei,  $r = 0$ , și are valoarea:

$$u_{\max} = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2 \quad (7.54)$$

Raportând (7.53) la (7.54), rezultă:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2, \quad (7.55)$$

ceea ce arată că viteza locală într-un punct depinde de viteza maximă și de poziția relativă a punctului de pe raza conductei. Viteza relativă  $u/u_{\max}$  nu depinde de dimensiunile absolute ale conductei și de natura lichidului. Diagrama vitezei relative (fig. 7.13.a) este identică tuturor conductelor circulare indiferent de fluidul vâscos care curge.

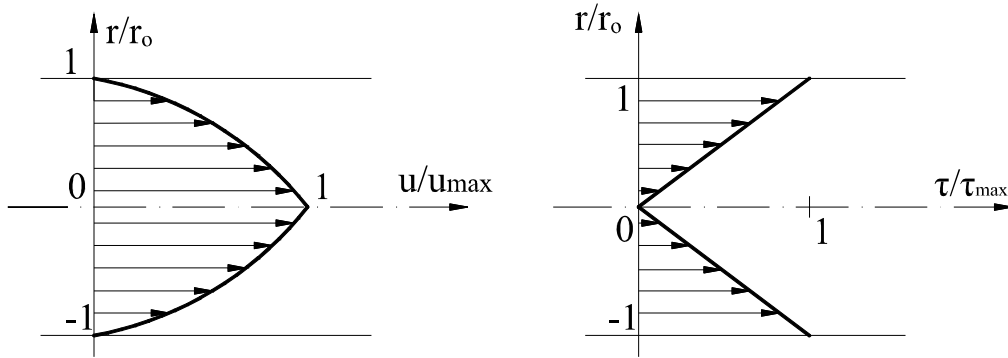


Fig. 7.13. Diagrama relativă de distribuție a: a) vitezelor; b) eforturilor tangențiale la mișcarea laminară în conducte circulare

## 2. Distribuția eforturilor tangențiale

Se consideră ecuația efortului tangențial după Newton în care se înlocuiește  $du/dr$  din ecuația diferențială a vitezei (7.51):

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2l} r_0 \quad (7.56)$$

Se observă că distribuția efortului tangențial este liniară în raport cu raza: pentru  $r = 0$ , rezultă  $\tau = 0$ , iar pentru  $r = r_0$ ,

$$\tau_{\max} = -\frac{p_1 - p_2}{2l} r_0 \quad (7.56')$$

Din raportul (7.56) și (7.56') rezultă efortul tangențial relativ (fig. 7.13. b)

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{r}{r_0} \quad (7.57)$$

care nu depinde de mărimile absolute ale conductei și de natura fluidului, fiind asemenea tuturor conductelor și fluidelor în mișcare laminară.

## 3. Debitul și viteza medie

**Debitul** transportat de conductă se calculează pe baza figurii 7.12, însumând debitele elementare pe inele de grosime  $dr$  pentru care viteza se poate considera constantă la valoarea "u".

$$dQ = u dA = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$Q = \int dQ = \frac{(p_1 - p_2) \pi}{2\mu l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\mu l} r_0^4 \quad (7.58)$$

Într-o instalație experimentală, pe baza relației de mai sus, se poate determina coeficientul de vâscozitate dinamic.

**Viteza medie** rezultă din ecuația de continuitate

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\mu l} r_0^4 \frac{1}{\pi r_0^2} = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2 \quad (7.59)$$

sau

$$V = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (7.60)$$

deci viteza medie este jumătatea vitezei maxime.

#### 4. Coeficientul de rezistență al pierderilor liniare (coeficientul Darcy-Weisbach)

Pierdere de sarcină, rezultată din ecuația energiei este

$$h_{r_{1-2}} = \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} \right) \quad (7.61)$$

însă la conductă orizontală  $z_1 = z_2$ ,  $v_1 = v_2$  și profilul de viteză fiind asemenea,  $\alpha_1 = \alpha_2$  deci

$$hr = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \text{ sau } p_1 - p_2 = \gamma hr \quad (7.62)$$

Se înlocuiește (7.61) în (7.59), obținând:

$$hr = \frac{8\mu l V}{\gamma r_0^2} = \frac{8\rho v_1 V}{\rho g \frac{D^2}{4}} \frac{2V}{2V} = \frac{64}{VD} \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (7.63)$$



sau

$$hr = \frac{64}{\text{Re}_D} \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (7.64)$$

care este expresia pierderilor de sarcină liniară.

Cantitatea

$$\zeta_{lin} = \frac{64}{\text{Re}_D} \frac{l}{D} \quad (7.65)$$

este coeficientul pierderilor de sarcină liniară, iar

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad (7.66)$$

este coeficientul lui Darcy-Weisbach.

Convențional pierderile de sarcină se exprimă (după Weissbach) în funcție de termenul cinetic

$$hr = \zeta \frac{V^2}{2g} \quad (7.67)$$

sau pierderile de sarcină liniare sub forma

$$hr = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (7.68)$$

Din (7.63) se constată că în regimul laminar, în conducte circulare, pierderea de sarcină liniară depinde direct de viteza medie la puterea unu.

### 5. Coeficientul Coriolis

În ecuația (6.40) s-a definit coeficientul lui Coriolis, în care  $u$  este viteza locală, iar  $V$  viteza medie. Înlocuind acestea de la mișcarea laminară, se obține

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{V^3 A} = \frac{\pi \left( \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \right)^3 \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^3 2r dr}{\left( \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \right)^3 (r_0^2)^3 \pi r_0^2} \quad (7.69)$$

Făcând substituirea  $r_0 - r^2 = t$ ,  $dt = -2r dr$ , integrala din (7.69) devine

$$\int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^3 2r dr = \int t^3 dt = \frac{-t^4}{4} = -\frac{1}{4} (r_0^2 - r^2)^4 \Big|_0^{r_0} = \frac{r_0^8}{4}$$

deci

$$\alpha = \frac{8r_0^8}{4r_0^8} = 2 \quad (7.70)$$

## 6. Liniile de curent și de vârtej

În mișcarea Hagen-Poiseuille componentele vitezei  $V$  sunt:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left[ r_0^2 - (y^2 + z^2) \right]; v = 0; w = 0. \quad (7.71)$$

Liniile de curent sunt drepte paralele cu axa  $OX$ . Mișcarea fiind permanentă liniile de curent coincid cu traiectoria.

Componentele vectorului vârtej,  $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{V}$  sunt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} z \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} y \end{aligned} \quad (7.72)$$

ecuațiile diferențiale ale liniilor de vârtej

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

în aceste condiții devin:

$$dx = 0; -\frac{dz}{z} = \frac{dz}{y} \quad (7.73)$$

integrând, se obține:  $x = \text{const.}, y^2 + z^2 = \text{const.}$  (7.74)

deci liniile de vârtej sunt cercuri concentrice, cu centrele în axa conductei și în plane normale pe direcția curgerii. Mărimea vectorului vârtej este:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r \quad (7.75)$$

sau ținând cont de (7.59)

$$\omega = \frac{2Vr}{r_0^2} \quad (7.76)$$

Mărimea vectorului vârtej într-un punct este proporțională cu viteza medie și cu distanța punctului de la axa conductei. Pe axă  $r = 0$  și  $\omega = 0$ , iar la pereți  $r = r_0$  și  $\omega_{\max} = \frac{2V}{r_0}$ . În valoare relativă  $\frac{\omega}{\omega_{\max}} = \frac{r}{r_0}$  este identic cu distribuția efortului unitar tangențial.

#### 7.4.2. Unele soluții exacte și apoximative ale ecuațiilor Reynolds

Ecuațiile Reynolds și a continuității sunt suficiente pentru studiul mișcări laminare a fluidelor newtoniene și reale. Rezolvarea lor însă întâmpină dificultăți de ordin matematic și s-au găsit soluții numai în cazuri particulare simple. În cazuri mai complicate se recurge la soluții apoximative.

În soluționarea acestor ecuații se folosesc două metode:

- **metoda directă**, funcțiile  $u$ ,  $v$ ,  $w$  și  $p$  - care satisfac ecuațiile de mișcare și continuitate - sunt soluții exacte, dacă sunt soluțiile unei probleme la limită corespunzătoare unei probleme fizice concrete. Domeniul ocupat de fluid are frontiere solide pe care se satisface condiția de aderență;

- **metoda indirectă**, se consideră pentru  $u$ ,  $v$ ,  $w$  și  $p$  funcții cunoscute, care satisfac ecuațiile de mișcare și continuitate fără ca acestea să fie soluția unei probleme fizice concrete. Aceste soluții uneori pot corespunde problemelor fizice reale. În prezent există numeroase soluții exacte ale ecuațiilor Navier-Stokes în special pentru fluide newtoniene.

Înlocuirea ecuațiilor Reynolds prin altele mai simple permit soluții apoximative. Pentru numere  $Re$  mici sunt cunoscute aproximațiile lui Stokes și Oseen, iar pentru numere  $Re$  mari, mișcările limită Oseen și mișcările în stratul limită.

#### 1. Mișcarea laminară a unui fluid real între două plăci plan paralele

Se examinează mișcarea unui fluid de densitate  $\rho$  și coeficient de vâscozitate  $\nu$  între două plăci plan paralele, de suprafață mare, situate la distanța  $h$ . Plăcile sunt mobile, se mișcă în direcția axei  $x$  cu vitezele  $V_1$  și  $V_2$  (fig. 7.14).

Mișcarea este permanentă,  $\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta w}{\delta t} = 0$ , respectiv,  $v = 0$ ;  $w = 0$  și  $u = u(x, z) \neq 0$ . Din continuitate rezultă  $\frac{\delta u}{\delta x} = 0$ , deci  $u = u(z)$ . Componentele forței masice sunt  $F_x = F = 0$  și  $F_z = -g$ . În aceste condiții ecuațiile Navier-Stokes devin

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \end{cases} \quad (7.77)$$

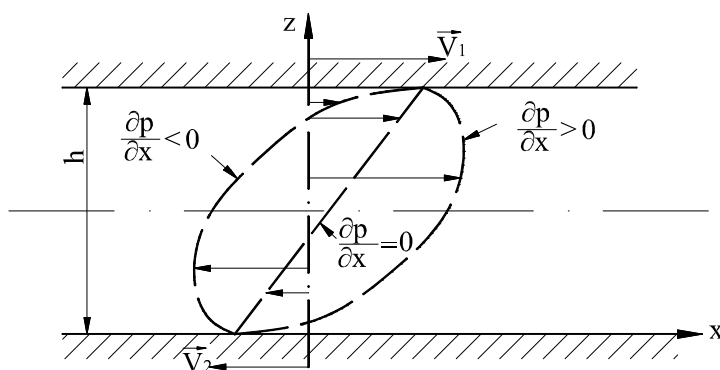


Fig. 7.14. Mișcarea laminară permanentă între două plăci plane paralele mobile

Ultimile două ecuații ale sistemului, (7.77) arată că în plane normale pe OX presiunea se distribuie după legea hidrostaticii  $\frac{p}{\rho} + z = \text{const}$ . Prima ecuație se integrează pentru două ipoteze ale gradientului de presiune.

**a. Gradient de presiune nul**  $\left( \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right)$

Integrarea primei ecuații a sistemului (7.77) conduce la

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c_1; \quad u = c_1 z + c_2 \quad (7.78)$$

Condițiile la limită sunt:  $z = 0; u = -V_2$  și  $z = h; u = V_1$ .

Rezultă  $c_2 = -V_2$  și  $c_1 = \frac{V_1 + V_2}{h}$ , respectiv distribuția vitezelor este

$$u = \frac{V_1 - V_2}{h} z - V_2.$$

Efortul unitar tangențial devine

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dz} = -\mu \frac{V_1 + V_2}{h} \quad (7.80)$$

uniform distribuit în toată masa fluidă.

În cazul particular  $V_2 = 0$  se obține mișcarea **Couette**, la care:

$$u = \frac{V_1}{h} z \quad \text{și} \quad \tau_{xy} = -\mu \frac{V_1}{h}. \quad (7.81)$$

**b. Gradient de presiune nenul** ( $\frac{\delta p}{\delta x} \neq 0$  și  $\frac{\delta p}{\delta x} = \text{const.}$ )

Integrarea primei ecuații a sistemului (7.77) conduce la:

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + c_1 z + c_2 \quad (7.82)$$

pentru care constantele de integrare se determină din aceleași condiții limită, rezultând:

$$c_2 = -V_2$$

$$c_1 = \frac{V_1 + V_2}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h,$$

deci distribuția vitezei este:

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z(z - h) + \frac{V_1 + V_2}{h} \cdot z - V_2 \quad (7.83)$$

Din condițiile:

$$q = \int_0^h u \cdot dz,$$

$$V = \frac{q}{h};$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

rezultă debitul, viteza medie și distribuția efortului unitar tangențial.

Un caz particular al acestei situații este mișcarea Poiseuille, pentru  $V_1 = V_2 = 0$ , rezultând:

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z(z-h) \quad (7.84)$$

Pentru  $z = h/2$  se obține:

$$u_{\max} = \frac{h^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.85)$$

Curgerea are loc pentru  $\delta p / \delta x \neq 0$ . Debitul specific și viteza medie sunt:

$$q = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ și } V = \frac{q}{n} = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.86)$$

Direcția de mișcare depinde de semnul gradientului de presiune  $\delta p / \delta x$ . Efortul unitar tangențial devine:

$$\tau_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (2z-h) \quad (7.87)$$

care este nul la  $z = h/2$  și are valoarea maximă la plăci:

$$\tau_{yx \max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot h \quad (7.88)$$

Studiul mișcării unui fluid real între plăci plan paralele își găsește utilizarea în soluționarea problemelor de lubrifiere.

## 2. Mișcarea laminară a unui fluid real, cu suprafață liberă, pe un plan înclinat

Ecuatiile Reynolds pot fi soluționate la mișcarea unui lichid newtonian sau real care curge într-o peliculă de grosime  $h$  pe un plan înclinat (fig. 7.15).

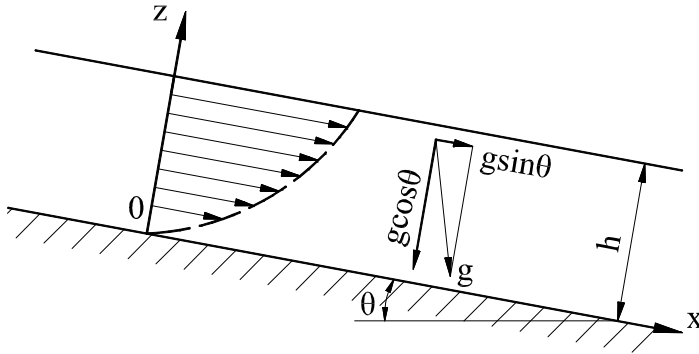


Fig. 7.15. Mișcarea laminară permanentă cu nivel liber

Pe suprafața liberă presiunea este constantă,  $p = p_0$ ;  $\frac{\delta p}{\delta x} = 0$ , iar ecuația suprafeței libere este  $z = h$ . Mișcarea este plană și  $u = u(x, z) \neq 0$ ;  $v = 0$ ;  $w = 0$ . Din continuitate rezultă  $\delta u / \delta x = 0$ , deci  $u = u(z)$ . Componentele forței masice sunt  $F_x = g \cdot \sin \theta$ ;  $F_y = 0$  și  $F_z = -g \cdot \cos \theta$ . În aceste condiții ecuațiile Navier-Stokes devin:

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g \cdot \sin \theta = 0 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g \cdot \cos \theta. \end{cases} \quad (7.89)$$

Ultimile două ecuații ale sistemului arată că în plane normale pe OX presiunea variază după legea hidrostaticii. După integrare prima ecuație devine:

$$u = -\frac{g}{2\nu} \cdot \sin \theta \cdot z^2 + c_1 z + c_2, \quad (7.90)$$

la care constantele rezultă din condiții la limită: pentru  $z = 0$ ,  $u = 0$  și pentru  $z = h$ ,  $\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ , astfel  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = gh / 2\nu \cdot \sin \theta$ , respectiv:

$$u = \frac{g}{2\nu} \sin \theta (2hz - z^2) \quad (7.91)$$

Viteza maximă se obține la suprafață, cu valoarea:

$$u_{\max} = \frac{gh^2}{2\nu} \sin \theta. \quad (7.92)$$

Debitul specific tranzitat este:

$$q = \int_0^h u \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{gh^3}{\nu} \sin \theta. \quad (7.93)$$

### 3. Mișcarea permanentă a unui fluid newtonian (real) între două plăci plane paralele apropiate, în jurul unui corp cilindric (Hele-Shaw)

Între două plăci, paralele, orizontale, apropiate este amplasat un cilindru cu axa normală pe plăci, capetele cilindrului fiind lipite de acestea și în spațiul liber circulă un fluid newtonian în mișcare laminară. Mișcarea în fiecare plan orizontal este irotațională (fig. 7.16).

Mișcarea permanentă în exteriorul obstacolului cilindric vertical este caracterizată de:  $u \neq 0$ ;  $v \neq 0$ ;  $w = 0$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ;  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ . Forțele masice au componentele:  $F_x = F_y = 0$  și  $F_z = -g$ .

În ipotezele: distanță dintre plăci plane paralele mică, mișcare lentă și liniile de curent nu prezintă curburi accentuate, se poate găsi o soluție aproximativă a ecuațiilor Navier-Stokes. Aproximativ se poate considera:



$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong 0; \frac{\partial u}{\partial y} \cong 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.94)$$

și admițând nenule termenii  $\frac{\partial u}{\partial z}$  și  $\frac{\partial v}{\partial z}$ , deoarece viteza variază de la plăci (unde este nulă) spre centru (unde este maximă). Astfel ecuațiile Reynolds devin:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \end{cases} \quad (7.95)$$

fiind verificată și ecuația de continuitate.

Din ultima ecuație a sistemului se obține:

$$p = -\gamma z + f(x, y), \quad (7.96)$$

astfel derivatele  $\frac{\partial p}{\partial x}$  și  $\frac{\partial p}{\partial y}$  sunt independente de  $z$ . Din integrarea primelor două ecuații ale sistemului (7.59) rezultă:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \\ v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{z^2}{2} + c_3 z + c_4 \end{cases} \quad (7.97)$$

Condițiile limită pentru determinarea constantelor sunt:

- pentru  $z = \pm h/2$ ,  $u = v = 0$ , rezultând  $c_1 = c_3 = 0$  și

$$C_2 = -\frac{1}{8\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot h^2; C_4 = -\frac{1}{8\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot h^2.$$

După înlocuirea constantelor avem:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - \frac{h^2}{4}) \\ v = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - \frac{h^2}{4}). \end{cases} \quad (7.98)$$

Într-un plan orizontal oarecare:  $z = z_1$  și  $|z_1| < h/2$ :

$$\begin{cases} u(z_1) = -k_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -k_1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ v(z_1) = -k_1 \frac{\partial p}{\partial y} = -k_1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (7.99)$$

unde  $u(z_1)$  și  $v(z_2)$  sunt generate de potențialul  $-1/2\mu (z_1^2 - h^2/4) \cdot f(x, y)$ , rezultând vectorul viteză irotational.

Vitezele medii pe verticală sunt:

$$\begin{cases} u_{med} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} u \cdot dz = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h/2}^{+h/2} (z^2 - \frac{h^2}{4}) dz = -\frac{h^2}{12\mu} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ v_{med} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} v \cdot dz = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-h/2}^{+h/2} (z^2 - \frac{h^2}{4}) dz = -\frac{h^2}{12\mu} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (7.100)$$

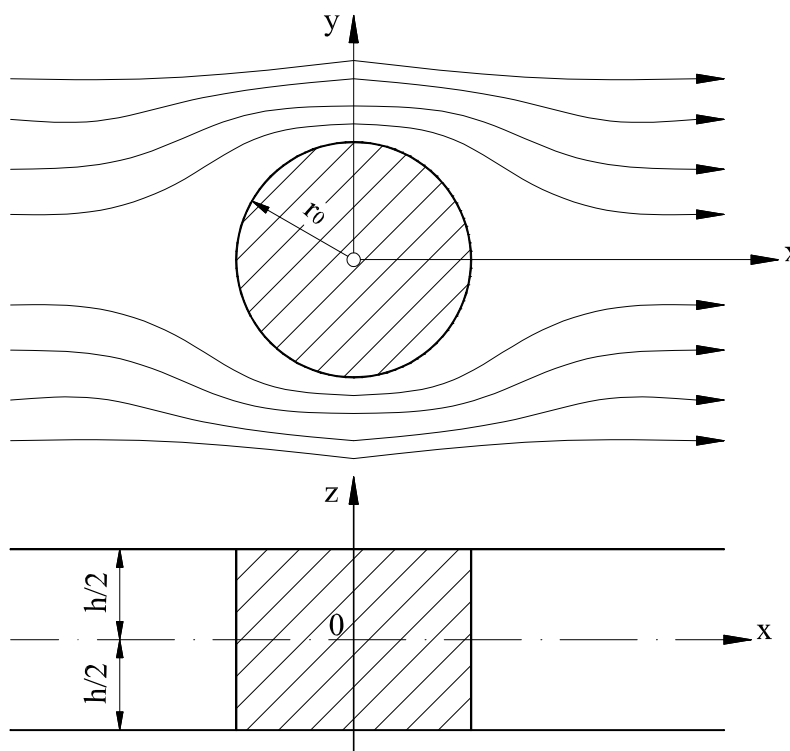


Fig. 7.16. Mișcarea Hele-Shaw

Potențialul vitezelor este funcția armonică:

$$\varphi(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu} f(x, y) \quad (7.101)$$

Mișcarea unui fluid vâscos între plăci plan paralele apropiate se comportă ca o mișcare potențială a unui fluid eulerian. Pe pereții obstacolului afirmația nu este valabilă, datorită adeziunii, la peretele obstacolului vitezele sunt nule pentru fluid real, pe când la fluid eulerian se anulează numai componenta normală a vitezei. Acest tip de mișcare poate fi utilizat la vizualizarea curgerii în jurul obstacolelor cilindrice, când se colorează fire de curent între plăcile transparente.

### **7.5. Mișcarea turbulentă a fluidelor newtoniene și reale**

În paragrafele 7.2.2. și 7.2.3. s-au prezentat caracteristicile mișcării turbulente și pe baza teoriei amestecului turbulent s-au evidențiat eforturile tangențiale aparente. Ecuațiile mișcării Reynolds însă nu se pot integra exact și nici nu reflectă în totalitate întregul fenomen.

Rezolvarea problemelor practice concrete au condus la elaborarea unor teorii ale turbulenței: unele semiempirice, altele statistice.

Teoriile semiempirice introduc ipoteze semiempirice asupra tensiunilor aparente, ele fiind practic singurele utilizabile în cazuri tehnice concrete. Cele mai cunoscute teorii semiempirice au fost elaborate de Boussinesq, Prandtl, Taylor și Kármán. Teoria lui Boussinesq utilizează noțiunea de "coeficient de vâscozitate aparent turbulent". Teoria "lungimii de amestec" a lui Prandtl numită și teoria transferului de impuls, se bazează pe teoria conservării impulsului în direcția curgerii. Teoria transportului de vârtejuri a lui Taylor presupune că rotorul vitezei rămâne constant în procesul de amestec turbulent. Teoria similitudinii vitezelor pulsatorii a lui Kármán admite că fluctuațiile turbulente sunt statistic asemenea în toate punctele curgerii.

Teoriile statistice s-au dezvoltat pe baza considerării statistice a proprietăților curgerii turbulente.

În acest subcapitol se urmărește determinarea profilului de viteză în mișcare turbulentă pe baza teoriilor semiempirice și statistice ale turbulenței.

### 7.5.1. Teoria coeficientului de vâscozitate aparent turbulent

Pentru simplificarea ecuațiilor lui Reynolds, Boussinesq a introdus coeficientul de vâscozitate aparent turbulent  $\mu'$ , de aceeași dimensiune cu coeficientul de vâscozitate dinamic molecular  $\mu$ . Pentru mișcarea plană, uniformă în direcția axei  $OX$ ,  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ,  $\bar{v} = 0$ ,  $\bar{w} = 0$ , mărimea  $\mu'$  este introdusă prin egalitatea:

$$-\overline{u'v'} = \mu' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7.102)$$

Tensiunea tangențială în mișcarea turbulentă rezultă:

$$\tau = -(\mu + \mu') \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7.103)$$

Se observă că termenul care introduce pulsațiile turbulente acționează în același mod ca termenul de vâscozitate moleculară, efectele celor doi termeni însumându-se. În mișcarea turbulentă  $\mu' \gg \mu$ , deci  $\tau \approx \mu' \delta u / \delta y$ . Această relație conduce la o repartiție a vitezelor asemănătoare mișcării straturilor de aer atmosferic (în primă aproximație).

### 7.5.2. Teoria lungimii de amestec

Într-o mișcare unidimensională, unde viteza medie este paralelă cu axa  $OX$ , cu  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ;  $\bar{v} = 0$ ;  $\bar{w} = 0$ , singurul efort tangențial nenul este:

$$\tau'_{xy} = -\rho \cdot \overline{u'v'} \quad (7.28)$$

Bazându-se pe ipoteza conservării impulsului pe direcția curgerii, Prandtl stabilește expresia acestui efort tangențial, admitând că în mișcarea turbulentă particulele de fluid macroscopice (grupuri de molecule) au o mișcare proprie, ele se deplasează cu o anumită distanță atât în direcția curgerii cât și transversală pe aceasta.

Se presupune o particulă din stratul  $(y-l)$ , care are viteza  $u(y-l)$  ce se deplasează transversal cu distanța " $l$ ", ajungând în stratul " $y$ " (fig. 7.17) sub influența pulsației vitezei  $+v'$ . Această lungime de deplasare a particulei pe

direcția transversală se numește "**lungime de amestec**". Particula ajunsă în startul  $y$  își păstrează impulsul său după axa  $OX$ , ea are viteza după  $X$  mai mică decât a particulelor înconjurătoare.

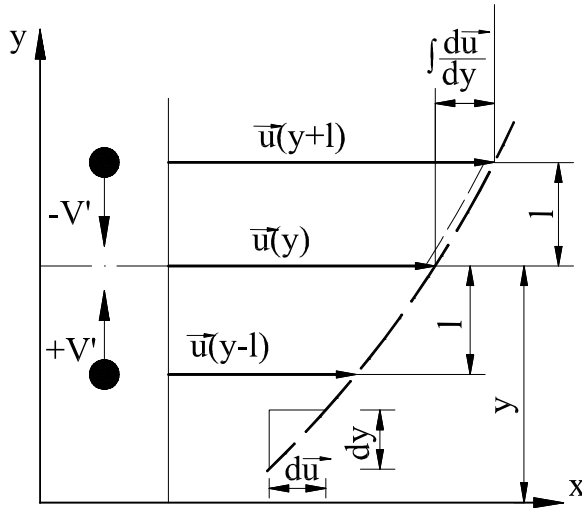


Fig. 7.17. Definirea lungimii de amestec

Diferența de viteză este:

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y) - \bar{u}(y-l) = l \cdot \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Analog, o particulă care sosește în stratul  $y$  din  $y+l$ , cu pulsația  $-v'$  are viteza după  $OX$  mai mare decât cele din stratul  $y$ , diferența de viteză fiind:

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) = l \cdot \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Diferențele de viteză din stratul  $y$  datorită mișcării transversale pot fi privite ca pulsații ale vitezei din acest strat, media valorii absolute a pulsației după axa  $OX$  este:

$$|\bar{u}'| = \frac{l}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (7.104)$$

Se face ipoteza că  $v'$  este proporțional cu  $u'$ , deci:

$$|\bar{v}'| = k_1 |\bar{u}'| = k_1 \cdot l \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (7.105)$$

$k_1$ , fiind o constantă numerică.

În expresia efortului unitar tangențial intervine  $u'v'$ , care totdeauna este negativ, fiindcă particulele care vin în stratul  $y$  din  $y+l$  au  $v'$  negativ și produc  $u'$  pozitiv, iar particulele care vin din stratul  $y-l$  au  $v'$  pozitiv și produc  $u'$  negativ, deci:

$$\overline{u'v'} = -k_2 \overline{|u'| \cdot |v'|}$$

sau

$$\overline{u'v'} = -kl^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (7.106)$$

Coeficientul  $k$  poate fi înglobat în lungimea de amestec ( $k \cdot l^2 = l^2$ ). Știind că  $\tau'$  schimbă semnul odată cu  $d\bar{u}/dy$  se obține relația lui Prandtl pentru efortul tangențial aparent

$$\tau' = \rho l^2 \left[ \frac{d\bar{u}}{dy} \right] \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.107)$$

Relația lui Prandtl rezolvă o serie de probleme tehnice însă nu este conformă cu realitatea în punctele în care derivata  $\frac{d\bar{u}}{dy}$  se anulează (punctele de viteză maximă și minimă). În aceste puncte nici pulsațiile turbulente și nici efortul tangențial aparent nu sunt nule. Comparând relațiile (7.107) și (7.102) se observă că relația:

$$l^2 \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| = v' \quad (7.108)$$

are semnificația unui coeficient de vâscozitate cinematic "aparent".

Relația (7.107) nu rezolvă problema distribuției vitezei, ea înlocuiește doar pulsațiile de viteză cu o mărime liniară "l".

### 7.5.3. Teoria transportului de vârtejuri

Taylor a examinat schimbul de momente de impulsuri, față de Prandtl, care s-a bazat pe schimbul de impuls.

Teoria transportului de vârtejuri, numită și difuzia vârtejurilor, conduce la rezultate asemănătoare ca și teoria schimbului de impuls, însă în unele situații descrie mai fidel fenomenele.

### 7.5.4. Teoria similitudinii vitezelor pulsatorii

Káráman a considerat că mecanismul turbulenței este independent de vâscozitate, cu excepția zonei din imediata vecinătate a peretelui solid și că fluctuațiile turbulente sunt asemănătoare (statistic) în toate punctele curgerii diferind numai prin factorii de scară, de lungime și de timp.

Teoria lui Káráman se bazează pe următoarele ipoteze:

- câmpurile vitezelor pulsatorii nu depind de vâscozitate, cu excepția zonei din vecinătatea pereților;
- toate câmpurile pulsatorii sunt asemenea între ele.

În aceste condiții lungimea de amestec capătă forma:

$$l = \varkappa \cdot \left| \frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}} \right| \quad (7.109)$$

unde  $\varkappa$  este coeficient numeric, aproximativ  $\varkappa \approx 0,4$  (constanta universală a lui Káráman).

Efortul tangențial suplimentar (7.107) astfel devine:

$$\tau' = \rho \varkappa^2 \frac{\left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2} \quad (7.110)$$

### 7.5.5. Distribuția de viteze în mișcarea turbulentă

Teoria stratului limită a zonat curgerea într-un **substrat laminar** (vâscos), unde preponderente sunt eforturile tangențiale datorită vâscozității moleculare ( $\mu \gg \mu'$ ) și **miezul turbulent** unde ( $\mu \ll \mu'$ ). Distribuția de viteze se calculează, neglijând  $\mu'$  în substratul vâscos și  $\mu$  în miezul turbulent. Se acceptă valoarea efortului tangențial la perete  $\tau_0$  (fig. 7.18).

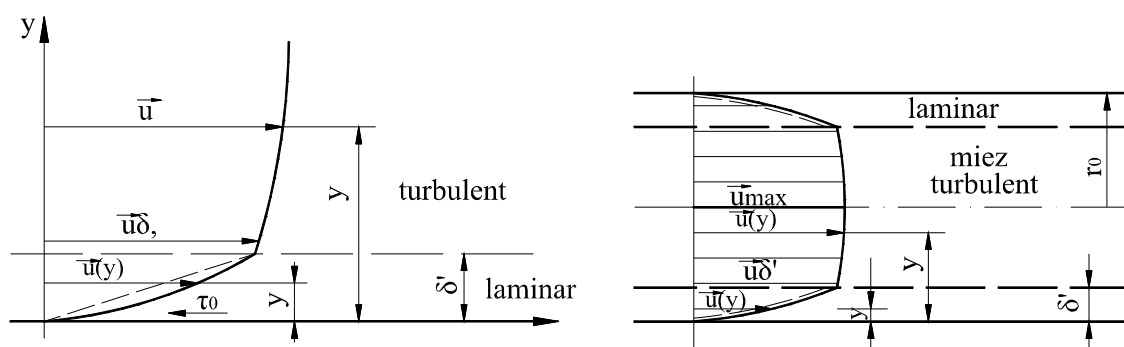


Fig.7.18. Distribuția de viteze în mișcarea turbulentă, a. la un perete plan; b. în conductă circulară.

1. **În substratul laminar**, neglijând efectul turbulenței  $\mu' = 0$ , rezultă  $u = u(y)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $p = p(y)$  și  $\tau = \tau(y)$ . Pentru efortul unitar considerând relația lui Newton  $\tau = \mu \cdot \delta u / \delta y$ , și știind că distribuția efortului tangențial este liniară, rezultă  $\frac{du}{dy} = const.$ , respectiv  $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$ . După integrare de două ori avem:

$$u(y) = C_1 y + C_2,$$

constantele de integrare rezultând din condiții de margine pentru  $y = 0, u = 0$  și prin urmare  $C_2 = 0$ . La perete efortul tangențial este:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu C_1, \text{ rezultând } C_1 = \frac{\tau_0}{\mu}$$

deci:

$$u(y) = \frac{\tau_0}{\mu} y, \quad (7.111)$$



rezultând o distribuție liniară a vitezei în substratul laminar. Aceasta este totuși o aproximare a realității fiindcă inclusiv în substratul laminar se resimt pulsațiile de viteză, în special la limita sa. De fapt, curba de distribuție a vitezei din cele două zone se racordează tangențial.

2. **În miezul turbulent**, la distanță mare de perete, se neglijează  $\mu$  față de  $\mu'$  și substratul laminar fiind foarte subțire se acceptă că practic la perete  $\tau' = \tau_0$ , din (7.107) rezultând:

$$\rho \cdot l^2 \cdot \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_0 \quad (7.112)$$

Prandtl a presupus că lungimea de amestec depinde de distanța de la perete sub forma:

$$l = \kappa y \quad (7.113)$$

unde  $\kappa$  este constanta lui Káráman ce se determină experimental. După înlocuire și separarea variabilelor, rezultă:

$$d\bar{u} = \frac{l}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{dy}{y}$$

și integrat

$$\bar{u}(y) = \frac{l}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \ln y + C \quad (7.114)$$

ceea ce arată o distribuție logaritmică a vitezei în miezul turbulent. Condiția de margine la perete nu poate fi folosită pentru determinarea constantei de integrare fiindcă în imediata apropiere a peretelui, în substratul laminar relația nu este valabilă. Se introduce noțiunea:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V_* \quad (7.115)$$

numit impropriu "**viteza de frecare la perete**", care are dimensiunea unei viteze. Conform fig.7.18 în substratul laminar și la limita sa se poate scrie:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\bar{u}(\delta')}{\delta'} \quad (7.116)$$

sau

$$\frac{V_*^2}{\nu} = \frac{\bar{u}(\delta')}{\delta'}; \quad \bar{u}(\delta') = \frac{V_* \cdot \delta'}{\nu} V_* = NV_* \quad (7.117)$$

unde  $V_* \cdot \delta' / \nu = N$  are semnificația unui număr adimensional asemănător numărului  $Re$ . Din condiția  $y = \delta'$ ,  $\bar{u} = \bar{u}(\delta')$  se obține constanta de integrare:

$$C = \bar{u}(\delta') - \frac{V_*}{\kappa} \cdot \ln \delta' = V_* \left( N - \frac{1}{\kappa} \cdot \ln N \right) - \frac{V_*}{\kappa} \ln \frac{\nu}{V_*}$$

care înlocuit în (7.114) conduce la:

$$\bar{u}(y) = V_* \left( \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y \cdot V_*}{\nu} + N - \frac{1}{\kappa} \ln N \right) \quad (7.118)$$

sau pentru  $\kappa = 0,4$ ,  $N = 11,5$  (pentru conducte circulare) și trecând la logaritmi zecimali:

$$\bar{u}(y) = V_* \left( 5,75 \lg \frac{y \cdot V_*}{\nu} + 5,5 \right) \quad (7.118')$$

Eliminarea constantei de integrare în cazul conductelor circulare se poate face pentru condiții limită în axa conductei:  $y = r_0$  viteza  $\bar{u} = \bar{u}_{\max}$ , rezultând:

$$\bar{u}_{\max} = \frac{V_*}{\kappa} \ln r_0 + C$$

Scăzând (7.114) din (7.114') se obține **legea deficitului de viteză**:

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y} = 5,75 \cdot \lg \frac{r_0}{y} \quad (7.119)$$

Ecuatiile (7.118) și (7.119) reprezintă legi logaritmice de distribuție a vitezei în miezul turbulent, când profilul de viteză turbulent se formează cu condiția de margine că asupra sa influențează frecarea (contactul) doar cu substratul laminar, deci nu intervine și calitatea peretelui prin asperitățile sale.

Când se utilizează teoria similitudinii vitezelor pulsatorii a lui Káráman legea deficitului de viteză rezultă:

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{V_*} = -\frac{1}{\kappa} \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \right] \quad (7.120)$$

Experiențele lui Darcy, prin prelucrarea lor statistică, conduc la aproximarea profilului de viteză în conducte circulare de tip putere, cu forma:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\max}} = \left( \frac{y}{r_0} \right)^{1/n} \quad (7.121)$$

unde  $n$  este coeficient în funcție de numărul  $Re$  (tab.7.1)

Tabel 7.1 Valorile coeficientului  $n$

Re	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$(2...3,2) \cdot 10^6$
n	6,0	6,6	7,0	8,8	10

Evaluarea grosimii filmului laminar  $\delta'$  se bazează pe relația (7.117):

$$\delta' = \frac{N \cdot \nu}{V_*} \quad (7.117')$$

în care  $V_*$  se determină pe baza ecuației (6.95):

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \gamma \cdot R \cdot j = \rho \cdot g \frac{D}{4} j \\ V_* &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{1}{2} \sqrt{g D j} \end{aligned} \quad (7.122)$$

unde  $j$  este panta hidraulică. Pentru aceasta admitând relația lui Weisbach (din 7.68):

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{V_*^3}{2g}$$

rezultă

$$\delta' = \frac{2N\nu}{\sqrt{gDj}} = \frac{\sqrt{8}ND}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \sim \frac{33D}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \quad (7.123)$$

În situația când asperitățile peretelui influențează direct profilul de viteză din miezul turbulent (conductă rugoasă), legea logaritmică rămâne valabilă, însă condiția de margine nu corespunde ca  $\tau_0$  este la limita substratului laminar. În acest caz efortul tangențial la perete este rezistența la înaintare a rugozității, considerată pe suprafață unitară. Notând cu  $k$  înălțimea asperităților și  $\bar{u}_k$  viteza la nivelul lor,  $Re_k = \bar{u}_k \cdot k / \nu$  caracterizează rezistența la înaintare, și efortul tangențial este:

$$\tau_0 = \rho u_k^2 \psi(Re_k)$$

(Se va demonstra în cap.8).

Constanta  $C$  din (7.114) se determină pentru  $y = k$ ,  $\bar{u} = \bar{u}(k)$ , obținând:

$$\bar{u}(y) = \frac{V_*}{\chi} \ln \frac{y}{k} + \frac{\bar{u}(k)}{V_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + \phi \left( \frac{k \cdot V_*}{\nu} \right) \quad (7.124)$$

unde s-a luat  $\chi = 0,4$ .

Funcția  $\phi \left( \frac{k \cdot V_*}{\nu} \right)$  este reprezentată în fig. 7.19.

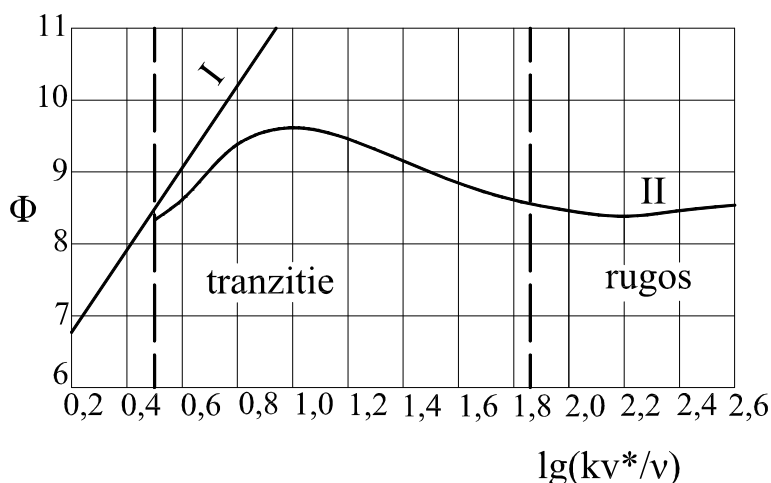


Fig. 7.19 Graficu  
funcției  $\phi\left(\frac{k \cdot V_*}{v}\right)$

### 7.5.6. Teoriile statistice ale turbulenței

Teoriile statistice ale turbulenței s-au dezvoltat cu deosebire în ultima jumătate de veac, încercând să pătrundă în structura acestui fenomen complex și să-i descopere legile. Se pleacă de la ideea de bază că mișcarea turbulentă este un amestec de mase, de vârtejuri, de cantități de mișcare generate de pulsațiile particulelor și ale grupurilor de particule, care se suprapun peste mișcări de bază, guvernate de ecuațiile hidrodinamicii fluidelor vâscoase. Se studiază statistic proprietățile fluctuațiilor și legătura dintre mișcarea medie și aceste proprietăți. Mișcările de agitație au caracter stohastic și se analizează rezultatele unor măsurători de finețe prin metodele statistice probabilistice. Se determină momente de corelație, coeficienți de corelație, grad de turbulență, spectrul de turbulență etc. Aceste studii încă nu sunt finalizate, în sensul utilizării lor în ecuațiile Reynolds și soluționarea lor generală.

## 7.6. Aplicații

**7.1.** Să se determine repartiția vitezei unui lichid în mișcare laminară și permanentă printr-o conductă cu secțiune transversală circulară, înclinată cu unghiul  $\theta$ , la capetele porțiunii " $l$ " presiunile medii fiind  $p_1$  și  $p_2$  (fig.7.20). Să se calculeze debitul de lichid prin conductă și viteza medie. Problema Poiseuille.

**Rezolvare:**

Mișcarea este permanentă, cu  $v = w = 0$ , din condițiile Navier-Stokes, cu considerarea continuității, rezultă:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \cdot \sin \theta + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \cos \theta \end{cases}$$

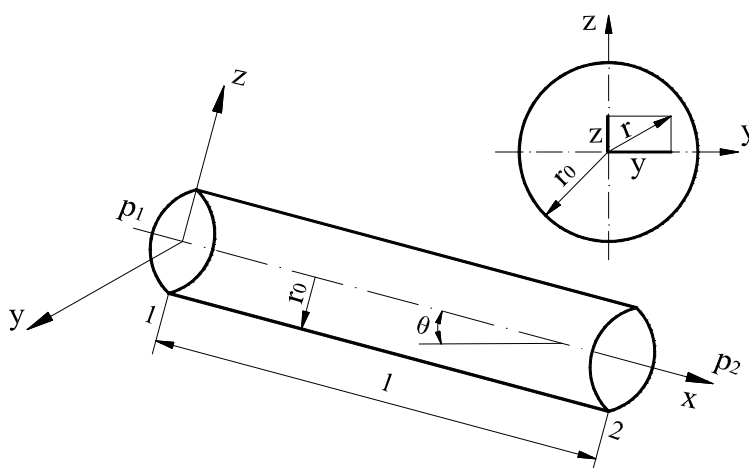


Fig. 7.20. Schema de calcul a problemei Poiseuille.

Ultimile două ecuații arată că presiunea în secțiuni normale pe axa conductei se repartizează după legea hidrostaticii. Panta hidraulică are expresia:

$$j = \frac{1}{l} \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma l} + \frac{z_1 - z_2}{l} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \theta$$

Astfel prima ecuație a sistemului devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{g \cdot j}{\nu}$$

care este de tip Poisson, cu condiția de contur

$$\frac{y^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{r_0^2} = 1$$

$$u(y, z)|_C = 0$$

Soluția ecuației diferențiale este de forma

$$u(y, z) = K \left( \frac{y^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{r_0^2} - 1 \right)$$

deci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4k}{r_0^2}$$

de unde

$$K = -\frac{g \cdot j}{4\nu} r_0^2$$

Distribuția de viteză devine

$$u(y, z) = \frac{\gamma j}{4\mu} (r_0^2 - y^2 - z^2) = \frac{\gamma j}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

Pentru  $r = 0$  se obține viteza maximă

$$u_{\max} = \frac{\gamma j}{4\mu} r_0^2 = \frac{r_0}{4\mu} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + \sin \theta \right)$$

$$\text{Debitul este : } Q = \int_0^{r_0} u dA = \frac{\gamma j}{4\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi \gamma j r_0^4}{8\mu}$$

$$\text{Viteza medie rezultă: } v = \frac{Q}{A} = \frac{\pi \gamma j r_0^4}{8\mu} \frac{1}{r_0^2} = \frac{\pi \gamma j r_0^2}{8\mu} = \frac{1}{2} u_{\max}$$

**7.2.** Fig.7.21. reprezintă un aparat pentru determinarea coeficientului de vâscozitate dinamic, cu doi cilindri coaxiali, cel exterior (de rază  $R_2$ ) fix, iar cel interior (cu rază  $R_1$ ) rotitor, cu turație constantă. Turația constantă se obține

prin aplicarea unui moment constant, rezultat din acțiunea greutatei  $G$  pe tamburul de rază  $R$ , cu ajutorul unui fir flexibil înfășurat. Cilindrul mobil este cufundat până la adâncimea  $h$  în lichidul de vâscozitate necunoscută. Turația constantă se obține când momentul greutății  $G$  este echilibrat de momentul rezultat din forțele tangențiale datorate vâscozității. Se neglijează efectul suprafețelor de bază a celor doi cilindri.

**Rezolvare:** Stratul de lichid aderent pe cilindrul rotativ are viteză unghiulară constantă  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

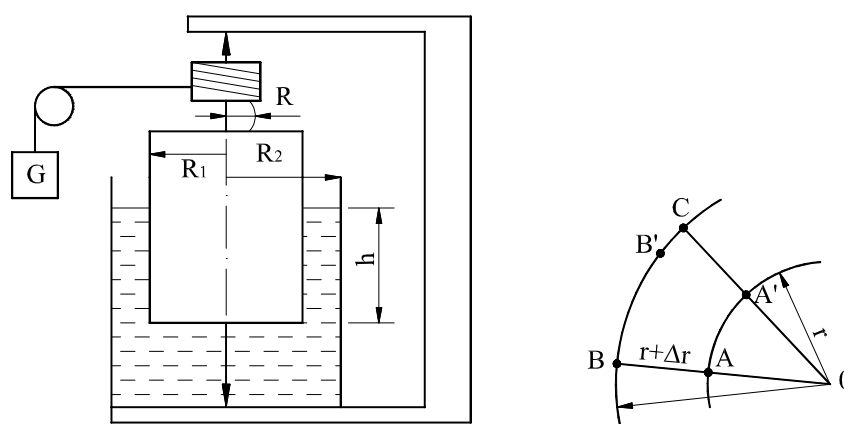


Fig.7.21. Schema aparatului pentru măsurarea coeficientului de vâscozitate dinamic

Pentru  $r \in [R_1, R_2]$ ,  $\omega \in [\omega_1, 0]$ . Se consideră punctele  $A$  și  $B$  pe aceeași rază, la intersecția cu cercurile de rază  $r$  și  $r + \Delta r$ . Într-un timp  $t$   $A$  ajunge în  $A'$  iar  $B$  în  $B'$ . Rezultă:

$$\widehat{AA'} = \omega r \cdot t; \quad \widehat{BC} = \omega(r + \Delta r)t;$$

$$\widehat{BB'} = (\omega - |\Delta\omega|)(r + \Delta r)t;$$

$$\widehat{B'C} = \widehat{BC} - \widehat{BB'} = |\Delta\omega|(r + \Delta r)t;$$

$$\Delta u = \frac{\widehat{CB'}}{t} = |\Delta\omega|(r + \Delta r)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{(r + \Delta r)|\Delta\omega|}{\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{du}{dr} = \frac{rd\omega}{dr}$$



(pentru  $dr > 0$ ;  $d\omega < 0$ ).

Momentul rezistenței datorită vâscozității este

$$M(r) = -\mu \frac{du}{dr} 2r \cdot hr = -2\pi h\mu \left( r \frac{dw}{dr} \right) r$$

Acest moment este egal și de sens contrar cu cel care întreține mișcarea cilindrului rotitor cu viteză unghiulară constantă  $\omega_1 = \text{const}$ . După înlocuire și separarea variabilelor, avem

$$\int \frac{dr}{r^3} = -\frac{2\pi h\mu}{M} \int d\omega;$$

sau

$$\frac{1}{2r^2} = \frac{2\pi h\mu\omega_1}{M} + C$$

Pentru  $r = R_2, \omega = 0$  și  $C = \frac{1}{2R_2^2}$ , iar pentru  $r = R_1, \omega = \omega_1$ ,

deci

$$\frac{1}{2R_1^2} = \frac{2\pi h\mu\omega_1}{M} + \frac{1}{2R_2^2}$$

sau

$$\mu = \frac{M(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi\omega_1 h R_1^2 R_2^2} = \frac{R(R_2^2 - R_1^2)}{8\pi R_1^2 R_2^2} \frac{GT}{h} = K \frac{GT}{h}$$

unde  $K$  este constanta aparatului, iar celelalte mărimi se măsoară experimental ( $T$  este perioada rotației).

**7.3.** În cazul curgerii turbulente în conducte circulare de rază  $r_0$ , distribuția vitezei este dată de relația (7.121)

$$u = u_{\max} \left( \frac{y}{r_0} \right)^{1/n}$$

Să se determine viteza medie, debitul, coeficientul lui Coriolis și coeficientul Bousinesq. Exemplu cifric  $n = 7$ .

**Rezolvare:** Se pleacă de la ecuația de definiție a debitului

$$Q = \int u dA = \int_0^{r_0} u 2\pi r dr$$

pe inele concentrice de grosime  $dr$  viteza fiind considerată uniformă. Se știe  $y = r_0 - r$ , deci

$$Q = \int u_{\max} \left( \frac{r_0 - r}{r_0} \right)^{1/n} 2\pi r dr = 2\pi u_{\max} \int \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^{1/n} r dr$$

Făcând schimbarea de variabilă  $1 - r / r_0 = t$ , respectiv  $r = r_0 (1 - t)$ ,  $dr = -r_0 dt$  se ajunge pentru debit la relația

$$Q = 2\pi u_{\max} r_0^2 \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{49}{60} u_{\max} \pi r_0^2$$

Viteza medie devine:

$$V = \frac{Q}{A} = u_{\max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{49}{60} u_{\max}$$

Coeficientul Coriolis este

$$\alpha = \frac{1}{AV^3} \int u^3 dA = 2 \left[ \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right]^3 \frac{n^2}{(n+3)(2n+3)} = 1,058$$

Coeficientul lui Bousinesq este

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \int u^2 dA = \frac{(n+1)(2n+1)^2}{4n^2(n+2)} = 1,02$$

**7.4.** Distribuția logaritmică de viteză în regim turbulent corespunde ecuației

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{V_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{y}$$

$r_0$  fiind raza conductei;  $y$ -distanța de la perete. Să se arate dacă această distribuție satisface condițiile în axa conductei și la perete. Să se calculeze debitul și viteză medie.

**Rezolvare:** În axa conductei  $y = r_0$  și rezultă  $u = u_{\max}$ . La perete  $y=0$  și  $u = -\infty$ , deci distribuția logaritmică satisface condiția limită în axa conductei, dar nu și în apropierea peretelui. Pentru calculul debitului se transformă distribuția de viteză sub forma

$$\bar{u} = \bar{u}_{\max} + \frac{5,75 \cdot V_*}{\ln 10} \ln \frac{r_0 - r}{r_0}$$

și se însumează debitele elementare pe inele circulare de grosime  $dr$  pe care viteza se acceptă constantă,  $u$ .

$$Q = \int_A u dA = \int_0^r u 2\pi r dr = 3\pi u_{\max} \int_0^r r dr \frac{5,75 V_*}{\ln 10} 2\pi \int_0^{r_0} r \ln \frac{r_0 - r}{r_0} dr$$

Integrala

$$I_1 = \int_0^{r_0} r \ln \frac{r_0 - r}{r_0} dr = \int_0^{r_0} r [\ln(r_0 - r) - \ln r_0] dr = -\frac{r_0^2}{2} \ln r_0 + \int_0^{r_0} r \ln(r_0 - r) dr$$

$$I_2 = \int_0^{r_0} \ln(r_0 - r) dr = \int_0^{r_0} (r_0 - t) \ln t (-dt) = \int_0^{r_0} \ln t dt - r_0 \int_0^{r_0} \ln t dt$$

unde  $t = r_0 - r$ ,  $dr = -dt$ . Se obține

$$I_2 = \left[ t^2 \left( \frac{\ln t}{2} - \frac{1}{4} \right) - r_0 t (\ln t - 1) \right] \Big|_0^{r_0} = \left\{ (r_0 - r)^2 \left[ \frac{\ln(r_0 - r)}{2} - \frac{1}{4} \right] - r_0 (r_0 - r) [\ln(r_0 - r) - 1] \right\} \Big|_0^{r_0}$$

Înlocuirea limitei superioare în ambii termeni conduce la nedeterminare  $0(-\infty)$ , care se transformă în  $\frac{\infty}{\infty}$  și se calculează cu regula l'Hopital, astfel:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\ln(r_0 - r)}{(r_0 - r)^2} = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\frac{-1}{(r_0 - r)}}{\frac{2}{(r_0 - r)^3}} = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{-(r_0 - r)^2}{2} = 0$$

și

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\ln(r_0 - r)}{(r_0 - r)^2} = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\frac{-1}{(r_0 - r)}}{\frac{1}{(r_0 - r)^2}} = \lim_{r \rightarrow r_0} [-(r_0 - r)] = 0$$

Astfel  $I_2$  devine

$$I_2 = \frac{r_0^2}{2} \left( \ln r_0 - \frac{3}{2} \right)$$

respectiv

$$I_1 = -\frac{3}{4} r_0^2$$

și

$$Q = \pi r_0^2 \left( u_{\max} - \frac{3}{2} \frac{5,75V_*}{\ln 10} \right) = \pi r_0^2 (u_{\max} - 3,746V_*)$$

Viteza medie este

$$V = \frac{Q}{A} = u_{\max} - 3,746V_*$$

## CAPITOLUL 8

### CALCULUL REZISTENȚELOR HIDRAULICE ȘI AL PIERDERILOR DE SARCINĂ

În acest capitol se dezvoltă calculul rezistențelor hidraulice și al pierderilor de energie - sarcină. Problema se tratează pentru mișcarea permanentă; se presupune că temperatura este constantă, deci proprietățile fizice ale lichidului rămân constante (în special densitatea și vâscozitatea).

Pierderile de sarcină se clasifică în:

- **pierderi distribuite uniform** în lungul unei conducte, de construcție uniform rectilinie, cu secțiune constantă. Ele sunt expresia frecărilor interne, vâscoase și aparente datorită turbulenței, precum și cu pereții conductei;

- **pierderi de sarcină locale**, provocate de singularitățile sistemelor hidraulice, la variația mărimii și a direcției vitezei. Singularități pot fi privite variațiile de secțiune sau de traseu, ramificații, organe de închidere, reglare, măsurare și de control, respectiv îmbinările conductelor ș.a.

Pierderile de sarcină distribuite (liniare), definite prin ecuațiile Navier-Stokes, sau sub diferite forme transformate, explică corect cauzele interne care produc pierderile de sarcină, dar nu iau în considerare cauzele externe, cum este calitatea pereților conductelor. Calitatea pereților, finețea lor de prelucrare nu sunt oglindite de relațiile generale de mișcare deși acestea influențează pierderile distribuite.

#### 8.1. Exprimarea pierderilor de sarcină

În numeroase probleme tehnice determinarea pierderilor de sarcină este de importanță majoră. Din acest considerent una din preocupările fundamentale ale hidraulicii tehnice este calculul acestor pierderi de energie.

Una din problemele hidraulicii aplicate este studiul pierderilor de sarcină în interdependență cu factorii interni și externi care se manifestă în curgeri practice ale fluidelor reale.

S-a convenit, pe baza a numeroaselor studii și cercetări, ca pierderile de energie să se exprime în raport cu termenul cinetic calculat cu viteza medie pe secțiune, sub forma generală:

$$h_r = \zeta \frac{V^2}{2g} \quad (8.1)$$

unde  $\zeta$  este coeficientul pierderilor de sarcină sau coeficientul de rezistență hidraulică.

1. **Pentru pierderi de sarcină liniare** (s-a explicat în cap.7) s-a ajuns la forma de exprimare pentru  $\zeta$

$$\zeta = \lambda \frac{l}{D} \quad (8.2)$$

obținând relația pierderilor liniare

$$h_{r\ lin} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (8.3)$$

unde  $\lambda$  este coeficientul Darcy-Weissbach, în regim laminar fiind:  $\lambda = \frac{64}{Re}$ .

Relația (8.3), formal, este valabilă și în cazul regimului turbulent de mișcare, însă în acest caz coeficientul  $\lambda$  depinde nu numai de numărul Reynolds ci și de natura pereților conductelor, iar dependența de numărul Re diferă în regimul turbulent de cel laminar.

Folosindu-se de ecuația de continuitate ( $Q = A \cdot V$ ), scrisă conductelor circulare, (8.3) devine

$$h_{r\ lin} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} l = 0,0826 \lambda \frac{Q^2}{D^5} l \quad (8.4)$$

Pierderile liniare în conducte cu diametru constant se pot exprima pe baza pantei hidraulice (definită la interpretarea geometrică a ecuației energiei pentru curent real din tub)

$$h_{r\ lin} = j \cdot l \quad (8.5)$$

deci

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (8.6)$$

Înlocuind diametrul cu raza hidraulică ( $D=4R$ ) din (8.6) se obține:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{Rj} = C \sqrt{Rj} \quad (8.7)$$

unde  $C$  este coeficientul lui Chézy  $\left(m^{\frac{1}{2}} / s\right)$  și este

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \text{ sau } \lambda = \frac{8g}{C^2} \quad (8.8)$$

În funcție de  $C$  pierderile liniare devin:

$$h_{r \text{ lin}} = \frac{V^2}{C^2 R} l \quad (8.9)$$

Din ecuația de continuitate, pe baza (8.7), avem

$$Q = A \cdot C \sqrt{Rj} \quad (8.10)$$

Termenul

$$K = AC \sqrt{R} \quad (8.11)$$

poartă numele de **modul de debit** (este debitul pentru pantă hidrolică unitară), având aceeași dimensiune cu debitul.

Termenul

$$W = C \sqrt{R} \quad (8.12)$$

se numește **modul de viteză**.

Dacă  $Q = W \sqrt{j}$ , rezultă

$$h_{r \text{ lin}} = \frac{Q^2}{k^2} l \quad (8.13)$$

Deseori se utilizează notația

$$M = \frac{l}{K^2} \quad (8.14)$$

numit **modul de rezistență**, deci

$$h_{r \text{ lin}} = M \cdot Q^2 \quad (8.15)$$

sau cu

$$M_s = \frac{1}{K^2} \quad (8.16)$$

modul de rezistență specific (pe unitate de lungime ), avem

$$h_{r\,lin} = M_s Q^2 l \quad (8.17)$$

După cum s-a arătat în cap.7, regimul de mișcare influențează direct pierderile de sarcină distribuite prin mărimea și gradul de influență a vitezei medii. Reprezentarea grafică a punctelor experimentale  $(v, h_{r\,lin})_i$  sau  $(Q, h_{r\,lin})_i$  în coordonate logaritmice arată o dependență liniară atât în regim laminar, cât și în turbulent, însă panta semidreptei caracteristice regimului turbulent este pronunțată (fig. 8.1).

$$\lg h_{r\,lin} = \lg a' + b \lg V \quad (8.18)$$

sau

$$\lg h_{r\,lin} = \lg a + b \lg Q \quad (8.19)$$

care arată o dependență de tip putere a pierderilor de sarcină liniare de viteză sau debit.

$$h_{r\,lin} = a' V^b \text{ sau } h_{r\,lin} = a Q^b \quad (8.20)$$

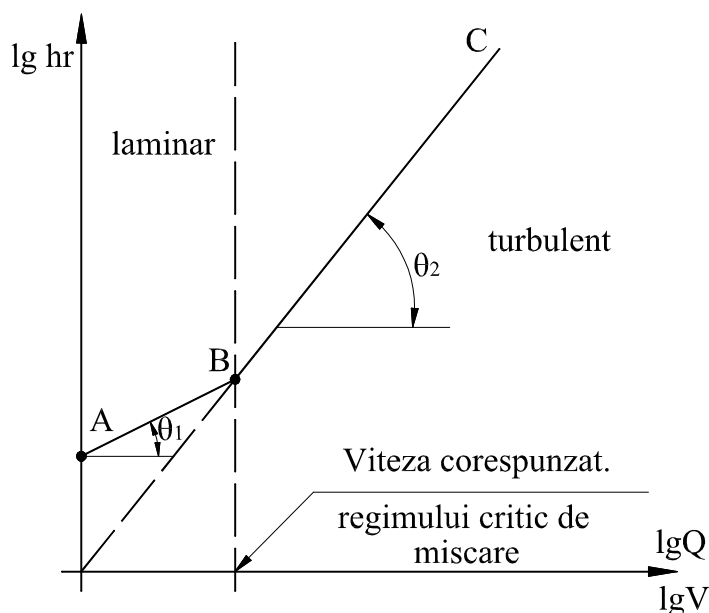


Fig. 8.1. Variația pierderilor de sarcină distribuite cu viteza sau debitul



În regimul laminar de mișcare  $b = \operatorname{tg} \theta_1 = 1$ , conform relației (7.63), iar

$$a' = \frac{32\nu l}{gD^2} \quad (8.21)$$

Coeficientul  $a'$  ține seama de caracteristicile geometrice ale conductei (diametru, lungime) și de natura lichidului (greutate specifică, vâscozitate).

Coeficientul  $\lambda$  după cum s-a arătat este  $\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}}$  și depinde numai de numărul  $\operatorname{Re}$ .

Pierderile de sarcină distribuite nu depind de calitatea peretelui conductei.

În regim turbulent  $b = \operatorname{tg} \theta_2 > 1$ , pierderile de sarcină depind de viteză la putere supraunitară. Experiențele evidențiază că în regimul turbulent  $1,6 < b \leq 2$ , în funcție de calitatea pereților conductei;  $\lambda$  fiind exprimat, în general, sub forma:

$$\lambda = f(\operatorname{Re}, k/D) \quad (8.22)$$

**2. Pentru pierderi de sarcină locală** se acceptă relația (8.1). Valoarea pierderilor depinde atât de regimul de curgere (prin  $\operatorname{Re}$ ), cât și de geometria singularității. Coeficientul  $\zeta$  de obicei se determina prin prelucrarea măsurărilor experimentale, în general fiind valabilă:

$$\zeta = f(\operatorname{Re}, \text{geometria singularitatii}) \quad (8.23)$$

## 8.2. Rugozitatea pereților

Elucidarea problemei pierderilor de sarcină în mișcarea turbulentă - sisteme hidraulice sub presiune sau cu nivel liber - necesită luarea în considerare a calității pereților solizi cu care fluidul vine în contact, și anume rugozitatea. În practică, acești pereți prezintă asperități sau neregularități distribuiți relativ uniform pe suprafața lor, având dimensiuni mici comparativ cu secțiunea de curgere. Aceste asperități au acțiune directă asupra eforturilor tangențiale la perete, în funcție de mărimea și forma lor, determinată de rezistența lor la înaintarea curentul lichid. Influența lor se manifestă prin creșterea rezistențelor hidraulice, deci a pierderilor (disipărilor) de energie.

Rugozitatea este deci, o caracteristică geometrică a pereților solizi și e determinată de gradul de asperitate și neregularitate a suprafeței solide, caracterizează prin înălțimea și forma asperităților.

Rugozitatea suprafeței solide, rezultată în urma prelucrării tehnologice, este **rugozitatea naturală**, iar cea realizată în laborator, în scop experimental, este **rugozitatea artificială**. Rugozitatea naturală la rândul său poate fi aspră, ondulată sau mixtă (peste macrorugozitate ondulată se suprapune o microrugozitate aspră), (fig. 8.2.). Ele pot fi așezate regulat sau stohastic.

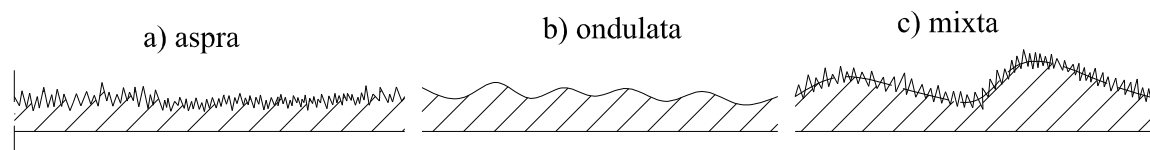


Fig. 8.2. Tipuri de rugozități

Uneori se realizează voit o macrorugozitate regulată pe suprafață pentru creșterea disipării energiei, a pierderilor de sarcină. Materialele solide cu structură cristalină (fontă, oțel, beton) formează rugozitate aspră, iar structurile sticloase sau vâscoase (sticlă, plumb, bitum, material plastic) rugozitate ondulată.

Datorită formei și înălțimii diferite a asperităților, precum și a dispunerii lor variate, rugozitatea naturală nu se poate exprima matematic direct, față de maco - sau microrugozitate artificială.

Înălțimea asperităților se notează cu  $k$  și se numește **rugozitate absolută**. Raportul între rugozitatea absolută  $k$  și diametrul conductei  $D$  este **rugozitate relativă**,  $\frac{k}{D}$ . Inversul rugozității relative este netezimea relativă,  $\frac{D}{k}$ .

Rugozitatea artificială, realizată de Nikuradse, sub formă semisferică de diametrul  $k$  (nisip monogranular prins cu lac pe peretele conductei și lăcuit din nou) are înălțimea tuturor asperităților identice și uniform dispuse  $\Delta = \frac{k}{2}$ .

**Rugozitate echivalentă hidraulică**  $k_e$ , este rugozitatea artificială granulară care realizează aceeași pierdere de sarcină ca și rugozitatea naturală. Din această definiție rezultă și noțiunile de rugozitate relativă sau netezime echivalentă hidraulică.

Rugozități artificiale se folosesc de diferite forme și mărimi în funcție de scopul urmărit. Curgerea poate avea aspectul de neperturbat, vârtejurile manifestându-se în interspațiile rugozităților sau curgere cu gradient de presiune sau perturbată. Forma și înălțimea rugozităților poate influența diferențiat mișcarea turbulentă, ea poate să aibă influență numai în substratul laminar sau poate să aibă efect direct asupra miezului turbulent.

### 8.3. Pierderi de sarcină liniare

Pierderile de sarcină liniare în mișcarea turbulentă se calculează diferențiat, în funcție de factorii care determină legea de distribuție a vitezei. Astfel, când rugozitatea nu intervine direct asupra miezului turbulent expresia vitezei este (7.118) și curgerea are loc în așa numite conducte **netede**. Însă când distribuția vitezei este hotărâtor condiționată de efectul rugozităților (7.124), conducta lucrează în **zona rugoasă**. Când profilul vitezei este influențat atât de rugozități, cât și de substratul laminar curgerea este în **zona de tranziție**. Influența asupra profilului de viteză a curgerii din substratul laminar, pe de o parte, cât și a rugozității pe de altă parte, capătă semnificații prin relația (8.22).

#### 8.3.1. Calculul pierderilor de sarcină distribuite în zona turbulenței netede

Legea distribuției de viteză a curgerii turbulente în conducte circulare, canale de secțiune dreptunghiulară și în strat pe placă plană pentru pereți hidraulic netezi, după teoria lungimii de amestec a lui Prandtl este:

$$u = V_* (5,75 \lg \frac{y \cdot V_*}{\nu} + 5,5), \quad (7.118)$$

sau

$$\frac{u_{max} - u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{y} \quad (7.119)$$

Efortul tangențial la perete după (6.95) este

$$\tau_0 = \gamma R j$$

Înlocuind valoarea pantei hidraulice (8.6), se obține

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho \cdot v^2}{8}, \quad (8.24)$$

sau ținând seama de (7.115), rezultă

$$V_* = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} V \text{ sau } \frac{V_*}{V} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \quad (8.25)$$

Din (7.118) pentru  $y = r_0$  rezultă  $u_{max}$

$$u_{max} = V_* \left( 5,75 \lg \frac{r_0 V_*}{\nu} + 5,5 \right), \quad (8.26)$$

care, prin înlocuire  $r_0 = \frac{D}{2}$ , se poate pune sub forma

$$\frac{u_{max} - V}{V_*} + \frac{V}{V_*} = 5,75 \lg \left( \frac{V \cdot D}{\nu} \frac{V_*}{2V} \right) + 5,5 \quad (8.27)$$

Din problema 7.4 se observă

$$V = u_{max} - 3,746 V_* \quad (8.28)$$

sau

$$\frac{u_{max} - V}{V_*} = 3,746 \quad (8.29)$$

Înlocuind  $\frac{V_*}{V}$  (8.25) și (8.29) în (8.27), cu constatarea  $Re = \frac{VD}{\nu}$ , se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,033 \lg \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,80} = 2,033 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0,91 \quad (8.30)$$

Rezultatele experiențelor prelucrate modifică nesemnificativ coeficienții ecuației, obținându-se formula Káráman- Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda} - 0,8) = 2 \lg \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \quad (8.31)$$

Relația este în bună concordanță cu experiențele pentru  $10^4 < Re < 3,6 \cdot 10^6$ , însă poate fi extrapolată și pentru numere  $Re$  mai mari.

Forma sa implicită îngreuna calculele hidraulice și, din acest considerent, s-au căutat expresii explicite apropiate, după modelul

$$\lambda = (C_1 \lg Re + C_2)^b \quad (8.32)$$

Astfel de relații sunt:

$$\lambda = (1,8 \lg Re - 1,5)^{(-2)} \text{ Konakov} \quad (8.33)$$

$$\lambda = (1,82 \lg Re - 1,64)^{-2} \text{ Filonenko,} \quad (8.34)$$

valabile pentru  $4 \cdot 10^3 < Re < 10^7$ .

Din relația distribuției vitezei de formă putere (7.121) se ajunge la relații tot de forma putere pentru  $\lambda$ :

$$\lambda = C_1 + C_2 Re^x \quad (8.35)$$

Cum sunt relațiile:

$$\text{Nikuradse} \quad \lambda = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}; 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6 \quad (8.36)$$

$$\text{Blasius} \quad \lambda = 0,3164 Re^{(-0,25)}; 4 \cdot 10^3 < Re < 10^5 \quad (8.37)$$

$$\text{Less} \quad \lambda = 0,00071 + 0,61 Re^{(-0,35)}; Re < 3 \cdot 10^6 \quad (8.38)$$

$$\text{Schiller-Herman} \quad \lambda = 0,0054 + 0,396 Re^{-0,3}; 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6 \quad (8.39)$$

$$\text{Lazar} \quad \lambda = 0,0037 + 0,247 Re^{(-0,25)}; 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6 \quad (8.40)$$

$$\text{Lamont S}_3 \quad \lambda = 0,262 Re^{-0,2292}; 3 \cdot 10^3 < Re < 10^7 \quad (8.41)$$

$$\text{Lamont S}_4 \quad \lambda = 0,1059 Re^{-0,158}; 3 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^5 \text{ pentru} \quad (8.42)$$

conducte de diametre mari.

Literatura de specialitate abundă în relații tip putere, însă cu aplicabilitate limitată, referitoare pentru conducte și ecart de viteze pentru care s-au efectuat experimentările. Se mai subliniază încă o dată că aceste relații sunt specifice zonei turbulenței în conducte netede.

Înlocuirea a patru raze hidraulice cu un diametru echivalent face ca formulele de exprimare a coeficientului  $\lambda$  pentru conducte să fie acceptabile și pentru canale de

secțiune dreptunghiulară, modificându-se coeficienții numerici. Astfel relația Káráman- Nikuradse capătă forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 5,65 \lg \left( Re \sqrt{\lambda} \right) - 1,16 \quad (8.43)$$

### 8.3.2. Calculul pierderilor de sarcină distribuite în conducte rugoase

În conducte industriale forma, repartiția și gabaritul (înălțimea) asperităților este neregulată. Aceasta îngreuiază experiențele sistematice. Nikuradse a efectuat experiențe pe conducte cu rugozitate artificială omogenă (semisferică) de mărime  $\Delta$ . Valoarea rugozității relative a variat între  $1/15 \dots 1/507$ , aproape dublându-se pentru fiecare caz. Rezultatele astfel obținute  $(Re, \lambda)_i$  au fost reprezentate în coordonate logaritmice ( $\lg Re$  și  $\lg 100\lambda$ ), împreună cu rezultatele teoretice pentru regimul laminar și turbulent în conducte netede (fig. 8.3).

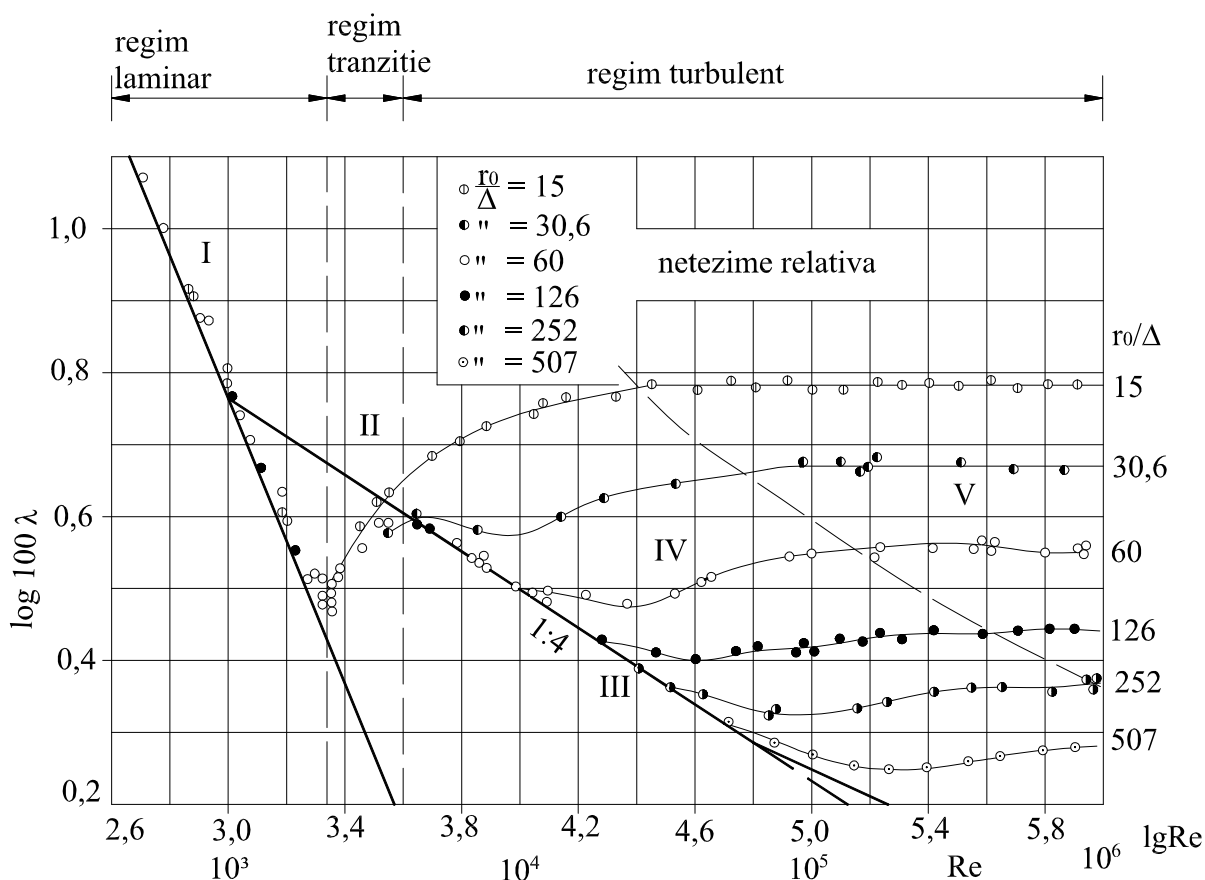


Fig. 8.3. Diagrama lui Nikuradse.

Din această diagramă rezultă următoarele:

1. Pentru  $Re < Re_{cr}$  mișcarea este laminară atât în conducte netede cât și în conducte rugoase, iar  $\lambda = 64 / Re$ . În graficul din fig. 8.3 relația corespunde dreptei I, numită dreapta lui Poiseuille.

2. În intervalul  $Re_{cr} < Re \leq 4000$  corespunde regimului de tranziție, numită deseori zonă de instabilitate II. Valoarea lui  $\lambda$  este greu de precizat, dar în cazurile practice nu prezintă interes deosebit.

3. Pentru  $Re \geq 4000$  mișcarea este turbulentă în condiții uzuale. Pentru conducte netede  $\lambda$  este dat de relațiile (8.31...8.42) și corespunde curbei III, care în aproximația (8.37) este dreapta lui Blasius (curba III continuată cu dreapta punctată). Conductele cu o anumită rugozitate se comportă ca cele netede dacă  $Re$  și  $\Delta / r_0$  au valori suficient de mici. În acest caz  $\lambda = \lambda(Re)$  și se pot utiliza pentru  $\lambda$  relațiile (8.31. ..8.42). Cum crește  $\Delta / r_0$  cu atât este mai mică valoarea lui  $Re$  la care curbele lui  $\lambda$  se îndepărtează de curba III. Pentru  $\Delta / r_0 = 1 / 15$ , conducta rugoasă nu se comportă de loc ca o conductă netedă. După cum se observă în zona IV, numită a "**turbulenței de tranziție**",  $\lambda = \lambda(Re, \frac{\Delta}{r_0})$ , iar în dreapta curbei punctate, zona V, graficele lui  $\lambda$  devin niște drepte orizontale, independente de  $Re$ , deci  $\lambda = \lambda(\frac{\Delta}{r_0})$ . În zona V - a  $\lambda$  fiind independent de  $Re$ , pierderea de sarcină depinde

riguros de pătratul vitezei. Din acest considerent zona V, a turbulenței rugoase se mai întâlnește și sub denumirea de "**zonă pătratică**". Curba III se mai numește "**zona turbulenței netede**". În zona III și IV  $\lambda$  depinde de numărul  $Re$  și, implicit, de viteza medie la o putere care alterează pătratul vitezei din expresia pierderilor de sarcină distribuite (8.3), deci în zonele III și IV pierderea de sarcină distribuită depinde de viteză la o putere mai mică de 2. Din acest considerent zona III și zona IV se mai numesc "**zona turbulenței prepătratică**".

Comportarea diferită a aceleiași conducte rugoase, la diferite valori ale numărului  $Re$ , se explică calitativ astfel. În cap.7 s-a arătat că în mișcarea turbulentă în conductă există, lângă perete, un substrat laminar de grosime  $\delta'$ . La creșterea vitezei numărul  $Re$  crește și grosimea substratului laminar scade. Când  $Re$  este mic se poate ca  $\delta' > \Delta$  și, atunci, asperitățile nu influențează miezul turbulent; conducta deși rugoasă se comportă ca o conductă netedă și, de fapt, lucrează în zona turbulenței netede. La creșterea vitezei nr.  $Re$  crește și  $\delta'$  ajunge la același ordin de mărime cu  $\Delta$ ; asperitățile încep să influențeze miezul turbulent și situația

corespunde zonei turbulenței de tranziție (zona IV din diagrama lui Nikuradse). La creșterea în continuare a vitezei,  $Re$  crește și substratul laminar se subțiază, ajungând  $\delta' \ll \Delta$ , influența asperităților devenind preponderentă asupra miezului turbulent (față de influența substratului laminar). Această situație corespunde zonei V, a turbulenței rugoase.

În concluzie, aceeași conductă rugoasă se poate comporta hidraulic ca o conductă netedă sau rugoasă în funcție de viteză și de mărimea rugozității relative.

Pentru conducte rugoase la deducerea distribuției de viteză s-a păstrat legea logaritmică însă la limita sa, pentru calculul constantelor de integrare, se acceptă pentru efortul tangențial rezistența la înaintare a asperităților, corespunzătoare unei suprafețe de mărime unitară, rezultând relația (7.124). Ecuația (7.124) transcrisă în axa conductei, unde  $u=u_{max}$ , devine:

$$\frac{u_{max} - V}{V_*} + \frac{V}{V_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{k} + \Phi \left( \frac{V_* k}{v} \right) \quad (8.44)$$

ținând seama și de (8.25) și (8.29), rezultă

$$3,746 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = 5,75 \lg \frac{r_0}{k} + \Phi \left( \frac{V_* k}{v} \right) \quad (8.45)$$

Valoarea funcției  $\Phi \left( \frac{kV_*}{v} \right)$  se poate determina cu graficul din fig. 7.19, pentru rugozitate artificială omogenă. Conform (7.116 și 117)

$V_* \frac{k}{v} = N \frac{k}{\delta'}$ , deci valorile foarte mici ale lui  $V_* \frac{k}{v}$  corespund conductelor în zona turbulenței netede, iar cele foarte mari conductelor în zona turbulenței rugoase. În primul caz (7.124) trebuie să coincidă cu (7.118), ceea ce implică:

$$\Phi \left( \frac{V_* k}{v} \right) = 5,75 \lg \frac{V_* k}{v} + 5,5 \quad (8.46)$$

graficul acestei funcții fiind dreapta I din fig. 7.19. În al doilea caz din fig. 7.19

$\Phi \left( \frac{V_* k}{v} \right) = const. = 8,5$  corespunde dreptei II.



Înlocuind ultima valoare în (7.124), rezultă:

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + 8,5 \quad (8.47)$$

Pentru calculul lui  $\lambda$  se acceptă  $\Phi = 8,5$ , cu care (8.45) devine

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,03 \lg \frac{r_0}{k} + 1,68 \quad (8.48)$$

Experiențele calibrează coeficienții relației, ajungând la relația lui Prandtl-Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{r_0}{k} + 1,47 = 2 \lg \frac{3,72 D}{k} \quad (8.49)$$

Relația se recomandă a fi folosită pentru  $10^5 < Re < 10^8$ . Alte relații de formă putere se bazează pe modul de aproximare de tip putere a profilului de viteză, astfel:

$$\text{- Sifrinson } \lambda = 0,11 \left( \frac{k}{D} \right)^{0,25} ; \quad Re \frac{k}{D} > 500 ; \quad (8.50)$$

$$\text{- Lamont } R_1 \cdot \lambda = 0,529 \left( \frac{k}{D} \right)^{0,73} ; \quad 2 < \frac{D}{k} \leq 10 \quad (8.51)$$

$$\text{- } R_2 \quad \lambda = 0,2578 \left( \frac{k}{D} \right)^{0,414} ; \quad 10 < \frac{D}{k} < 200 \quad (8.53)$$

$$\text{- } R_3 \quad \lambda = 0,0933 \left( \frac{k}{D} \right)^{0,22} ; \quad 200 < \frac{D}{k} < 20000 \quad (8.54)$$

Relația (8.49) poate fi utilizată și la canale, cu diametru echivalent,  $D=4R$ , sub forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{D}{k} + c \quad (8.55)$$

unde  $c$  este o constantă ce diferă de la canal la canal.

### 8.3.3. Criterii de stabilire a legii pierderilor de sarcină în regimul turbulent

Pentru stabilirea limitei superioare de aplicabilitate a relației (8.31), specifică zonei netede, școala lui Prandtl consideră că în fig. 7.19 dreapta I poate aproxima variația lui  $\Phi = \left( \frac{V_* k}{\nu} \right)$  până la valoarea  $V_* \frac{k}{\nu} = 5$ . Alte aproximări sunt mai riguroase și acceptă dreapta I numai până la  $V_* \frac{k}{\nu} = 3$ . O determinare mai obiectivă se obține prin căutarea lui  $V_* \frac{k}{\nu}$  pentru care distribuția de viteze (8.47) se reduce la (7.118), caracteristic conductelor netede. Relația (8.47) se mai poate scrie:

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{V_* y}{\nu} - 5,75 \lg \frac{V_* k}{\nu} + 8,5$$

iar aceasta este (7.118) dacă  $5,75 \lg \frac{V_* k}{\nu} = 3$  sau  $\frac{V_* k}{\nu} = 3,3$ .

Tinând seama de (8.25) se poate scrie

$$\frac{V_* k}{\nu} = \frac{k}{\nu} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} V_* \cdot \frac{D}{D} = Re \frac{k}{D} \sqrt{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{2}} < 3,3 \quad (8.56)$$

sau

$$Re < \frac{9,33}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{D}{k} \quad (8.57)$$

Acestea sunt criteriile care delimitează când o conductă rugoasă se comportă ca una netedă.

Stabilirea limitei inferioare de valabilitate a relației (8.48) este condiționată de  $V_* \frac{k}{\nu} \geq 70$ , valoarea acceptată de majoritatea cercetătorilor. Din (8.56) astfel rezultă:

$$\frac{V_* k}{v} = Re \frac{k}{D} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \geq 70 \text{ sau } Re > \frac{200}{\sqrt{\lambda}} \frac{D}{k} \quad (8.58)$$

Problemele prezentate până acum sunt riguroase conductelor netede și celor cu rugozitate artificială omogenă. Extinderea rezultatelor pentru conducte cu rugozitate naturală, neomogenă este posibilă după următorul raționament.

Experimental s-a constatat că și pentru conducte cu rugozitate naturală,  $\lambda$  devine independent de  $Re$  dacă acesta este suficient de mare. Cu această valoare a lui  $\lambda$  din (8.49) rezultă  $k$  (echivalent hidraulic). Pentru majoritatea tipurilor de conducte sunt întocmite tabele cu valoarea rugozităților echivalente (tabel 8.1) și variația acestora în timp (datorită depunerilor, eroziunii și coroziunii).

Sistematizarea experimentărilor pentru conducte cu rugozitate naturală (echivalentă relativă) prin reprezentare în coordonate dublu logaritmice a valorilor  $(\lambda, Re)_i$  conduce la **diagrama lui Moody**, analogă diagramei lui Nikuradse (fig. 8.4). Se constată că la conducte cu rugozitate naturală, hidraulic netede sau rugoase curbele  $\lambda$  coincid cu cele corespunzătoare conductelor cu rugozitate artificială omogenă. Cele două diagrame însă diferă în zona turbulenței de tranziție IV.

**Tabel 8.1.** Rugozitatea absolută a conductelor și canalelor (după I.E. Idelcik)

Nr.crt.	Natura pereților sau conductei, starea suprafeței și condițiile de exploatare	$10^2 k$ (mm)
1	2	3
A.	Conducte metalice	
I.	Tuburi trase din:	
1.	alamă, bronz, plumb tehnic netede	0,15...1,0
2.	aluminu tehnic neted	1,5...6,0
II.	Tuburi trase din oțel (comerciale)	
1.	noi, neintrate în exploatare, funcție de durata depozitării	2,0...10,0
2.	curate, după mulți ani de exploatare	până la 4,0
3.	bitumate	până la 4,0
4.	conducte de condensat, cu exploatare periodică și conducte de apă fără dezaerisire la alimentare și fără epurare chimică, cu pierderi mari pe rețea (1,5-3%)	100
5.	conducte de apă în exploatare	120...150

6.	cu mari depuneri de piatră	300
7.	conduce cu suprafață interioară în stare proastă, îmbinări neuniforme păsuite	500
III.	Tuburi de oțel complet sudate	
1.	noi și vechi în stare bună, cu îmbinări sudate sau nituite	4...100
2.	proaspăt bitumate	5
3.	aflate în exploatare, cu bitumul parțial spălat, corodate	10
4.	aflate în exploatare cu coroziune uniformă	15
5.	fară neregularități vizibile la îmbinări, la interior acoperite cu lac (1mm) stare bună	30...40
IV.	Conducte din oțel nituite	
1.	nituri longitudinale și transversale, cu un rând de nituri, la interior date cu lac (1 mm) cu suprafața în stare bună	30...40
2.	cu nituire longitudinală dublă și nituire transversală simplă, la interior date cu lac (1 mm) sau fără lac dar necorodate	60...70
3.	idem, date cu smoală	120...130
4.	cu 4-6 șiruri de nituri transversale și 6 șiruri longitudinale, cu rosturi petrecute	200
5.	cu 4 șiruri de nituri transversale și 6 șiruri longitudinale, cu rosturi petrecute	400
6.	cu starea suprafeței foarte proastă, cu îmbinări nepăsuite	500
V.	Conducte din oțel zincate	
1.	zincare îngrijită, nouă	7...10
2.	zincare obișnuită	10...15
VI.	Zincate din tabla de oțel	
1.	stare bună	15
2.	în exploatare cu apă	18
VII.	Conducte din fontă	
1.	noi	25...100
2.	noi, bituminte	10...15
3.	date cu asfalt	12...30

4.	conducte de apă în exploatare	140
5.	în exploatare, corodate	100...150
6.	cu depuneri	100...150
7.	cu importante depuneri	200...400
8.	la curățire după mulți ani de exploatare	30...150
9.	puternic corodate	până la 300
VIII.	Igheaburi	
1.	tablă de acoperiș nevopsită	2...4
2.	tablă de acoperiș vopsită	10...15
B.	Conducte și canale din beton și ciment,	
I.	Tuburi din beton	
1.	suprafață sclivisită în stare bună	30...80
2.	condiții medii	250
3.	suprafață brută, rugoasă	300...900
II.	Tuburi din beton armat	250
III.	Tuburi din azbociment	
1.	stare bună, noi	5...10
2.	stare medie	60
IV.	Tuburi din ciment	
1.	sclivisite	30...80
2.	neprelucrate	100...200
3.	cu mortar de ciment nesclivisit la îmbinări	190...640
V	Canale cu tencuială de mortar de ciment	
1.	tencuială îngrijită din ciment curat, cu rosturile sclivisite, fără neuniformități	5...22
2.	cu sclivisire simplă	50
VI	Tencuială pe rabiț	1000...1500
VII	Canale din ceramică smălțuită	140
VIII	Plăci de beton de zgură	150
IX	Plăci de zgură și mozaic de albastru, execuție neîngrijită	100...150
C	Tuburi din lemn, placaj și sticlă	
I	Tuburi din lemn	
1.	scânduri trase foarte îngrijit	15
2.	scânduri trase îngrijit	30
3.	scânduri brute, ajustate	70

4.	scânduri brute	100
5.	Tuburi din doage	60
II	Tuburi din placaj	
1.	de bună calitate, din mestecăn, cu fibre așezate transversak	12
2.	idem cu fibre așezate longitudinal	3...5
III.	Conducte din sticlă	
1.	sticlă curată	0,15...1,0
D.	Galerii	
1.	stâncă brută, radier betonat	$10^3$ - $10^4$
2.	stâncă brută pe tot perimetrul	$10^3$ - $10^5$
E.	Tuburi din mase plastice	
1.	PVC nou	1,4
2.	PVC vechi	5...7
3.	polietilenă de joasă densitate	1...5

Calitativ diferența între cele două grafice se explică prin faptul că, la rugozitate artificială, omogenă, la micșorarea grosimii  $\delta'$  a substratului laminar odată cu creșterea numărului  $Re$ , influența asperităților se manifestă brusc în toată conducta. Drept urmare în zona de tranziție  $\lambda$  crește relativ repede spre valoare sa din zona rugoasă. În schimb în cazul conductelor cu rugozitate naturală asperitățile au înălțimi diferite. Cele mai înalte influențează miezul turbulent imediat după depășirea regimului laminar. În consecință desprinderea curbelor corespunzătoare conductelor rugoase de curba III (corespunzătoare conductelor hidraulic netede) se produce mai repede ca în diagrama lui Nikuradse. La micșorarea grosimii substratului laminar numărul asperităților care pătrund în miezul turbulent crește continuu, astfel că în diagrama lui Moody,  $\lambda$  variază lent în zona turbulenței de tranziție, strict descrescător spre valoarea sa din zona rugoasă. Trecerea de la zona IV la V pe ambele diagrame se face la același număr  $Re$ , deci curba punctată este limita zonelor IV și V și corespunde ecuației (8.58).

Relațiile (8.31) și (8.48) sunt valabile și conductelor cu rugozitate naturală.

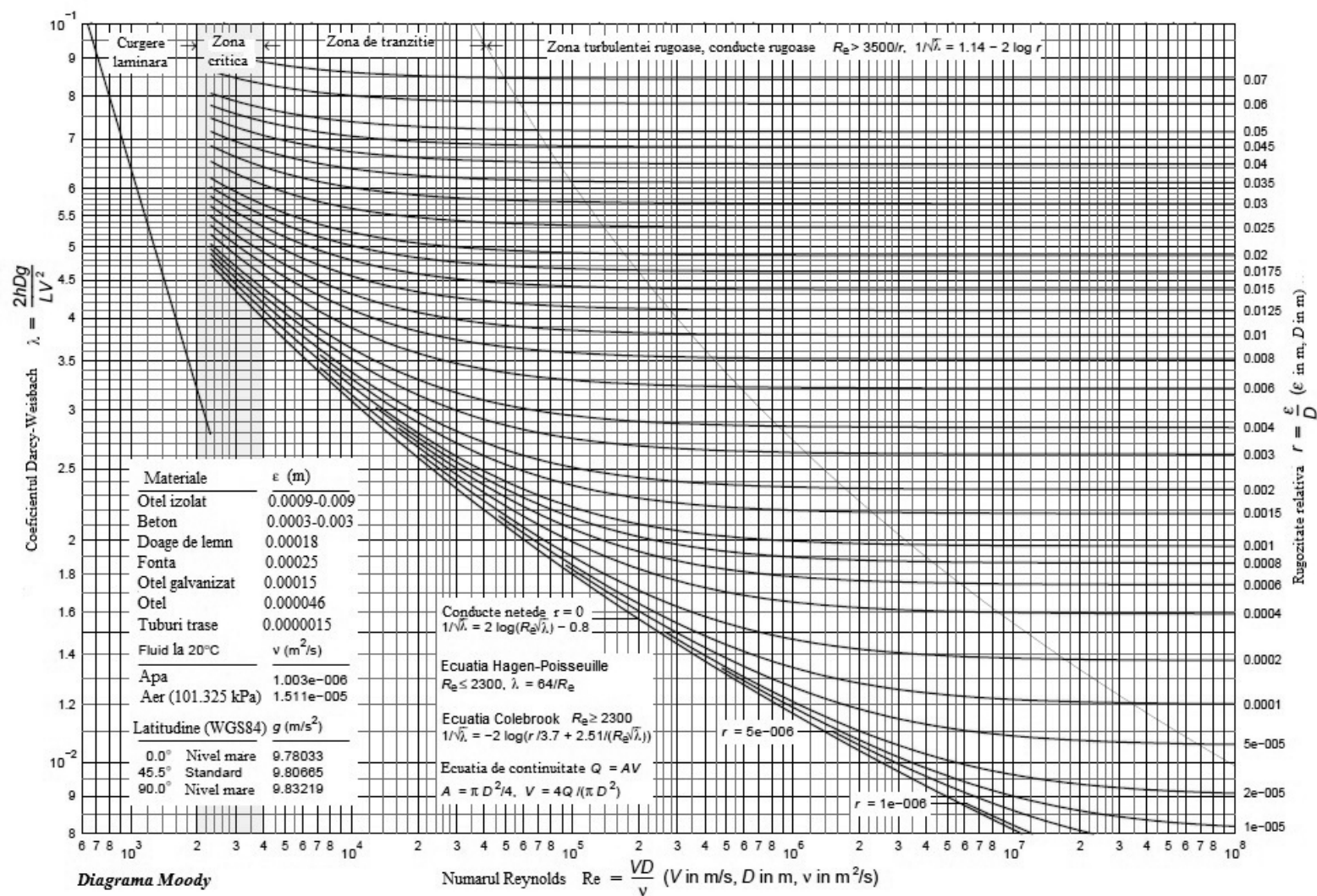


Fig. 8.4. Diagrama lui Moody pentru conducte cu rugozitate naturală

### 8.3.4. Calculul pierderilor de sarcină distribuite în zona turbulenței de tranziție

Pentru calculul coeficientului  $\lambda$  se prezintă un raționament după Altșul, modificat, care constă în integrarea ecuației (7.103) fără neglijarea unuia din termeni. În mișcarea laminară  $\tau$  este descris de ecuația (2.23), iar la curgeri turbulente se mai adaugă  $\tau'$ , conform (7.112). Știind (7.113, 7.115), efortul tangențial la perete devine:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} \left( v + \kappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = V_*^2 \quad (8.59)$$

În primă aproximare se consideră valabilă ecuația (7.118), deci  $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{V_*}{\kappa y}$  și (8.59) devine

$$\frac{d\bar{u}}{dy} (v + \kappa y V_*) = V_*^2 \text{ sau } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{V_*^2}{v + \kappa y V_*} \quad (8.60)$$

Prin integrare se obține:

$$\bar{u} = \frac{V_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\kappa V_*}{v} y \right) + C \quad (8.61)$$

Pentru  $y=k$ ,  $\bar{u} = \bar{u}_k$ , deci

$$C = \bar{u}_k - \frac{V_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\kappa V_*}{v} k \right)$$

sau

$$\frac{\bar{u}}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \kappa V_* \frac{y}{v}}{1 + \kappa V_* \frac{k}{v}} + \Phi \left( \frac{V_* k}{v} \right) \quad (8.62)$$



unde  $\frac{\bar{u}}{V_*} = \Phi\left(\frac{V_* k}{v}\right)$ . Din (8.25) se obține

$$\frac{\varkappa V_* y}{v} = \varkappa \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} V \cdot y = \varkappa \frac{V \cdot D}{v} \frac{y}{D} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} = \varkappa \text{Re} \frac{y}{D} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \quad (8.63)$$

iar pentru  $\text{Re}$  și  $y$  suficient de mari (miez turbulent) rezultă  $\varkappa V_* \frac{y}{v} \gg 1$ , deci (8.62) devine

$$\frac{\bar{u}}{V_*} = \Phi - \frac{1}{\varkappa} \ln\left(\frac{v}{\varkappa V_* y} + \frac{k}{y}\right) \quad (8.64)$$

Această relație coincide cu relația specifică conductelor netede (7.118) pentru  $\varkappa=0,4$  și  $\phi=7,8$  și cu cea specifică conductelor rugoase (7.124) când  $k \gg \frac{v}{\varkappa V_*}$  și dacă se înlocuiește  $k$  prin  $0,76 k$ . Astfel, rezultă

$$\frac{\bar{u}}{V_*} = 7,8 - 5,75 \lg\left(\frac{v}{\varkappa V_* y} + \frac{0,76 k}{y}\right) \quad (8.65)$$

Scriind ecuația pentru axa conductei avem

$$\frac{\bar{u}_{\max} - V}{V_*} + \frac{V}{V_*} = 7,8 - 5,75 \lg\left(\frac{v}{\varkappa V_* r_0} + \frac{0,76 k}{r_0}\right) \quad (8.66)$$

sau ținând seama de (8.29) și (8.25), rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,03 \lg\left(\frac{2,79}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,33 D}\right) \quad (8.67)$$

Concordanța relației (8.67) cu rezultatele experimentale necesită mici corecții ale coeficienților, obținând:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71D} \right), \quad (8.68)$$

ceea ce reprezintă relația lui Colebrook - White pentru zona turbulenței de tranziție. Mai mult, relația tinde să aibă valabilitate "universală" întrucât pentru  $k \rightarrow 0$  relația devine (8.31), specifică conductelor netede, iar pentru  $Re \rightarrow \infty$ , relația tinde spre (8.49), specifică turbulenței rugoase. De fapt graficul lui Moody este reprezentarea grafică a relației (8.68), cu excepția dreptei I. Soluționarea ecuației pentru  $k, \nu, Q$  dat necesită o metodă numerică.

Ușurarea calculului a impus găsirea unor forme explicite, aproximative, de formă logaritmică sau putere, astfel:

$$\text{Altshoul} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \left( \frac{k}{10D} + \frac{7}{Re} \right) \quad (8.69)$$

$$\text{Frenke} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[ \frac{k}{3,71D} + \left( \frac{6,81}{Re} \right)^{0,9} \right] \quad (8.70)$$

Lamont •  $T_2$  (conduțe moderat rugoase)

$$\lambda = 0,459 Re^{-0,115} \left( \frac{k}{D} \right)^{0,2745}; \quad Re > 3 \cdot 10^3; 10 < \frac{D}{k} < 200 \quad (8.71)$$

•  $T_3$  (conduțe ușor rugoase)

$$\lambda = 0,2149 Re^{-0,115} \left( \frac{k}{D} \right)^{0,129}; \quad Re > 3 \cdot 10^3; \quad 200 < \frac{D}{k} < 20000 \quad (8.72)$$

Calculul corect al pierderilor de sarcină distribuite în regimul turbulent de mișcare presupune cunoașterea rugozității, a vitezei medii, a coeficientului de vâscozitate cinematică și a diametrului conductei. Cu numărul  $Re$  și rugozitate relativă calculată, cu ajutorul diagramei lui Moody se stabilește zona în care are loc curgerea. Eventual se pot folosi criteriile expuse anterior, centralizate în tabelul 8.2.

**Tabel 8.2.** Criterii de stabilire a zonei de lucru a conductelor în regim turbulent

Zona de curgere	$V_* \frac{k}{\nu}$	$Re\sqrt{\lambda}$
netedă	$(0; 3,3]$	$< 9,33 \frac{D}{k}$
tranziție	$(3,3; 70]$	$9,33 \frac{D}{k} \leq Re \leq 200 \frac{D}{k}$
rugosă	$> 70$	$> 200 \frac{D}{k}$

### 8.3.5. Formule și grafice specializate pentru calculul lui $\lambda$ și $j$

Literatura de specialitate cuprinde numeroase experimentări și prelucrări, generalizări ale acestora pentru curgeri sub presiune, cele mai importante fiind ale lui Sevelev, Idelcik, Hazen-Williams și Lamont. Expresiile lui Lamont pentru calculul lui  $\lambda$  au fost prezentate anterior, iar prelucrările lui Idelcik fiind prea voluminoase nu se prezintă aici. Formulele specializate ale lui Sevelev și Hazen-Williams sunt prezentate în tabelul 8.3.

Coeficientul  $C$  din relația lui Hazen - Williams pentru  $\lambda$  corespund tabelului 8.4.

Deseori se găsesc relații pentru panta hidraulică (ca relațiile lui Hazen-Williams) de forma:

$$j = \frac{a \cdot Q^b}{D^c}, \quad (8.73)$$

care rezultă din relația putere pentru  $\lambda$  de forma:

$$j = z(Re)^x \left( \frac{k}{D} \right)^y \quad (8.74)$$

Pe baza relațiilor de forma (8.73) există întocmite grafice pentru ușurarea calculelor, ex. (fig. 8.5).

**Tabelul 8.3.** Formule speciale pentru calculul lui  $\lambda$  în conducte

Nr crt	Autorul	Relația de calcul	Natura și tipul conductei	Domeniul de valabilitate	Observații
1	Sevelev	$\lambda = \frac{0,0159}{D^{0,226}} \left( 1 + \frac{0,684}{V} \right)^{0,226}$	Conductă nouă din oțel	T=10°C	-
2		$\lambda = \frac{0,0144}{D^{0,284}} \left( 1 + \frac{2,36}{V} \right)^{0,284}$	Conductă nouă din fontă		-
3		$\lambda = 0,021 D^{-0,3}$	-		$j = 0,001736 Q^2 D^{-5,3}$ $V \geq 1,2 m/s$
4		$\lambda = \frac{0,0179}{D^{0,3}} \left( 1 + \frac{0,867}{V} \right)^{0,3}$	Conductă veche din oțel sau fontă		$j = \frac{0,00148}{D^{0,3}} \left( 1 + \frac{0,688 D^2}{Q} \right)^{0,3} Q^2$ $V \leq 1,2 m/s$
5		$\lambda = \frac{0,011}{D^{0,19}} \left( 1 + \frac{3,51}{V} \right)^{0,19}$	Conducte din azbociment		$j = 91 \cdot 10^{-5} \frac{Q^2}{D^{5,19}} \left( 1 + \frac{2,76 D^2}{Q} \right)^{0,1}$
6		$\lambda = 0,288 Re^{-0,226}$	Conducte din mase plastice		-
7		$\lambda = \frac{0,011}{D^{0,25}} \left( 0,95 + \frac{0,15}{V} \right)$	Conducte din ceramică		$V \leq 2,7 m/s$
8		$\lambda = 0,011 D^{-0,25}$	-		$V \geq 2,7 m/s$
9		$\lambda = \frac{85 \cdot 10^{-4}}{D^{0,26}} \left( 1 + \frac{0,235}{V} \right)$	Conducte din sticlă		-
10	Hazen-Williams	$j = 8,61 \cdot 10^{-3} V^{1,92} D^{-1,29}$	Conducte din fontă		Formule utilizate în Anglia și S.U.A.  C depinde de materialul și rigozitatea conductei
11		$j = 7,28 \cdot 10^{-3} V^{1,80} D^{-1,24}$	Azboci-ment		
12		$j = 7,52 \cdot 10^{-3} V^{1,85} D^{-1,26}$	Beton		
13		$\lambda = C \cdot Re^{-0,148} D^{-0,0165}$	-		

**Tabelul 8.4.** Valorile coeficientului C în formula Hazen-Williams  
(după P. Lamont)

Tipul de conductă	Valorile lui C pentru conducte de diametru					
	25,4 mm	76,2 mm	152,4 mm	204,8 mm	409,6 mm	819,2 mm
Fontă necăptușită: netede și noi		121	125	130	132	134
Fontă căptușită: netede și noi		129	133	138	140	141
30 de ani vârstă						
Tendința 1: ușor corodate		100	106	112	117	120
Tendința 2: moderat corodate		83	90	97	102	107
Tendința 3: apreciabil corodate		59	70	78	83	89
Tendința 4: mult corodate		30	39	48	56	62
60 ani vechime						
Tendința 1: ușor corodate		90	97	102	107	112
Tendința 2: moderat corodate		69	79	85	92	96
Tendința 3: apreciabil corodate		49	58	66	72	78
Tendința 4: mult corodate		30	39	48	56	62
100 ani vechime						
Tendința 1: ușor corodate		81	89	95	100	104
Tendința 2: moderat corodate		61	70	78	83	89
Tendința 3: apreciabil corodate		40	49	57	64	71
Tendința 4: mult corodate		21	30	39	46	54
Conducte necăptușite laminate:						
netede și noi	120	129	133			
Fier forjat: netede și noi	129	137	142			
Oțel căptușit: netede și noi	129	137	142	145	148	148
Oțel necăptușit: netede și noi	134	142	145	147	150	150
Conducte de azbociment						
necăptușite: curate		147	149	150	152	
Conducte de azbociment						
căptușite: curate		142	145	147	150	
Conducte netede						
(plumb, sticlă, PVC, alamă, cupru, neted etc.): curat	140	147	149	150	152	153
PVC ondulat: curat	134	142	145	147	150	150
Beton (Scobey)						
Clasa 1 ( $C_s=0,27$ ) curat		69	79	84	90	95
Clasa 2 ( $C_s=0,31$ ) curat		95	102	106	110	113
Clasa 3 ( $C_s=0,345$ ) curat		109	116	121	125	127
Clasa 4 ( $C_s=0,37$ ) curat		121	125	130	132	134
Cele mai bune ( $C_s=0,40$ ) curat		129	138	138	140	141

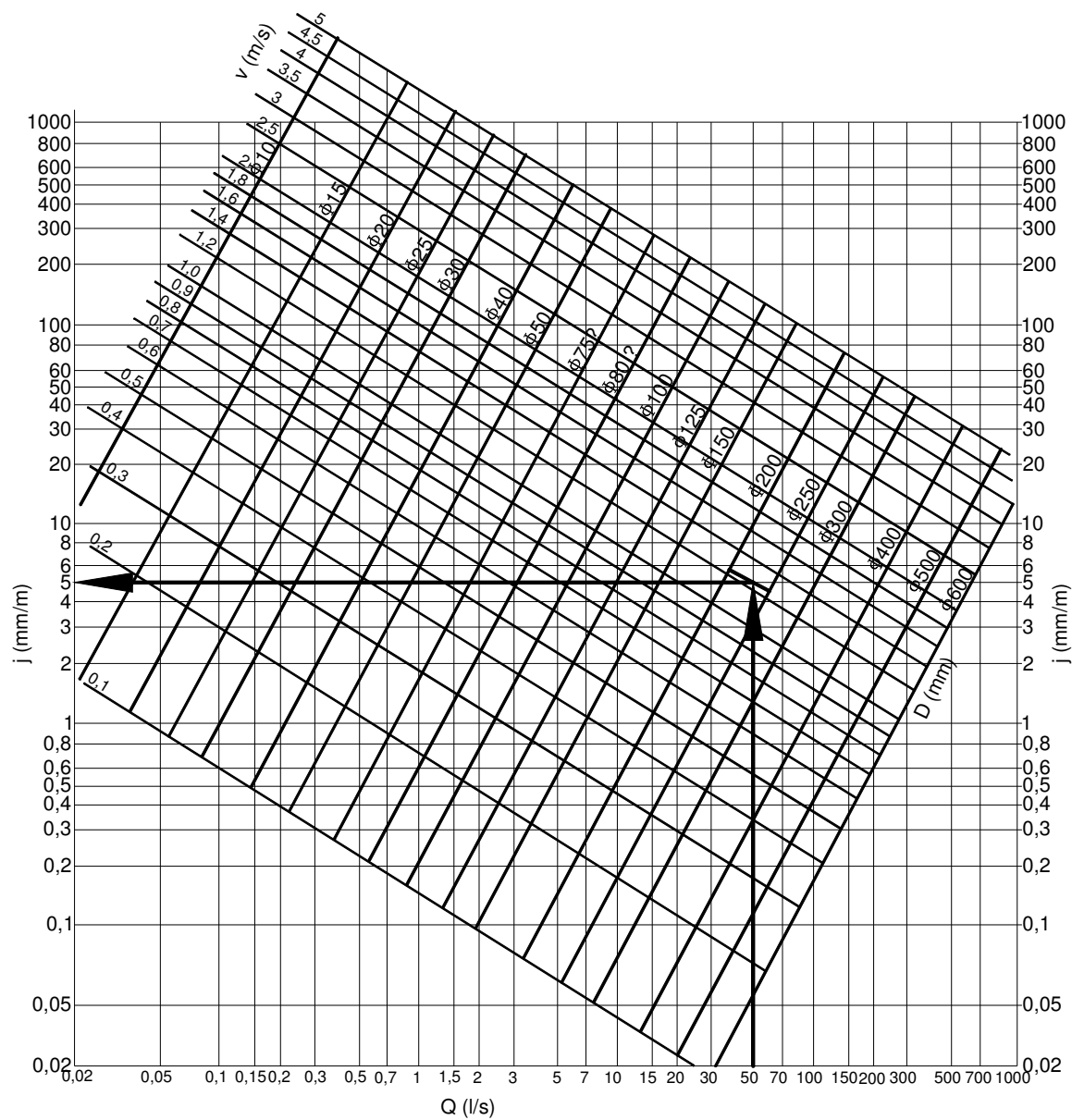


Fig. 8.5. Grafic pentru dimensionarea conductelor din polietilenă

#### 8.4. Calculul pierderilor de sarcină distribuite în curenți cu nivel liber

Mișcarea cu nivel liber a lichidelor este o formă de mișcare sub acțiunea greutății proprii. Se întâlnesc mișcări permanente (parametri hidraulici independenți de timp) și nepermanente în funcție de variabila timp, iar în funcție de variația parametrilor în spațiu avem mișcări uniforme și neuniforme.

Mișcări uniforme îi sunt caracteristice linii de curent rectilinii și paralele, viteza constantă în lungul liniei de curent. La o astfel de mișcare panta hidraulică  $j$ , panta piezometrică  $I_p$  și panta fundului albiei  $i = \sin \theta$  sunt egale  $j = I_p = i$ , linia energetică, piezometrică (suprafața liberă) și linia fundului sunt drepte paralele.

Adâncimea curentului este constantă  $h_0$ , pentru un debit  $Q$  dat (fig. 8.6).

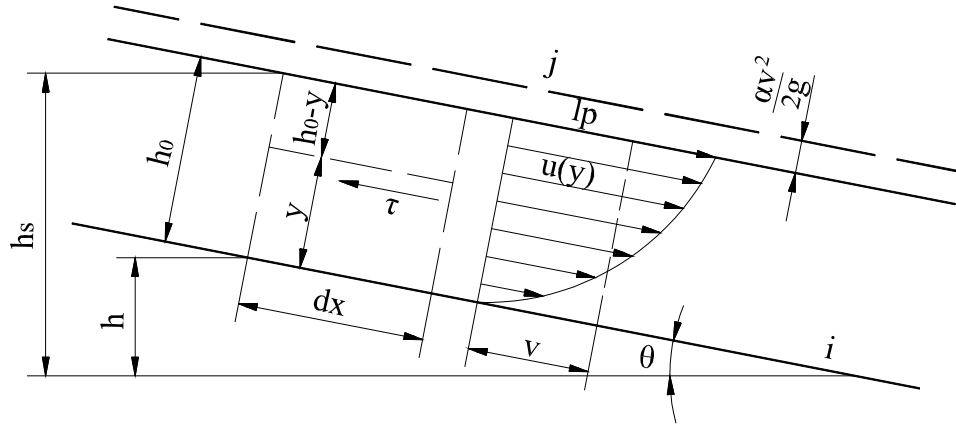


Fig. 8.6. Mișcarea uniformă cu nivel liber

Pentru calculul pierderilor de energie distribuite în mișcarea permanentă și uniformă cu nivel liber se calculează panta hidraulică  $j$  și se deduce relația lui Chezy din echilibrul dinamic al forțelor care acționează asupra elementului de volum de lungime  $dx$  și grosime  $(h_0 - y)$ .

$$\tau dx = (h_0 - y) \gamma \sin \theta dx ; \tau = -\gamma(h_0 - y) \frac{dh}{dx} \quad (8.75)$$

Pentru  $y = 0$  din (8.25) rezultă:

$$\tau = \tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho V^2 \quad (8.76)$$

sau cu (8.75)

$$j = \frac{dh}{dx} = \frac{\lambda v^2}{8gh_0} \quad (8.76)$$

Rezultă că viteza este maximă la suprafața liberă, lucru valabil pentru albiu infinit de largi. La albiu de lățime finită viteza maximă se atinge sub suprafața liberă. Pentru canale infinit de largi  $R=h_0$ ,

$$j = \frac{\lambda}{8} \frac{v^2}{Rg}; V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2gD_H j} \quad (8.78)$$

Este de așteptat ca legea de distribuție a vitezei să fie asemenea plăcilor plane sau conductelor dacă se lucrează cu un diametru fictiv  $D_H = 4R$  și aceasta implică și forma pentru coeficientul  $\lambda$ , care să aibă forma  $\lambda \left( Re, \frac{k}{D_H} \right)$ .

Experiențele cu rugozitate uniformă și naturală permit construirea unor grafice asemănătoare diagramei lui Moody și Nikuradse. Pentru zona netedă se așteaptă o relație de forma (8.31), care este de fapt suficient de exactă pentru canale, iar în zona turbulenței rugoase relația (8.49), corectată pe baza rezultatelor experimentale este:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \frac{k}{3D_H} \quad (8.79)$$

În zona de tranziție pentru calcule preliminare se poate utiliza relația Colebrook-White (8.68), însă calibrate prin experimentări devine

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{2.5}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3D_H} \right) \quad (8.80)$$

Utilizând relația (8.8), legătura între  $\lambda$  și  $C$ , uzual la canale se folosesc ecuațiile (8.7) și (8.10).

Pentru coeficientul lui Chezy prin legătura (8.8) s-au obținut relații logaritmice și de tip putere (tab. 8.5).



**Tabel 8.5.** Relații generale și practice pentru calculul coeficientului C

Nr.crt.	Autorul	Relația	Observații
1	2	3	4
A.1	Thijsse	<p>Relații generale</p> <p>a) Pereți netezi <math>C = 18 \lg \left( 3 \frac{Re}{C} \right)</math></p> <p>b) Pereți rugosi <math>C = 18 \lg \left( \frac{12}{k} \right)</math></p> <p>c) Zona de tranziție <math>C = -18 \lg \left( \frac{k}{12R} + \frac{C}{3Re} \right)</math></p>	Re se calculează la raza hidraulică
2	Powell	<p>a) Pereți netezi <math>C = 23 \lg \left( 3,3 \frac{Re}{C} \right)</math></p> <p>b) Pereți rușoși <math>C = 23 \lg \left( \frac{R}{k} \right)</math></p> <p>c) Zona de tranziție <math>C = -23 \lg \left( \frac{k}{R} + \frac{C}{3,3Re} \right)</math></p>	Re se calculează la raza hidraulică
3	Colebrook-White	$C = 18 \lg \frac{6R}{k + \frac{\delta}{7}}$	$\delta = \frac{12\nu}{\sqrt{gRj}}$ este grosimea stratului limita
B.4	Ganguillet-Kutter	Relatii practice $C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + 23 \frac{n}{\sqrt{R}}}$	n - coeficient de rugozitate R – raza hidraulică (relația aproximativă)
5	Manning	$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$	„
6	Forheimer	$C = \frac{1}{n} R^{1/5}$	Pentru alibi naturale
7	Manning-Strickler	$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$ $n = \frac{1}{26 \left( R / d_{35} \right)^{\frac{1}{6}}}$	d <sub>35</sub> - diametrul (m) al patului albiei
8	Pavlovski	$C = \frac{1}{n} R^y$ $y = 12,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1)$	$y = 1,5\sqrt{n}$ pentru $0,1 < R \leq 1,0$ $y = 1,3\sqrt{n}$ pentru $1,0 < R < 3,0$
9	Agroskin	$C = \frac{1}{n} + 17,72 \lg R$	
10	Bazin	$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma_B}{\sqrt{R}}}$	$\gamma_B$ – coeficient de rugozitate după Bazin

Valorile coeficienților de rugozitate  $n$  și  $\gamma_B$  sunt intabulați, calculați fiind pe baza rugozității absolute hidraulic echivalente (tab. 8.6. și 7).

**Tabel 8.6.** Coeficienți de rugozitate „ $n$ ” pentru câteva suprafețe

Nr. crt.	Natura peretelui sau tipul canalului	$n$
1	Suprafețe lăcuite emailate	0,009
<b>I</b>	<b>Metal</b>	
2	fontă curată nouă	0,012
3	tablă bitumată în funcțiune	0,012
4	tablă nituită transversal și longitudinal	0,015...0,019
<b>II</b>	<b>Lemn</b>	
5	geluit	0,011...0,012
6	negeluit	0,015...0,017
<b>III</b>	<b>Beton și ciment</b>	
7	beton netencuit, cofraje metalice	0,013
8	idem, cofraje de scândură	0,014... 0,016
9	beton sclivisit	0,011...0,012
10	beton torcretat	0,018...10,019
11	pereuri din beton	0,014
12	azbociment, ciment centrifugat	0,011
<b>IV</b>	<b>Cărămidă și piatră</b>	
13	piatră de talie sau cărămidă, execuție	0,013
14	piatră brută rostuită	0,018
15	bolovani de râu cu motor	0,022
16	gabioane	0,027
17	anrocamente	0,030
18	pereu de pietriș	0,020...0,025
19	tub de drenaj din argilă arsă	0,013
20	conducte de canalizare vitrificate	0,014
<b>V</b>	<b>Stâncă</b>	
21	necăptușită	0,022...0,040
22	parțial căptușită	0,020...0,022
<b>VI</b>	<b>Canale de pământ</b>	
23	canale în loess	0,017
24	canale cu pereți acoperiți cu argilă	0,022
25	canale cu prundiș mijlociu	0,025
26	canale cu maluri înverzite (înierbate)	0,030
27	canale cu vegetație bogată	0,035
<b>VII</b>	<b>Râuri</b>	
28	cu pietriș fin și nisip mult	0,020

29	cu pietriș de (10...30) mm	0,022
30	idem de (20...60) mm	0,025
31	idem de (50... 150) mm	0,030
32	râuri de munte cu bolovani	0,030...0,035

**Tabel 8.7.** Coeficienți de rugozitate

Nr.Crt.	Natura peretelui sau tipul canalului	$\gamma_B$
1	pereți foarte netezi (ciment sclivisit, scânduri geluite)	0.06
2	pereți netezi (scânduri, cărămidă, piatră de talie)	0.16
3	zidărie de piatră brută, execuție îngrijită	0.46
4	pereuri de piatră, canale de pământ profilate foarte îngrijit	0.80.....0.85
5	canale de pământ în condiții normal	1.30.....1.35
6	alpii cu rezistențe excepționale (fund de bolovani, maluri cu vegetație)	1.75

### 8.5. Calculul pierderilor locale de sarcină

După cum s-a menționat, în punctele singulare ale sistemelor hidraulice - locuri de schimbare a vitezei ca mărime și/sau direcție - curentul prezintă un grad pronunțat de neuniformitate (și de turbulență), deseori cu dezlipiri - iau naștere pierderi de energie (sarcină) locale. Elementele care perturbă curentul au extindere mică și influențează doar local curentul, mai puțin în amonte " $l_{am}$ " și mai mult în aval " $l_{av}$ ". La curenți cu nivel liber se produce o denivelare a suprafeței libere, dar

aceste aspecte se tratează separat în alt capitol. Aici se studiază numai singularitățile pe sisteme hidraulice închise, sub presiune.

Se consideră o singularitate într-o secțiune într-un curent sub presiune (fig. 8.7). Aceasta perturbă mișcarea caracteristică regimului de mișcare pe distanța  $l_{am}$  în amonte și  $l_{av}$  în aval.

Singularitatea modifică linia energetică între secțiunile 1 și 2, însă linia energetică reală se înlocuiește cu una fictivă ca și cum influența singularității ar fi punctuală în "i". Pierderea între 1 și 2 este:

$$h_{r1-2} = E_1 - E_2 = \left( \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

însă această pierdere se consideră a fi compusă din pierderile liniare

$h_{r1-i}$ ,  $h_{r i-2}$  și pierderea locală  $h_{rloc.i}$ .

$$h_{r1-2} = h_{rloc.i} + h_{r lin1-i} + h_{r lin i-2} \quad (8.81)$$

În mod analog se acceptă înlocuirea liniei piezometrice reale cu o linie piezometrică fictivă, modificarea de presiune considerându-se brusc în "i", deși se extinde pe distanța  $l_{am} + l_{av}$ .

Pierderile locale se calculează cu relația general acceptată (8.1).

$$h_{rloc} = \zeta_{loc} \frac{V^2}{2h} \quad (8.1)$$

în care  $\zeta_{loc}$  este coeficientul pierderilor locale de sarcină. De obicei  $V$  este viteza medie în aval de singularitate. În cazul când pierderea se exprimă în raport cu viteza medie din amonte, de obicei se specifică aceasta la valoarea lui  $\zeta_{loc}$ , se dă  $\zeta'_{loc}$ . Uneori se acceptă caracterizarea pierderilor locale prin lungimea lor echivalentă  $l_e$ , lungimea de conductă pe care se produc pierderi distribuite de aceeași mărime cu pierderea locală. Exprimarea este facilitată de relația:

$$\zeta = \lambda \frac{l_e}{D} \text{ sau } l_e = \frac{\zeta D}{\lambda} \quad (8.81')$$

Valoarea coeficientului  $\zeta_{loc}$  depinde hotărâtor de caracteristicile geometrice ale singularității, de distribuția vitezelor din fața acesteia, de regimul de curgere (nr.  $Re$ ) și, eventual, de alte elemente perturbatoare din amonte sau aval.

Dependența coeficientului  $\zeta_{loc}$  de numărul  $Re$  se resimte în special la valori mici ale acestuia, însă și această dependență este influențată de geometria

singularității. Peste o valoare limită ale nr. Re acesta nu mai influențează valoarea lui  $\zeta_{loc}$ .

Din cele arătate se remarcă faptul că studiul și calculul pierderilor locale de sarcină se reduce practic la stabilirea coeficientului  $\zeta_{loc}$ . Demonstrații teoretice pentru  $\zeta_{loc}$  sunt foarte puține datorita complexitatii fenomenelor care au loc.

### 8.5.1. Pierderea de sarcină locală la lărgirea bruscă a secțiunii

Una din singularitățile pentru care există demonstrație teoretică este lărgirea bruscă de secțiune. Se consideră difuzorul (brusc) din fig. 8.8. Liniile de curent datorită inerției lichidului nu urmăresc exact conturul solid, se dezlipesc în secțiunea 1-1; tubul de curent își lărgeste treptat secțiunea de la  $A_1$  la  $A_2$ . În aval de lărgire între tubul de curent și peretele solid se produc vârtejuri, a căror mișcare este întreținută de o parte din energia curentului.

Aproximând  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  din ecuația energiei, între secțiunile 1 și 2, rezultă pierderile

$$hr_{(1-2)} = z_1 - z_2 + \frac{(p_1 + p_2)}{\gamma} + \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g} \quad (8.82)$$

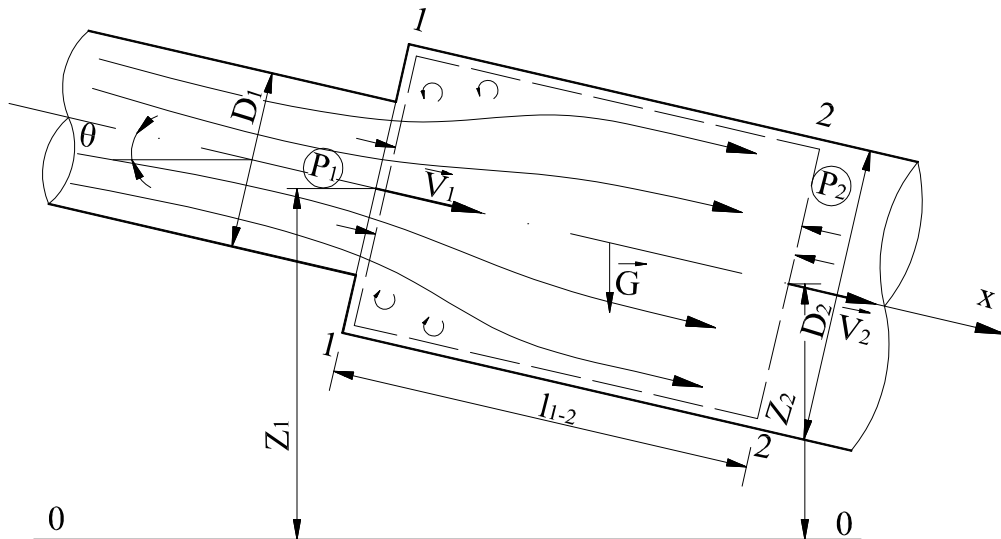


Fig. 8.8. Lărgirea bruscă de secțiune

Neglijând pierderile liniare pe acesta distanță mică  $l_{1-2}$ , pierderea este locală. Se aplică teorema impulsului pentru volumul de control cuprins între secțiunile normale 1 și 2

$$\bar{F} = \rho Q (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + \bar{F}_{p1} + \bar{F}_{p2} + \bar{G}$$

Se proiectează ecuația după axa  $X$ , pentru care  $F_x=0$ , deci:

$$\rho Q (V_1 - V_2) + p_1 A_1 - p_2 A_2 + \gamma A_2 \cdot l_{1-2} \sin \theta = 0$$

din care, după împărțire cu  $\gamma A_2$  și știind că  $l_{1-2} \sin \theta = z_1 - z_2$ , rezultă

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{V_2 (V_2 - V_1)}{g} \quad (8.83)$$

Reînlocuind expresia în (8.82) avem

$$h_{r1-2} = \frac{V_2 (V_2 - V_1)}{g} + \frac{V_1^2 V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{\Delta V^2}{2g} \quad (8.84)$$

deci pierderea de sarcină la lărgire bruscă este egală cu pierderea de energie cinetică. Utilizând ecuația de continuitate

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot V_2$$

(8.84) se mai poate scrie

$$h_{r1-2} = \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \left[ \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 - 1 \right]^2 \frac{V_2^2}{2g} \quad (8.85)$$

rezultând

$$\zeta_{larg} = \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 = \left[ \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 - 1 \right]^2 \quad (8.86)$$

Această expresie nu diferă mai mult de 6% din rezultatele măsurărilor experimentale pentru  $\frac{D_1}{D_2} = 0,1 \dots 0,7$ .

În mod analog se poate defini coeficientul de pierdere de sarcină la ieșire dreaptă dintr-o conductă într-un rezervor de secțiune foarte mare, unde  $v_2 \rightarrow 0$ , respectiv  $A_2 \gg A_1$ . În acest caz pierderea locală se exprimă față de viteza amonte  $V_1$ , rezultând  $\zeta'_{iesire} = 1$ .

### 8.5.2. Coeficientul de pierdere locală de sarcină la câteva singularități

După cum s-a arătat, pierderile locale la singularități se datoresc modificării vectorului viteză; apar dezlipiri și spații cu vârtejuri unde crește transformarea energiei hidraulice în energie termică și acustică. Această transformare este ireversibilă și reprezintă o pierdere de energie din punct de vedere hidraulic. Pe scurt se prezintă coeficienții pierderilor locale de sarcină la intrare în conductă, ieșire din conductă, îngustări și largiri de secțiune, coturi și curbe, diafragme, organe de închidere, clapetă de reținere (tabel 8.8). Nu se insistă asupra tuturor aspectelor, acestea fiind dezbătute larg în manuale, îndrumare de calcul hidraulic<sup>1</sup>.

### 8.6. Principiul compunerii pierderilor de sarcină

Pierderile de sarcină într-o instalație hidraulică se împart în pierderi distribuite și pierderi locale. Pierderile locale, provocate de singularități, influențează distribuția vitezelor și turbulența pe distanțele " $l_{am}$ " în amonte și " $l_{av}$ " în aval.

---

<sup>1</sup> Idelcik I.E. Îndrumător pentru calculul rezistențelor hidraulice, Ed. Tehnică, București, 1984.

Dacă distanța între singularități pe instalația hidraulică este superioară distanței de influență a singularităților, atunci fiecare pierdere locală ia naștere complet și independent, deci singularitățile nu se influențează reciproc. În această situație pierderea de sarcină totală este suma aritmetică a pierderilor liniare și locale,

$$h_{r\ tot} = \sum hr_{lin} + \sum hr_{loc} \quad (8.87)$$

Dacă distanța dintre singularități este mai mică decât lungimea de influență a singularităților învecinate, atunci pierderile locale se influențează reciproc și nu iau naștere complet. Profilul de viteză care "atacă" singularitatea aval (și în consecință și turbulența) diferă de profilul de viteză a curgerii stabilizate în conductă, respectiv și profilul de viteză în aval de singularitate este modificat. De obicei în astfel de situații, pierderile locale sunt mai mici decât în cazul când se formează complet și independent. Pierderea totală este mai mică decât suma aritmetică a pierderilor liniare și locale. Într-un asemenea caz este recomandabilă utilizarea relației:

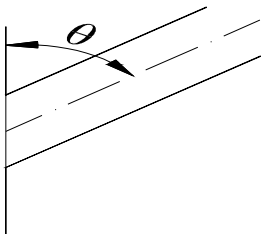
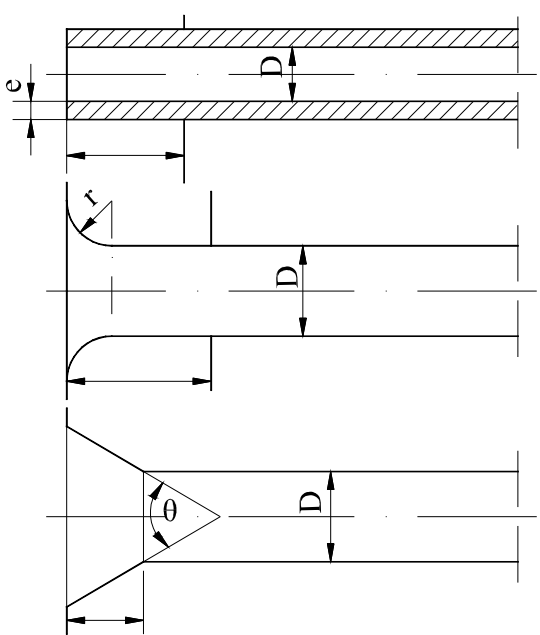
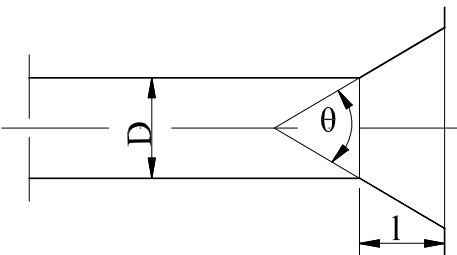
$$hr_{tot} = \zeta_{global} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (8.88)$$

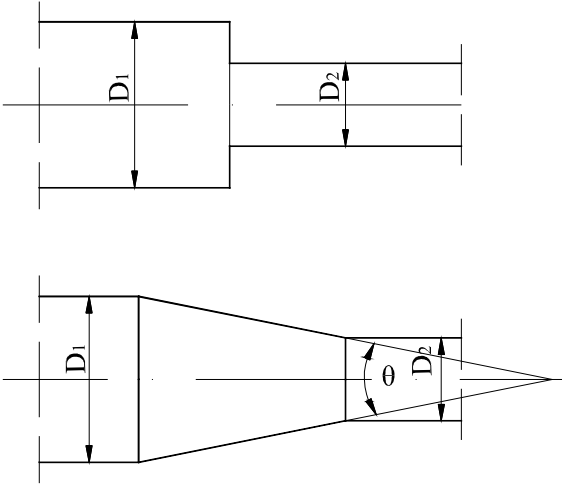
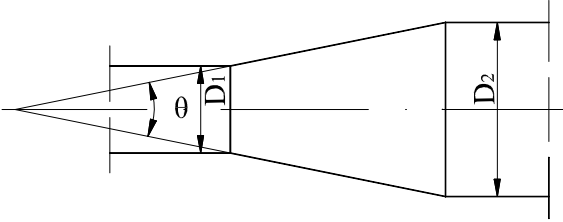
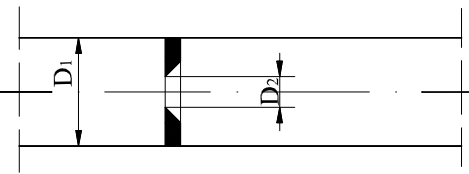
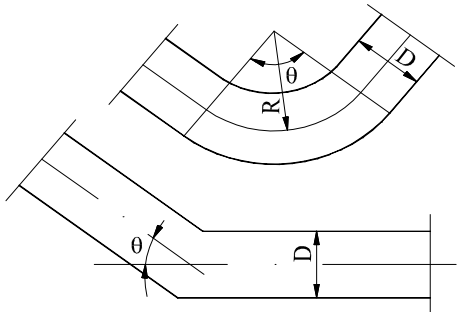
unde  $\zeta_{global}$  reprezintă coeficientul de rezistență global al pierderilor distribuite și locale care nu iau naștere complet. Un astfel de coeficient se determină numai experimental pentru tronsonul de conductă cu singularitățile respective care se influențează reciproc. Sunt rare grupările de armături tipizate pentru care în literatură se găsește  $\zeta_{global}$ .

De obicei se consideră primul caz, care însă supraestimează influența pierderilor și supradimensionează instalația hidraulică.

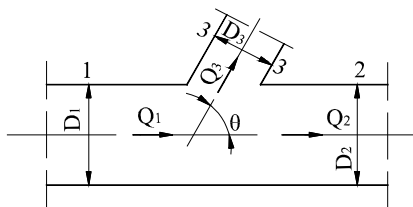
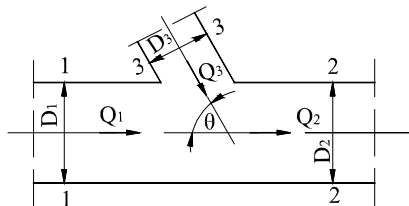


**Tabelul 8.8.** Coeficienți de pierdere locală de sarcină  $\zeta$ 

Singularitate	$\zeta$
<p>1. Intrarea cu muchii ascuțite</p> 	$\zeta = 0,5 + 0,3 \cos \theta + 0,2 \cos^2 \theta$
<p>2. Intrarea în conductă</p> 	$\zeta = f\left(\frac{e}{D}, \frac{1}{D}\right); \zeta = 0,5 \dots 1,0$ $\zeta = f\left(\frac{r}{D}, \frac{1}{D}, \frac{k}{D}\right); \zeta = 0,02 \dots 1,0$ $\zeta = f\left(\theta, \frac{1}{D}\right); \zeta = 1,0 \dots 0,5$
<p>3. Iesirea din conductă</p> 	$\zeta^1 = \left(1,15 - 0,05 \frac{1}{D}\right) \zeta_0$ $\zeta_0 = f\left(\theta, \frac{1}{D}\right); \zeta = 0,15 \dots 1$

<p>4. Îngustare de secțiune</p> 	$\zeta = 0,5 \left( 1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2$ $\zeta = \left( \frac{n^{1,8} - 1}{1,48 n^{1,8} + 1} \right)^2 f(\theta);$ $n = \frac{A_1}{A_2} < 100$ $f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$
<p>5. Lărgire de secțiune</p> 	$\zeta = 3,2 \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 (tg \theta)^{1,25},$ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$
<p>6. Diafragma</p> 	$\zeta' = \left( \frac{A_1}{\varepsilon A_2} - 1 \right)^2$ $\varepsilon = 0,63 + 0,37 \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^3$
<p>7. Coturi</p> 	$\zeta = \frac{\theta^\circ}{90} \left[ 0,13 + 0,16 \left( \frac{D}{R} \right)^{3,5} \right];$ $1 < \frac{R}{D} < 5$ $\zeta = 0,95 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2,05 \sin^4 \frac{\theta}{2};$ $\theta < \frac{\pi}{2}$

## 8. Ramnificatii



$$\zeta'_{1-2} = f\left(\frac{Q_1}{Q_2}, \frac{A_1}{A_2}\right)$$

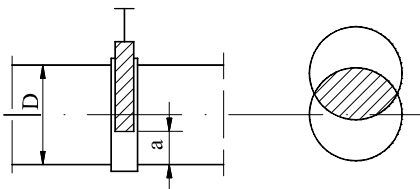
$$\zeta'_{3-2} = f\left(\frac{Q_3}{Q_2}, \frac{A_3}{A_2}, \theta\right)$$

$$\zeta_{1-2} = f\left(\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{A_2}{A_1}\right)$$

$$\zeta_{1-3} = f\left(\frac{Q_3}{Q_1}, \frac{A_3}{A_1}, \theta\right)$$

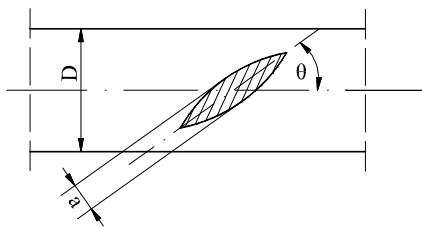
9. Organe de reglare  
închidere

## a) robinet sertar



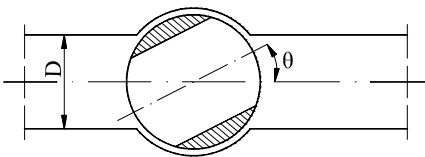
$$\zeta = f\left(\frac{a}{D}, \text{formă}\right)$$

## b) robinet fluture



$$\zeta = f\left(\frac{a}{D}, \theta\right)$$

## c) robinet sferic, cep



$$\zeta = f(\theta)$$

### 8.7. Rezistența la înaintare

Se presupune că un corp rigid se află într-o mișcare de translație constantă  $\overline{V}_0$  într-un lichid în repaus față de un sistem de referință fix  $o'x'y'z'$ . Prin mișcarea sa solidul produce mișcarea lichidului în jurul său, cu excepția lichidului aflat foarte departe de solid (la infinit). La rândul său, lichidul exercită asupra solidului un sistem de forțe. Fie și un sistem de referință mobil  $oxyz$  care are o mișcare de translație cu viteza  $\overline{V}_0$  în raport cu  $o'x'y'z'$ . Pentru un observator de pe  $oxyz$ , solidul este în repaus, iar lichidul la infinit amonte are viteza  $\overline{V}_\infty = -\overline{V}_0$ . În virtutea principiului de relativitate din mecanica newtoniană și în acest caz lichidul exercită același sistem de forțe asupra solidului. Pe fiecare element  $dA$  al suprafeței  $S$  a solidului, lichidul exercită o forță elementară  $d\overline{F} = \overline{T}dA$ ,  $\overline{T}$  fiind efortul unitar aplicat în punctul  $N$  (fig. 8.9).

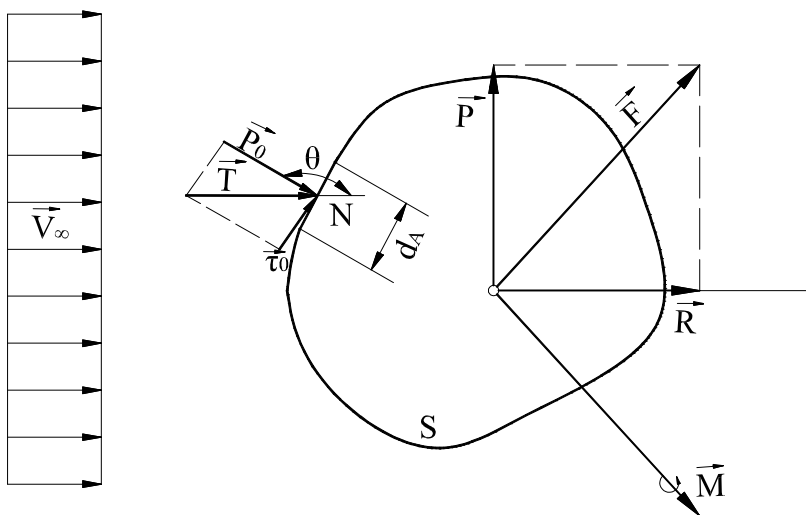


Fig. 8.9. Acțiunea lichidului în mișcare asupra unui corp rigid

Fie  $\overline{p}_0 = -p_o \cdot \overline{n}$  și  $\overline{\tau}_0$  componentele lui  $\overline{T}$  după normală, respectiv tangentă în  $N$  la  $S$ . Se știe că  $\overline{p}_0 = \overline{p}' + \overline{p}$ , unde  $\overline{p}$  este presiunea fluidului eulerian, iar  $\overline{p}'$  datorită vâscozității. Sistemul forțelor elementare  $d\overline{F}$ , în raport cu  $oxyz$ , se reduce la o rezultantă  $\overline{F}$  și un moment  $\overline{M}$ ,

$$\bar{F} = \int_S d\bar{F} = \int_S \bar{T} dA \text{ și } \bar{M} = \int_S \bar{r} \times d\bar{F} = \int_S \bar{r} \times \bar{T} dA \quad (8.89)$$

Forța  $\bar{F}$  și momentul  $\bar{M}$  nu includ forța arhimedică. Fie  $\bar{R}$  și  $\bar{P}$  componentele lui  $\bar{F}$ , respectiv după direcția vitezei  $\bar{V}_\infty$  și în planul normal în O pe acesta.  $\bar{R}$  se numește **rezistență la înaintare**, iar  $\bar{P}$  **portantă**. Fie  $\bar{R} = R \cdot \bar{i} = \bar{R}_p + \bar{R}_f$ , unde  $\bar{R}_p = R_p \cdot \bar{i}$  se datorește numai lui  $\bar{p}_0$ , iar  $\bar{R}_f = R_f \cdot \bar{i}$  numai lui  $\bar{\tau}_0$ . Astfel se poate scrie:

$$\bar{R} = \bar{F} \cdot \bar{i} = \bar{i} \int_S \bar{T} dA = \bar{i} \int_S (-p_0 \bar{n} \cdot \bar{i} + \bar{\tau}_0 \cdot \bar{i}) dA = - \int_S p_0 \cos \theta dA + \int_S \tau_0 \sin \theta dA,$$

deci,

$$R_p = - \int_S p_0 \cos \theta dA \quad \text{și} \quad R_f = \int_S \tau_0 \sin \theta dA \quad (8.90)$$

unde  $R_p$  este **rezistența de presiune** sau **rezistență de formă**,  $R_f$  **rezistență de frecare**. Într-adevăr, pe un rigid de formă hidrodinamică stratul limită nu se desprinde, iar în stratul limită presiunea este practic constantă după normală la  $S$ , rezultă că pe rigid distribuția de presiune este foarte apropiată cazului când în jurul corpului se mișcă un lichid eulerian. În schimb, pe un rigid fără formă hidrodinamică se produce desprinderea stratului limită, în urma rigidului formându-se o zonă de apă moartă unde presiunea este constantă, deci pe porțiunea lui  $S$  care mărginește apa moartă, distribuția de presiune diferă de cazul lichidului eulerian. Se

poate concluziona că raportul  $\frac{R_p}{R_f}$  este mic la rigide hidrodinamice și mare la

rigid neprofilat. La un rigid profilat hidrodinamic  $R_p$  este foarte mic (apropiat cazului lichidului eulerian, ori în acest caz  $p'=0$  și  $\tau_0 = 0$ , deci  $R \rightarrow 0$  conform paradoxului lui d'Alembert). La un solid neprofilat, în spatele solidului se creează zona de apă moartă, unde presiunea este mai mică decât în partea anterioară a rigidului și ca urmare  $R_p$  este mare, superioară lui  $R_f$ .

Secțiunea de arie maximă a rigidului după un plan normal pe  $\bar{V}_\infty$  se numește secțiune **maestră** de arie  $A$ .

Valoarea rezistenței la înaintare se determină prin metoda produselor. Se presupune că  $R$  depinde de  $V_\infty, A, \rho$  și  $\mu$ . Mărimile fizice fiind puține se utilizează metoda Rayleigh, presupunând posibilă dezvoltarea

$$R = f(V_\infty, A, \rho, \mu) = \sum_{i=0}^n c_i V_\infty^{x_{2,i}} \cdot A^{x_{3,i}} \cdot \rho^{x_{4,i}} \cdot \mu^{x_{5,i}}$$

Pentru  $R$  și dezvoltare există ecuația de dimensiune:

$$L.M.T^{-2} = (L.T^{-1})^{x_{2i}} \cdot (L^2)^{x_{3i}} \cdot (M.L^{-3})^{x_{4i}} \cdot (L^{-1}MT)^{x_{5i}}$$

Egalând exponenții dimensionali se obține sistemul:

$$\begin{cases} x_{2i} + 2x_{3i} - 3x_{4i} - x_{5i} = 1 \\ x_{4i} + x_{5i} = 1 \\ x_{5i} - x_{2i} = -2 \end{cases}$$

Acest sistem are soluția:  $x_{2i} = 2 - x_{5i}$ ;  $x_{3i} = 1 - \frac{x_{5i}}{2}$ ;  $x_{4i} = 1 - x_{5i}$ ,

$$R = V_\infty^2 A \rho \sum_{i=0}^n c_i \left( \frac{\mu}{V_\infty A^{\frac{1}{2}} \rho} \right)^{x_{5i}} = \rho V_\infty^2 A \cdot \rho \left( \frac{\mu}{V_\infty A^{\frac{1}{2}} \rho} \right)$$

notand  $A^{\frac{1}{2}} = l$  și  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$  în paranteza funcției  $\varphi$  este  $\frac{1}{Re}$ , cu  $Re = V_\infty \cdot \frac{l}{\nu}$ . Se mai poate scrie:

$$R = \rho V_\infty^2 A \psi_1(Re) \quad (8.91)$$

Analog se obține  $P = \rho V_\infty^2 A \psi_2(Re)$  și  $M = \rho V_\infty^2 A \psi_3(Re)$ . În aplicații este utilă exprimarea:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{2} C_x \rho A V_\infty^2 \\ P = \frac{1}{2} C_z \rho A V_\infty^2 \\ M = \frac{1}{2} C_m \rho A V_\infty^2 \end{cases} \quad (8.92)$$

unde mărimile adimensionale  $C_x$ ,  $C_z$  și  $C_m$  sunt **coeficienții de rezistență la înaintare, portantă și de moment**. În mod analog se pot exprima  $R_p$  și  $R_f$

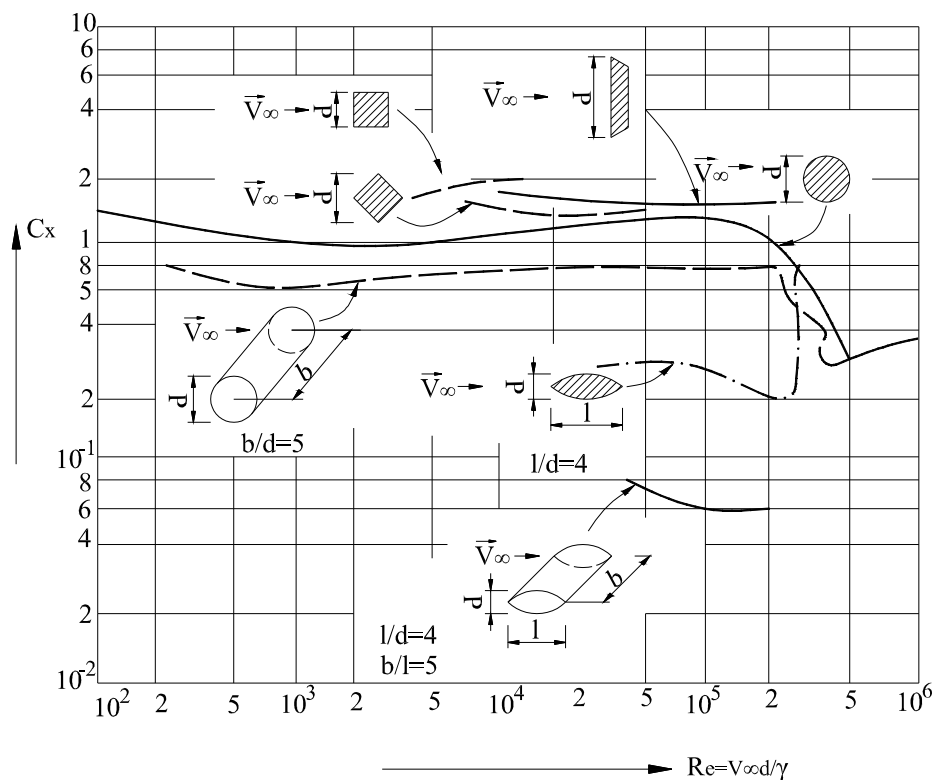
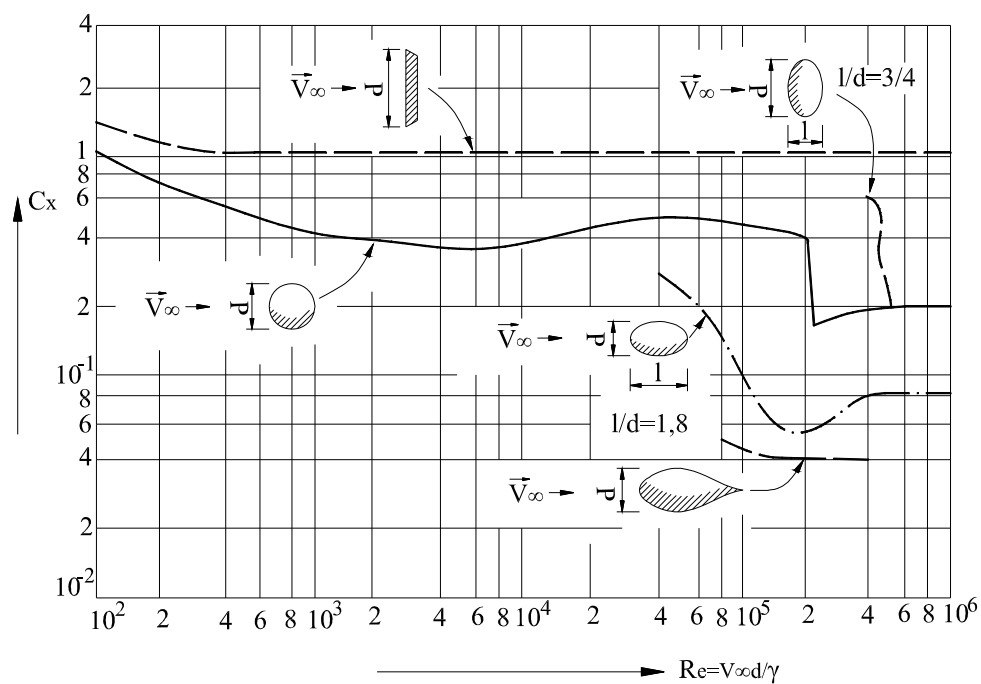
$$\begin{cases} R_p = \frac{1}{2} C_{xp} \rho A V_\infty^2 \\ R_f = \frac{1}{2} C_{xf} \rho A V_\infty^2 \end{cases} \quad (8.93)$$

unde  $C_{xp}$  este **coeficientul de rezistență la presiune**, iar  $C_{xf}$  este **coeficient de rezistență la frecare**. Evident  $C_x = C_{xp} + C_{xf}$ . Pentru o placă plană cu grosime neglijabilă, paralelă cu  $V_\infty$ ,  $A \rightarrow 0$ , deci a două ecuație (8.93) nu este relevantă. În locul secțiunii maestre în această relație se utilizează aria de contact a rigidului cu lichidul, deci:

$$R_f = \frac{1}{2} C_f \rho A_s V_\infty^2 \quad (8.94)$$

Din (8.93) și (8.94) rezultă  $\frac{C_{xf}}{C_f} = \frac{A_s}{A}$ .  $C_x$ ,  $C_z$  și  $C_m$  depind numai de

forma solidului și de nr. Re al mișcării. Determinarea  $\bar{R}$ ,  $\bar{P}$  și  $\bar{M}$  pentru un rigid oarecare se reduce practic la stabilirea coeficienților  $C_x$ ,  $C_z$  și  $C_m$  care, în majoritatea cazurilor, se determină experimental. Pentru câteva cazuri acești coeficienți se pot evalua și teoretic. Experiențele arată că aspectul calitativ al mișcării diferă în jurul rigidelor neprofilate după curbe continue sau discontinue, respectiv profilate. Se constată că este util a se considera separat mișcările plane de cele spațiale. Valorile coeficientului  $C_x$  pentru mișcări plane corespund fig. 8.10, iar pentru mișcări spațiale fig. 8.11.

Fig. 8.10. Graficul  $C_x(Re)$  pentru mișcări planeFig. 8.11. Variațiile  $C_x(Re)$  pentru mișcări spațiale



### Observații

1. Creșterea rugozității rigidului reduce valoarea lui  $C_x$ , datorită micșorării valorii lui  $Re_{cr}$  în stratul limită (paradoxul Eiffel).

2. Rezistența la înaintare a unei sfere pentru  $Re = V_\infty \frac{d}{\nu} \leq 1$  este legea lui Stokes

$$R = 3 \pi \mu d V_\infty \quad \text{cu} \quad C_x = \frac{24}{Re} \quad (8.95)$$

respectiv

$$C_{xp} = \frac{8}{Re} \text{ și } C_{xf} = \frac{16}{Re}$$

3. La rigide neprofilate după curbe discontinui desprinderile se produc la muchii și nu apare paradoxul Eiffel.

4. Experiențele arată că valoarea lui  $\bar{R}$  diferă, după cum solidul este în repaus, iar lichidul are viteza la infinit  $\bar{V}_\infty$ , sau lichidul este în repaus și solidul are mișcare de translație cu  $\bar{V}_0 = -\bar{V}_\infty$ . Acest fapt contravine principiului de relativitate din mecanica newtoniană și se numește paradoxul lui du Buat. Explicația se găsește în turbulența diferită în lichid la cele două tipuri de mișcări și influența pereților care mărginesc spațiul experimental.

5. La corpuri de lungime finită (aripi de rotor, de avion) circulația transversală a fluidului pe profil dă naștere la așa numita **rezistență indusă**, la capete formându-se vârtejuri marginale, a căror întreținere necesită energie.

6. La mișcarea rigidelor în lichid cu suprafață liberă (la suprafață sau la adâncime mică), mișcarea provoacă valuri a căror producere necesită energie, ce se poate traduce în forță suplimentară, numită **rezistență de val**.

7. Dacă într-un lichid se mișcă două solide suficient de aproape unul de altul, ele interacționează. Rezistența la înaintare a ansamblului nu este suma rezistențelor la înaintare a celor două corpuri luate separat. Importanța prezintă când cele două solide se mișcă unul după altul, când apare **efectul de ecran** și care micșorează considerabil rezistența la înaintare a solidului din spate.

## 8.8. Aplicații

**8.1.** Să se stabilească zona de lucru și să se calculeze coeficientul  $\lambda$  și pierderea de sarcină distribuită pe lungimea  $L = 1000\text{m}$  pentru o conductă din azbociment cu  $D = 200\text{mm}$ ,  $k = 0,2\text{mm}$ , care transportă debitele  $Q_1 = 5\text{l/s}$ ,  $Q_2 = 27\text{l/s}$  și  $Q_3 = 360\text{l/s}$ , coeficientul de vâscozitate cinematic al apei fiind  $\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .

**Rezolvare:** Se determină rugozitatea relativă  $\frac{k}{D} = \frac{0,2}{200} = 10^{-3}$ . Pentru fiecare debit se calculează nr. Re și din diagrama lui Moody se stabilește zona de lucru și valoarea aproximativă a coeficientului  $\lambda$ . Calculele sunt centralizate în tabelul 8.9.

**8.2.** O conductă veche din fontă cu  $D = 300\text{mm}$  transportă apă la debitul  $Q = 70\text{l/s}$  pe distanța  $L = 2400\text{m}$  ( $\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ). Să se determine pierderea de sarcină pe această conductă și rugozitatea sa echivalentă.

**Rezolvare:** Se utilizează o relație specializată a lui Sevelev pentru  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{0,0179}{D^{0,3}} \left( 1 + \frac{0,867}{V} \right)^{0,3} = \frac{0,0179}{0,3^{0,3}} \left( 1 + \frac{0,867}{0,990} \right)^{0,3} = 0,0310$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,070}{\pi 0,3^2} = 0,990 \text{m/s}; \quad j = \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{0,031}{0,3} \frac{0,99^2}{2 \cdot 9,81} = 5,162 \cdot 10^{-3}$$

sau

$$j = \frac{0,00148}{D^{5,3}} \left( 1 + \frac{0,688 D^2}{Q} \right)^{0,3} \quad Q^2 = \frac{0,00148}{3,5^{5,3}} \left( 1 + \frac{0,688 \cdot 0,3^2}{0,07} \right) \cdot 0,07^2 = 5,18 \cdot 10^{-3}$$

$$h_r = j \cdot L = 5,162 \cdot 10^{-3} \cdot 2400 = 12,39 \text{ m}$$

Tabel 8.9.

Q l/s	Re	$\lambda$ diagrama Moody	$Re\sqrt{\lambda}$	Zona	Relații $\lambda$	$\lambda$	$\lambda$ calcul	j	$V_*$ (m/s)	$\frac{V_* k}{\nu}$	$\delta'$ (mm)	hr (mCA)	Observații
5	27922	0,0270	4588	Netedă	8,31 8,34 8,37 8,41	0,02338 0,02400 0,02448 0,02508	0,0240	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$8,72 \cdot 10^{-3}$	1,53	1,52	0.155	$9,33 \frac{D}{k} = 9330$ limita superioară a zonei netede pentru Re $200 \frac{D}{k} = 200.000$ limita inferioară a zonei rugoase pentru Re
27	150778	0,0215	22108	Tranziție	8,68 8,69 8,70 8,72	0,02140 0,02100 0,02155 0,02237	0,0214	$4,03 \cdot 10^{-3}$	0,0445	7,8	0,299	4,03	$V_* = \frac{1}{2} \sqrt{g D j}$ 3,3 limita superioară a zonei netede pentru $V_* = \frac{k}{\nu}$ 70 limita inferioară a zonei rugoase pentru $V_* = \frac{k}{\nu}$
360	2010378	0,020	284310	Rugosă	8,49 8,50 8,54	0,01961 0,01956 0,02040	0,0196	0,656	0,567	99,5	0,023	656	$\delta' = \frac{33D}{Re\sqrt{\lambda}}$

Aceeași conductă poate lucra în funcție de debit în toate zonele turbulenței. Se observă că pentru zona netedă  $\delta' \sim 10k$ , pentru zona de tranziție  $\delta' \sim k$ , iar pentru zona rugoasă  $\delta' \sim k/10$ . Diagrama lui Moody este deosebit de precisă în special pentru zona turbulenței de tranziție și rugoase însă dă valori cu 12% mai mari pentru zona netedă decât relațiile. La soluționarea relațiilor implicite pentru  $\lambda$  s-a folosit o metodă numerică iterativă.

Calculând numărul  $Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0,99 \cdot 0,3}{1,14 \cdot 10^{-3}} = 260526$ , cu ajutorul lui

$\lambda = 0,031$ , din diagrama Moody se stabilește aproximativ  $\frac{k}{D} = -0,005$  sau

$k \sim 1,5 \text{ mm}$ , respectiv, că mișcarea se situează la începutul zonei rugoase. Din relația Prandtl-Nikuradse (8.49) rezultă

$$k = \frac{3,72 \cdot D}{10^{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}}} = \frac{3,72 \cdot 0,3}{10^{\frac{1}{2\sqrt{0,031}}}} = 1,61 \cdot 10^{-3} = 1,61 \text{ mm}$$

**8.3.** Să se determine pierderea de sarcină pe o conductă ce leagă două rezervoare (fig. 8.12), cunoscând elementele geometrice de pe figură, debitul  $Q=4 \text{ l/s}$ ,  $\nu=1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  și că toate pierderile locale iau naștere total și independent.

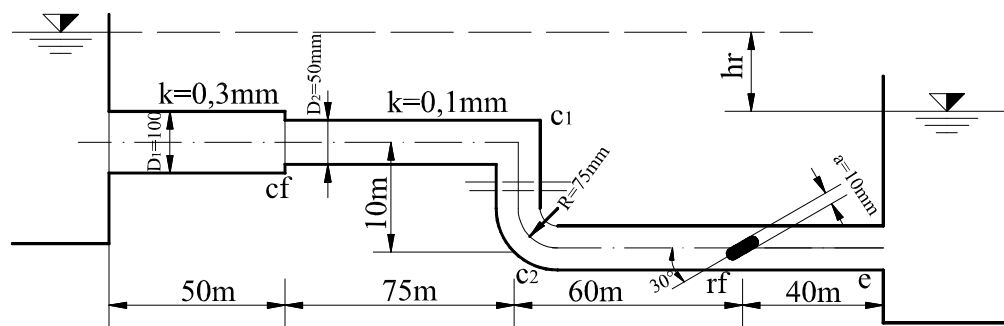


Fig. 8.12.

**Rezolvare:** Pe conductă iau naștere pierderi liniare și locale la intrare, reducere, cot brusc, cot după rază la curbura, robinet fluture, la ieșire:

$$hr = \left( \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \zeta_i \right) \frac{V_1^2}{2g} + \left( \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} + \zeta_{cf} + \zeta_{c1} + \zeta_{c2} + \zeta_{rf} + \zeta_e \right) \frac{V_2^2}{2g}$$

Se determină vitezele și numerele  $Re$  pe sectoare

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,040}{\pi \cdot 0,1^2} = 0,509 \text{ m/s}; \quad Re_1 = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{0,509 \cdot 0,1}{1,14 \cdot 10^{-6}} = 44675$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,040}{\pi \cdot 0,05^2} = 2,037; Re_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = \frac{2,037 \cdot 0,05}{1,14 \cdot 10^{-6}} = 89350$$

Pe ambele sectoare mișcarea este turbulentă. Se determină rugozitatea relativă și din graficul Moody  $\lambda$ , zona de lucru, iar din figură lungimile aferente diametrelor.

$$\frac{k_1}{D_1} = \frac{0,3}{100} = 0,003; \lambda_1 = 0,0295; \text{turbulența de tranziție}; l_1 = 50\text{m}$$

$$\frac{k_2}{D_2} = \frac{0,1}{50} = 0,002; \lambda_2 = 0,0257; \text{turbulența la tranziție}; l_2 = 185\text{m}.$$

Coeficienții pierderilor locale sunt:

-la intrare  $\zeta_i = 0.5$

$$\text{-la confuzor } \zeta_{cf} = 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right) \right]^2 = 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{0,05}{0,1} \right) \right]^2 = 0,281$$

$$\text{-la cot brusc } \zeta_{c1} = 0,95 \sin^2 \left( \frac{90}{2} \right) + 2,05 \sin^4 \left( \frac{90}{2} \right) = 0,988$$

$$\text{-la cot cu raza de curbura } \zeta_{c2} = \frac{90}{90} \left[ 0,13 + 0,16 \left( \frac{0,05}{0,075} \right)^{3,5} \right] = 0,169$$

-la robinet future  $\zeta_{rf} = 4,0$

-la iesire  $\zeta_e = 1,0$

Înlocuind rezultă:

$$h_r = (0,0295 \frac{50}{0,1} + 0,5) \cdot \frac{0,509^2}{2 \cdot 9,81} + (0,0257 \frac{187}{0,05} + 0,281 + 0,988 + 0,169 + 4 + 1) \frac{2,037^2}{2 \cdot 9,81} = 21,67\text{mCA}$$

**8.4.** O bilă din fier ( $\rho_f = 7,8\text{kg} / \text{dm}^3$ ), cu  $d = 10\text{mm}$ , cade liber într-un ulei ( $\rho_u = 890\text{kg} / \text{m}^3$ ) cu viteză uniformă  $V = 20\text{cm} / \text{s}$ . Să se determine coeficientul de vâscozitate a uleiului.

**Rezolvare:** Se presupune valabilă relația lui Stokes privind rezistența la înaintare. Forța de rezistență la înaintare echilibrează greutatea bilei când mișcarea devine uniformă, deci:

$$R = G = \rho_f \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 = 7800 \cdot 9,81 \cdot \frac{4}{3} \pi \left( \frac{0,01}{2} \right)^3 = 0,04006 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{R}{3\pi dV} = \frac{0,04006}{3\pi \cdot 0,01 \cdot 0,20} = 2,135 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$$

Coeficientul de vâscozitate cinematic este

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{2,135}{890} = 2,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Coeficientul de vâscozitate cinematic este

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{0,2 \cdot 0,01}{2,39 \cdot 10^{-3}} = 0,837 < 1$$

deci este valabilă legea lui Stokes, vâscozitatea fiind corect calculată.

**8.5.** Într-o conductă cu  $D=2 \text{ m}$ , care transporta debitul  $Q=7 \text{ m}^3/\text{s}$ , la intrare este plasat, normal pe axa conductei, un tub cu  $d=150 \text{ mm}$ . Să se determine forța de rezistență ce acționează asupra tubului ( $\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ ).

**Rezolvare:** La intrare în conductă se poate accepta o distribuție uniformă a vitezelor, valoric egală cu viteza medie, care este

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4,7}{\pi 2^2} = 2,228 \text{ m} / \text{s}$$

Numărul  $Re$  pentru cilindrul plasat transversal în curent rezultă

$$Re = \frac{V \cdot d}{\nu} = \frac{2,228 \cdot 0,15}{1,14 \cdot 10^{-6}} = 293158 .$$

Din fig. 8.10. rezultă pentru cilindru  $C_x = 1$ . Forța ce acționează tubul este

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho A V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 2,228^2 = 744,6 \text{ N}$$

## CAPITOLUL 9

### MIȘCĂRI PERMANENTE ÎN CONDUCTE ȘI REȚELE DE CONDUCTE SUB PRESIUNE

#### 9.1. Generalități

Conductele sub presiune formează sisteme hidraulice care servesc la transportul și distribuția lichidelor. La acest transport, de la o secțiune la alta, curentul lichid pierde o parte din energia sa datorită frecărilor (se transformă ireversibil în energie termică și acustică).

Se disting **conducte simple** (monofilare-unifilare) și **compuse-ramificate, în ochiuri** sau **mixte**. Conductele simple sunt alcătuite dintr-un singur fir, așezate sectoarele în serie. Debitul conductelor simple este constant pe întreaga lor lungime, tot debitul este în tranzit. Conductele compuse (ramificate) sunt mai complicate, în noduri debitele se despart în ramificații. Orice ramificație este alimentată dintr-o singură direcție. Rețelele inelare formează ochiuri și orice punct de pe rețea poate fi alimentat din două direcții. Rețelele mixte reprezintă o combinație între rețele inelare și ramificate, de obicei rețeaua principală este inelară, iar cea secundară ramificată. În acest mod crește siguranța în exploatare a rețelei.

Din punct de vedere al mărimii pierderilor de sarcină locală față de cele liniare se disting **conducte scurte** - la care pierderile de sarcină locale au aceeași ordine de mărime cu cele liniare - și **conducte lungi**, la care pierderile locale sunt neglijabile față de cele liniare și în calculele hidraulice deseori se neglijează, sau se consideră câteva procente din cele liniare. Pentru conducte lungi linia energetică se consideră în coincidență cu linia energetică, diferența dintre ele fiind termenul cinetic, valoric egală cu o pierdere locală având coeficient de pierdere egal cu  $\alpha$ .

Se numește **tronson** o porțiune de pe o conductă sau rețea care transportă debit constant, în tranzit. Capetele tronsonului se numesc **noduri**. Fiecare tronson poate fi echipat cu tuburi de diametre și materiale diferite pe anumite lungimi. Porțiunea din tronson caracterizată de material și diametru constant se numește sector (fig. 9.1). Sectorul făcând parte din tronson, transportă debit constant.

Pentru aceste elemente definite sunt valabile următoarele relații hidraulice și geometrice:

**1. pentru nod** - suma algebrică a debitelor în nod este nulă, sau debitele intrate și ieșite din nod sunt egale

$$\sum_k Q = 0 \text{ sau } \sum_k Q_i = \sum_k Q_e \quad (9.1)$$

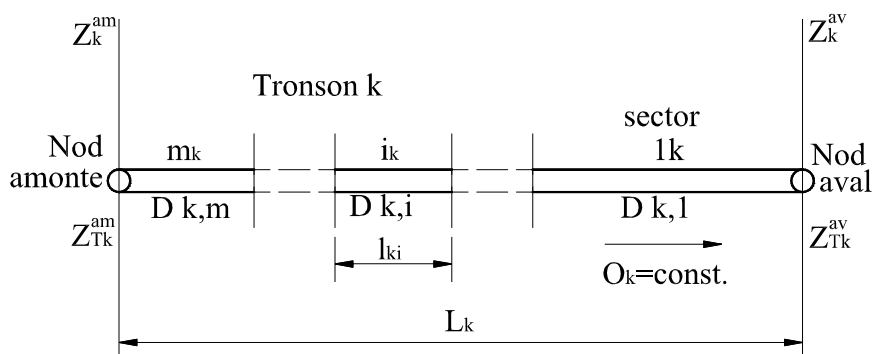


Fig. 9.1. Definirea elementelor conductelor

2. **pentru tronson** - suma lungimii sectoarelor este lungimea tronsonului.

a. *geometric*

$$\sum_k l_{k,i} = L_k \quad (9.2)$$

b. *hidraulic*

- cota piezometrică în nodul amonte este cota piezometrică din aval, la care se adaugă pierderile de sarcină

$$z_k^{am} = z_k^{av} + h r_k = z_k^{av} + \sum_k h r_{ki} \quad (9.3)$$

sau cota piezometrică în nodul aval este cota piezometrică din nodul amonte din care se scad pierderile de pe tronson

$$z_k^{av} = z_k^{am} - h r_k = z_k^{am} - \sum_k h r_{ki} \quad (9.4)$$

- presiunea disponibilă în nod este diferența între cota piezometrică și cota terenului

$$\frac{p_k^{am}}{\gamma} = z_k^{am} - z_{Tk}^{am} \quad (9.5)$$



În privința calculului hidraulic diferența între conducte lungi și scurte se referă la eroarea admisă prin neglijarea pierderilor locale la conducte lungi. Este corect a se calcula o conductă lungă ca una scurtă din punct de vedere hidraulic însă este afectat timpul necesar efectuării calculelor. De obicei se admite o toleranță relativă a pierderilor de sarcină  $\delta h_r = 2\%$ . Astfel când pierderile locale reprezintă mai mult de 2% din cele liniare conducta trebuie calculată ca o conductă scurtă.

### 9.1.1. Principii și probleme generale ale calculului conductelor sub presiune

Deși în majoritatea cazurilor mișcarea lichidelor în sisteme hidraulice închise are loc în regimul turbulent, întâi se determină regimul de mișcare, apoi zona de lucru (în cazul regimului turbulent).

Se impune de asemenea aprecierea conținutului de gaze și material solid (în suspensie sau târât) existent în lichid. În cele ce urmează se consideră că lichidul conține gaze și material solid în cantități neglijabile (în caz contrar fluidul trebuie considerat bifazic sau polifazic).

Pentru mișcarea permanentă densitatea și vâscozitatea lichidului se consideră constante cunoscute pentru temperatura cea mai nefavorabilă de lucru în exploatare.

Se neglijează pentru lichide compresibilitatea.

Principalele relații ce stau la baza calculelor sunt:

- ecuația de continuitate pentru ipotezele de calcul considerate;
- ecuația energiei (Bernoulli) pentru lichide newtoniene sau reale;
- ecuația teoremei impulsului și momentului cinetic;
- ecuația puterii curenților;
- relații de calcul pentru pierderi de sarcină.

Distribuția presiunii în secțiunea transversală a conductelor este după legea hidrostaticii și în majoritatea cazurilor se poate considera în axa conductei.

Termenul cinetic, calculat cu viteza medie, se corectează cu coeficientul Coriolis, corespunzător regimului de mișcare și gradului de turbulență.

Mișcarea lichidelor în conducte este o mișcare unidimensională a curenților în tubul de curent mărginit de perete solid.

Diversitatea problemelor practice uneori conduce la nedeterminare matematică; în aceste cazuri relațiile de tip hidraulic se completează cu condiții din alt domeniu tehnic, funcțional sau economic.

Diferite relații implicite, sau pentru care nu se cunosc rezolvări matematice exacte, se soluționează prin diferite metode numerice, aproximări, simulări etc.

În calculele hidraulice se întâlnesc două mari categorii de probleme: de **verificare și de dimensionare**.

### **1. Probleme de verificare ale sistemelor hidraulice închise**

La această categorie de probleme se cunosc elementele geometrice ale sistemului hidraulic (lungimi, diametre), materialul conductei, starea suprafeței de contact pe sectoare și configurația terenului. Se mai cunosc unele mărimi hidraulice și se calculează cele necunoscute. Problemele de verificare diferă în funcție de parametrul hidraulic necunoscut, încadrându-se în următoarele categorii:

- a) se cunoaște valoarea energiei specifice în secțiunile de comandă (capetele rețelei sau într-unul din capete și în nod) și se urmărește calculul debitului posibil de transportat în condițiile date;
- b) se cunoaște debitul transportat și presiunea într-un punct (nod de capăt sau intermediar) și se calculează în nodurile, punctele de interes presiunea disponibilă.

Ambele categorii de probleme apelează la calculul pierderilor de sarcină. Deseori se reprezintă grafic sintetic sistemul hidraulic (interpretare geometrică a ecuației energiei) împreună cu linia terenului, linia energetică și piezometrică, aceasta dând o imagine de ansamblu asupra funcționalității sistemului.

**2. Problema de dimensionare** constă în stabilirea diametrelor, eventual a lungimii sectoarelor cu diametrul aferent și a materialului conductei. Se cunoaște configurația rețelei, eventual debitele pe tronsoane, presiunile necesare. O economie produce de obicei materialul tubular standardizat însă același diametru se găsește din diferite materiale și calități ale peretelui. Astfel o rețea poate fi echipată într-o infinitate de soluții, care răspund condițiilor tehnice impuse. Numărul necunoscutelor este superior numărului de ecuații posibile de scris. Unele condiții tehnice se exprimă prin inegalități, ceea ce complică și mai mult problema dimensionării. Se apelează la condiții tehnice, funcționale și economice suplimentare. Condițiile economice pot constitui funcția de obiectivizare a problemei la utilizarea unei metode de optimizare.

## **9.2. Calculul hidraulic al conductelor scurte, monofilare**

Calculul hidraulic al conductelor scurte monofilare se reduce la aplicarea ecuației energiei între două secțiuni de control, luând în considerare pierderile de sarcină liniare și locale. Se mai apelează la ecuația de continuitate, iar la calculul pierderilor de sarcină se ține seama de principiul compunerii pierderilor. De obicei se consideră că pierderile locale nu se influențează reciproc, calculele fiind acoperitoare tehnic.

Se consideră o conductă scurtă din " $n$ " sectoare, fiecare având caracteristicile  $D_i$ ,  $l_i$ ,  $\lambda_i$  și pe fiecare sector există " $m$ " singularități, cu coeficienți  $\zeta_j$  (fig. 9.2).

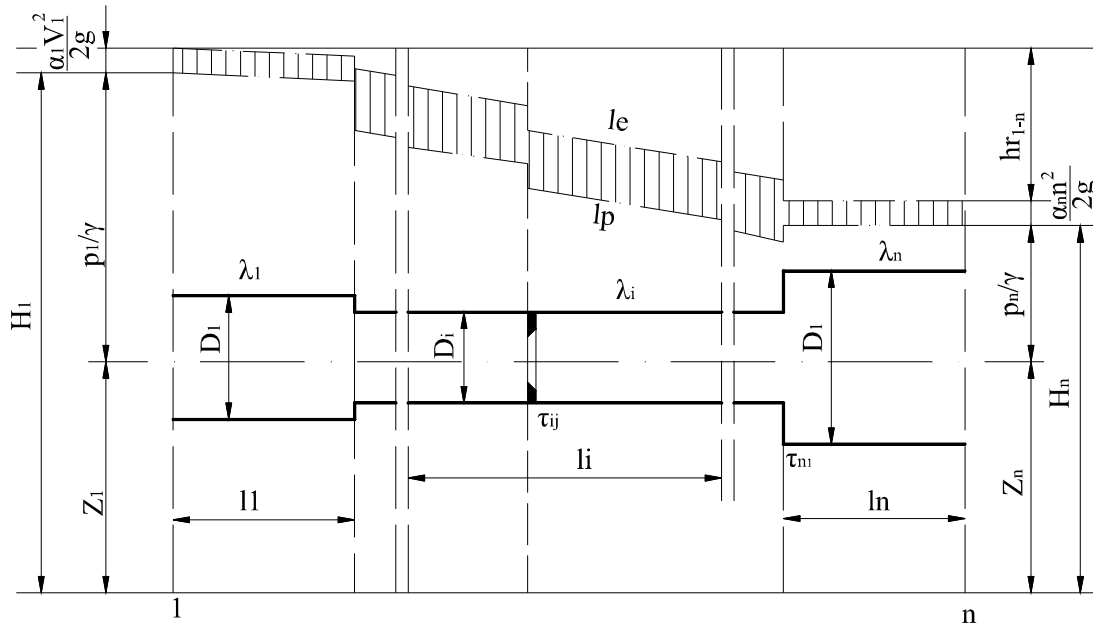


Fig. 9.2. Schema conductei scurte

Ecuția lui Bernoulli între secțiunile 1-n, mișcarea permanentă și lichid real, este

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_n V_n^2}{2g} + \frac{p_n}{\gamma} + z_n + hr_{1-n} \quad (9.5)$$

Termenul definit prin

$$H^* = H_1 - H_n = \frac{p_1 - p_n}{\gamma} + z_1 - z_n = \frac{\alpha_n V_n^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + hr_{1-n} \quad (9.6)$$

este **sarcina sistemului**. Pierderile de sarcină sunt:

$$hr_{1-n} = \sum_{i=1}^n hr_i = \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_i \frac{l_i}{D_i} + \sum_{j=1}^m \zeta_j \right] \frac{V_i^2}{2g} \quad (9.7)$$

Viteza de pe sectorul " i " se exprimă în funcție de viteza de pe ultimul sector, pe baza ecuației de continuitate:

$$V_i = \frac{A_n}{A_i} V_n \quad (9.8)$$

pierderile putând fi scrise

$$hr_{1-n} = \frac{V_n^2}{2g} \sum_1^n \left[ \lambda_i \frac{l_i}{D_i} + \sum_1^m \zeta_i \right] \left( \frac{A_n^2}{A_i} \right) = \zeta^* \frac{V_n^2}{2g} \quad (9.9)$$

unde

$$\zeta^* = \sum_1^n \left[ \lambda_i \frac{l_i}{D_i} + \sum_1^m \zeta_i \right] \left( \frac{A_n}{A_i} \right)^2 \quad (9.10)$$

este **coeficientul de rezistență redus**. Ecuația (9.6) se mai poate scrie

$$H^* = \frac{\alpha_n V_n^2}{2g} - \alpha_1 \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2 \frac{V_n^2}{2g} + \zeta^* \frac{V_n^2}{2g} = \left[ \alpha_n - \alpha_1 \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2 + \zeta^* \right] \frac{V_n^2}{2g} \quad (9.11)$$

sau

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n - \alpha_1 \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2 + \zeta^*}} \sqrt{2g H^*} = \varphi \sqrt{2g H^*} \quad (9.12)$$

în care:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n - \alpha_1 \left( \frac{A_n}{A_i} \right)^2 + \zeta^*}} \quad (9.13)$$

este **coeficient de viteză**. Debitul va fi:

$$Q = A_n \cdot V_n = \varphi A_n \sqrt{2g \cdot H} \quad (9.14)$$

Se poate exprima sarcina sistemului sub forma:

$$H^* = \frac{1}{2g\varphi^2 A_n^2} Q^2 = M_e Q^2 \quad (9.15)$$

unde:

$$M_e = \frac{1}{2g\varphi^2 A_n^2} \quad (9.16)$$

reprezintă **modulul de rezistență echivalent** al conductei scurte.

Dacă conducta scurtă transportă debitul între două rezervoare în care vitezele se pot neglija,  $H^* = hr$ . Exprimarea, în acest caz, a sarcinii amonte în funcție de cea aval și pierderi (fig. 9.3. a)

$$H_1 = H_n + hr(Q) \quad (9.17)$$

sau a sarcinii aval în funcție de cea amonte și pierderi (fig. 9.3. b)

$$H_1 = H_n - hr(Q) \quad (9.17')$$

sau în formă grafică în planul figurativ Q-H, reprezintă **caracteristica conductei scurte**.

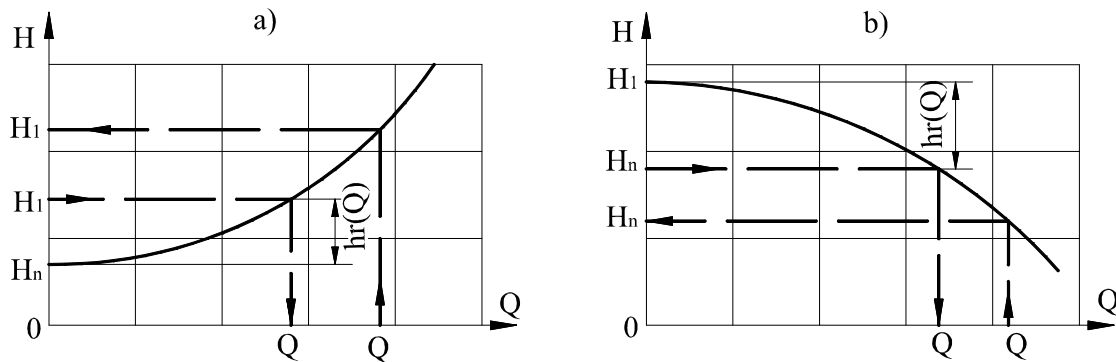


Fig. 9.3. Caracteristica conductei scurte

Cu cele prezentate se pot verifica și chiar dimensiona conductele scurte.

Conductele scurte monofilare pot fi privite conducte de aspirație și refulare (uneori) a pompelor, conducte ale golirilor de fund ale barajelor, conducte în sifon (ridicător sau coborâtor), podețe care funcționează sub

presiune ș.a. În continuare se dau câteva exemple de calcul ale conductelor scurte.

### 9.2.1. Calculul hidraulic al conductelor de aspirație

Se consideră o conductă de aspirație cu elementele geometrice și componente dată în fig. 9.4

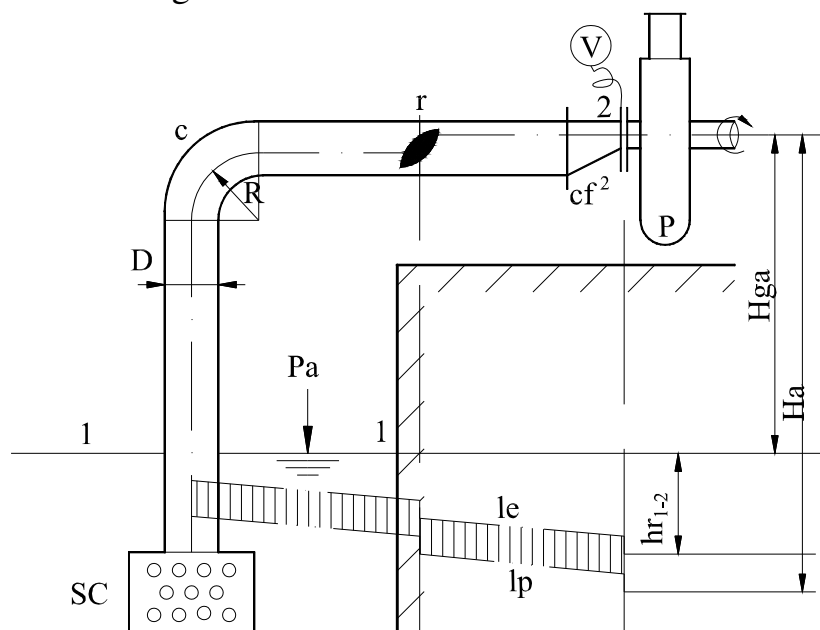


Fig. 9.4. Schema conductei de aspirație, cf-confuzor asimetric; r-robotet fluture; c-cot; sc-sorb cu clapet

Condițiile care trebuiesc îndeplinite pentru funcționarea pompei sunt:

- conducta de aspirație să fie plină cu lichid;
- în punctul cel mai nefavorabil (intrarea în pompă) presiunea să nu scadă sub valoarea presiunii de vaporizare.

**1. Problema de verificare.** Pentru elementele geometrice ale liniei de aspirație, debit și caracteristici ale lichidului (densitate, presiune de vaporizare) cunoscute, se pune problema dacă instalația funcționează.

Punctul cel mai nefavorabil este în secțiunea 2, unde presiunea are valoare minimă și rezultă din ecuația energiei, scrisă între secțiunile 1 și 2. În secțiunea 1 se neglijează viteza, iar presiunea este cea atmosferică. Se ia ca plan de referință secțiunea 1-1, rezultând;

$$\frac{p_a}{\gamma} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + H_{\gamma a} + hr_{1-2}$$

unde

$$hr_{1-2} = \left( \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{sc} + \zeta_c + \zeta_r + \zeta_{cf} \right) \frac{V_2^2}{2g} = \zeta^* \frac{V_2^2}{2g} \quad (9.18)$$

Viteza rezultă din continuitate  $V_2 = \frac{4Q}{\pi D^2}$ , obținându-se

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} - H_{\gamma a} - (\alpha_2 + \zeta^*) \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \quad (9.19)$$

Comparând  $p_2$  cu  $p_{vap}$  rezultă posibilitatea de funcționare a pompei.

Se poate pune întrebarea: până la ce debit poate funcționa instalația. Pentru acesta în (9.19)  $p_2$  se înlocuiește cu  $p_{vap}$ , rezultând  $Q$ . Dacă conducta nu lucrează în zona turbulenței rugoase calculul este iterativ fiindcă  $\lambda(Re)$  conține  $Q$ . Întâi se consideră că zona de lucru este rugoasă și se determină  $Q$  în prima aproximare, cu care la rândul său se revede valoarea lui  $\lambda$ , rezultând un nou  $Q$ . Calculul iterativ se continuă până la obținerea preciziei dorite.

**2. Problema de dimensionare** constă în determinarea diametrului conductei când debitul,  $p_{vap}$ ,  $\rho$ , înălțime geodezică de aspirație, elementele componente și materialul conductei sunt cunoscute. Pentru curgere în zona turbulenței rugoase se apreciază o valoare pentru  $\lambda$  și coeficienții pierderilor locale. Aceste valori sunt aproximative, însă cunoscute, se poate determina din (9.19) un diametru aproximativ. Cu acest diametru aproximat se poate calcula  $Re, \frac{k}{D}$  și valorile

coeficienților  $\zeta$  mai precis, rezultând tot din (9.19) un nou diametru. Operațiunea de iterație se repetă până când diametrul rezultat la iterația " $i$ " nu diferă de cel rezultat la iterația  $i-1$  mai mult decât toleranța impusă calculelor. Dacă diametrul rezultat se încadrează pe domeniul țevelor standardizate se alege diametrul imediat superior diametrului rezultat și se refac calculele de verificarea diametrului standardizat. Conducta astfel este supradimensionată, pierderile de sarcină fiind inferioare celor admise, respectiv presiunea de intrare în pompă fiind mai mare decât cea de vaporizare. Conductele de aspirație pentru apă caldă se proiectează cu înălțime de aspirație negativă, (nivelul din rezervor deasupra axului pompei) pentru a preveni ruperea coloanei de lichid.

### 9.2.2. Calculul hidraulic al golirii de fund al unui lac de acumulare

Golirile de fund ale lacurilor de acumulare de obicei sunt încorporate în baraje și, din punct de vedere hidraulic, reprezintă niște conducte scurte (fig. 9.5).

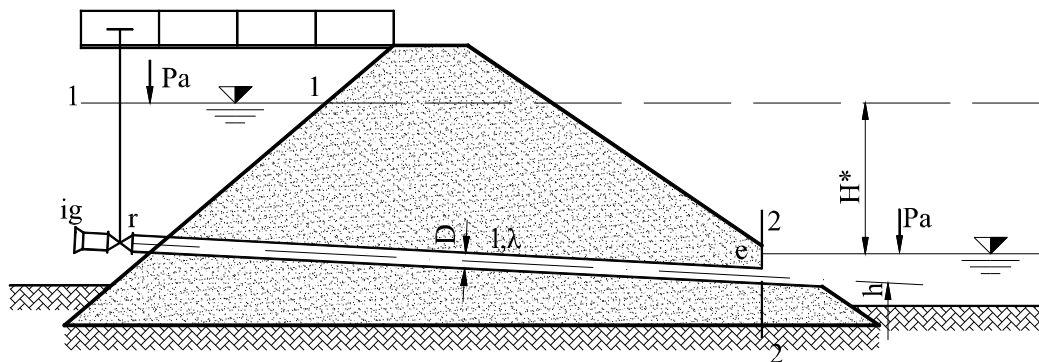


Fig. 9.5. Schema golirii de fund la un baraj: ig - intrare cu grătar, r - robinet, e - ieșire

Diferența de nivel sub care are loc curgerea  $H^*$  este sarcina sistemului și fiind vorba de secțiuni de comandă cu nivel liber este suma pierderilor de sarcină. Este cunoscut  $H^*$ ,  $h$ , lungimea și materialul conductei, respectiv singularitățile de pe conductă și caracteristicile fizice ale apei.

**1. Problema de verificare** presupune toate elementele geometrice cunoscute, urmând a se calcula debitul tranzitat. Se scrie ecuația energiei între secțiunile 1 și 2. În ambele biefuri la nivel liber avem presiunea atmosferică, iar în secțiunea 1 se poate neglija viteza. Față de planul de referință orizontal ce trece în centrul secțiunii 2 se poate scrie

$$H^* = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{\gamma h}{\gamma} - h + h r_{1-2} = \frac{V_2^2}{2g} (\alpha_2 + \zeta^*)$$

unde

$$\zeta^* = \frac{\lambda l}{D} + \zeta_{ig} + \zeta_r + \zeta_e$$

Calculul debitului este iterativ, la prima aproximare se admite  $\lambda$  pentru zona turbulenței rugoase, corespunzător lui  $\frac{k}{D}$ . Înlocuind viteza din ecuația de continuitate, se obține



$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g H^*}{\alpha_2 + \zeta^*}} \quad (9.20)$$

Cu debitul obținut se determină viteza,  $Re$  și valoarea  $\zeta^*$ , la a doua iterație, rezultând un nou debit. Calculele iterative se continuă până când la două iterații consecutive diferența debitelor rezultate se încadrează în toleranța preimpusă. Se mai poate pune problema: ce deschidere trebuie să aibă robinetul pentru evacuarea unui debit  $Q$ . La elemente geometrice și  $H^*$  date rezultă un

$\zeta^*$  necesar care, pe lângă coeficienții de pierdere constanți  $\left( \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{ig} + \zeta_e \right)$  conține  $\zeta_r$  al cărei valoare se calculează. Din dependența  $\zeta_r \left( \frac{a}{D} \right)$  rezultă (v.cap.8) gradul de deschidere al robinetului.

Tot pe baza relației (9.20) se pot construi curbele debitelor descărcate la  $H^*$  și grad de deschidere diferit al robinetului:

$$Q = Q \left( H^*, \frac{a}{D} \right) \quad (9.21)$$

a cărei reprezentare grafică este **cheia debitelor**.

**2. Problema de dimensionare.** Golirea de fund poate fi realizată prin una sau mai multe fire, care la  $H^*$  dat trebuie să evacueze debitul total impus funcțional. Debitul unui fir este  $Q$ . Ecuația (9.20) conține diametrul inclusiv în  $\zeta^*$ . Pentru robinet complet deschis și caracteristici ale armăturilor cunoscute, diametrul este conținut în  $A$  și  $\zeta_{lin}$ . Se acceptă pentru prima aproximare un  $\lambda$  caracteristic zonei rugoase oarecare (însă verosimil), întrucât  $\frac{k}{D}$  nu se poate aprecia. Prin soluționarea în  $D$  a ecuației (9.20) rezultă un diametru în primă aproximare. Cu aceasta se determină  $V$ ,  $Re$ ,  $\frac{k}{D}$ ,  $k$  și  $\zeta_1$ , rezultând o nouă valoare pentru  $D$ .

Iterațiile se continuă până când diferența diametrelor a două iterații consecutive satisface condiția de toleranță. Diametrul conductei de golire va fi diametrul standardizat imediat următor diametrului rezultat, sau un diametru rotunjit superior la o valoare fixă diametrului rezultat. Cu diametrul standardizat sau rotunjit se refac calculele de verificare după pct. 1.

### 9.2.3. Calculul hidraulic al sifoanelor ridicătoare

Sifonul ridicător este o conductă scurtă prin care lichidul se mișcă gravitațional dintr-un rezervor superior I într-un alt rezervor inferior II, între nivelurile din rezervoare existând o diferență de cota  $H^*$ . Particularitatea sifonului este, că pe traseul său există o porțiune situată deasupra nivelului din rezervorul I (fig. 9.6). Pentru funcționare sifonul ridicător trebuie să îndeplinească două condiții:

- să fie plin cu lichid și
- în punctul cel mai nefavorabil presiunea să fie superioară presiunii de vaporizare (la presiunea de vaporizare prin evaporarea lichidului se "rupe" coloana de lichid, ne mai fiind satisfăcută prima condiție).

În cazul de față punctul cel mai nefavorabil corespunde punctului  $M$ , deci  $p_M \geq p_{vap}$ . Problema de verificare și de dimensionare prezintă aceleași aspecte ca și în cazurile precedente.

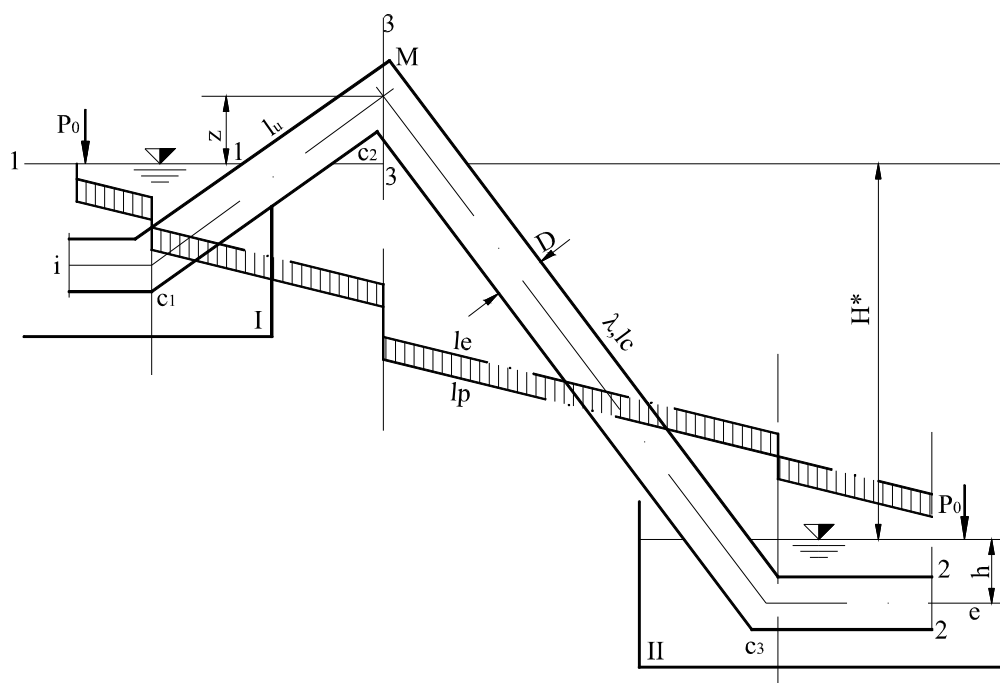


Fig. 9.6. Sifonul ridicător

Pentru un sifon dat, debitul rezultă din ecuația energiei, scrisă între secțiunile 1 și 2, plan de referință fiind nivelul din rezervorul II. În secțiunea 1 se neglijează viteza, iar la suprafața liberă din cele două rezervoare presiunea este cea atmosferică, deci

$$H^* = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{\gamma h}{\gamma} - h + h r_{1-2} = (\alpha_2 + \zeta^*) \frac{V_2^2}{2g}$$

unde

$$\zeta^* = \lambda \frac{l_u + l_c}{D} + \zeta_i + \zeta_{c1} + \zeta_{c2} + \zeta_{c3} + \zeta_e$$

Exprimând viteza  $V_2$  de mai sus și înlocuind în ecuația de continuitate se obține

$$Q = \frac{\pi_0 D^2}{4\sqrt{\alpha_2 + \zeta^*}} \sqrt{2gH^*} \quad (9.22)$$

Condiția de funcționalitate a sifonului rezultă tot din ecuația energiei, scrisă între secțiunea 1 și 3, față de planul lichidului din rezervorul I, din care rezultă apoi  $p_M$ .

$$\frac{P_a}{\gamma} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + Z + h r_{1-3} = (\alpha_2 + \zeta_{1-3}^*) \frac{V_2^2}{2g} + Z + \frac{P_3}{\gamma}$$

sau

$$\frac{P_M}{\gamma} = \frac{P_3}{\gamma} - \frac{D}{2} = \frac{P_a}{\gamma} - Z - \frac{D}{2} - (\alpha_2 + \zeta_{1-3}^*) \frac{V_2^2}{2g} \quad (9.23)$$

unde

$$\zeta_{1-3}^* = \lambda \frac{lu}{D} + \zeta_i + \zeta_{c1} + \zeta_{c2}$$

Când  $P_M > P_{vap}$  sifonul funcționează.

Sifonul urcător se utilizează deseori în tehnică pentru "transbordare" de lichide între rezervoare. Un caz special reprezintă capătul aval al conductelor de refulare cu diametre mari, unde sifonul conlucrează practic cu instalațiile de pompare. Nu este recomandată utilizarea sifoanelor cu înălțimea secțiunii  $M$  de peste  $1m$ , datorită imposibilității evacuării complete a aerului din sifon. În jurul secțiunii  $M$  fiind presiune vacuumetrică aerul absorbit de lichid se eliberează continuu și la diametre de peste  $1m$  nu este antrenat în aval.

La sifoane cu gabarit mic, umplerea sifoanelor este operațiunea de "amorsare", ori prin cufundarea lor în lichid în poziție orizontală, ori prin

vidarea lor la ramura coborâtore. La sifoane cu gabarit mare se prevede robinet aproape de evacuare, care în timpul amorsării este închis. Se vedează în punctul  $M$  până ce tot sifonul este plin cu lichid, apoi, ulterior se deschide lent robinetul din aval (lent pentru prevenirea vibrațiilor la intrarea mișcării în regim permanent).

#### 9.2.4. Calculul hidraulic al conductelor aferente instalațiilor de pompare

Conductele de pompare sunt aferente instalațiilor de pompare și au rolul de a transporta un debit de lichid  $Q$ , de la o cotă inferioară la una superioară (se presupune între două rezervoare) (fig. 9.7). Diferența de cote geodezice între rezervoare poartă numele de înălțime geodezică de pompare (ridicare)  $Hg$  și are două componente: înălțimea geodezică de aspirație ( $Hg_a$ ) și înălțimea geodezică de refulare ( $Hg_r$ ).

$$Hg = Hg_a + Hg_r \quad (9.24)$$

Uneori conducta de aspirație, ca și înălțimea geodezică de aspirație pot lipsi (la pompe submersibile).

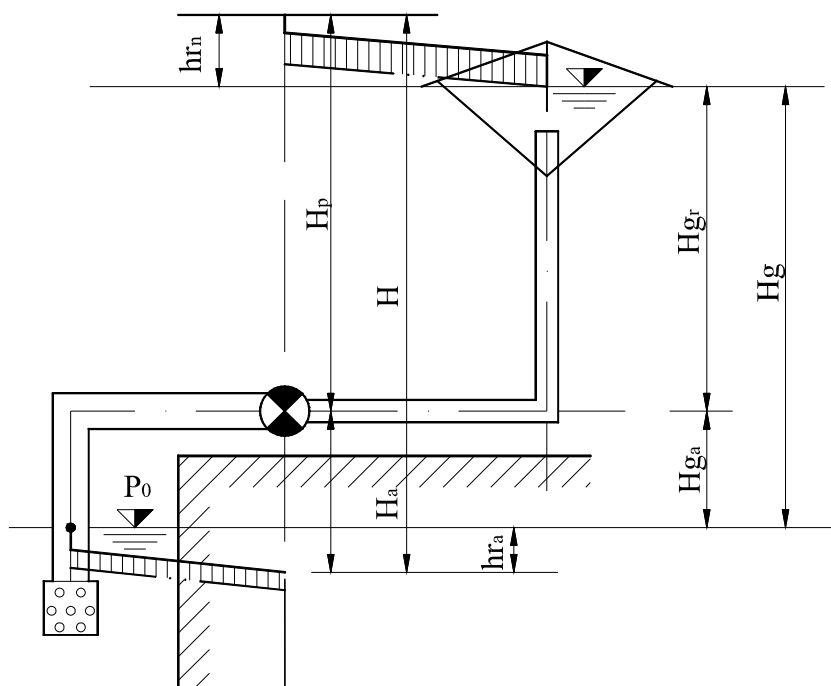


Fig. 9.7. Instalație de pompare

Pierderile de sarcină sunt:

$$hr(Q) = hr_a(Q) + hr_r(Q) \quad (9.25)$$

înălțimea totală de ridicare va fi

$$H(Q) = H_g + hr(Q) \quad (9.26)$$

ecuație ce se numește caracteristica externă a instalației de pompare. Calculul pierderilor de sarcină este asemănător cazurilor prezentate anterior. Debitul pompat se obține prin intersecția caracteristicii externe cu caracteristica internă

$$H_p = H_p(Q) \quad (9.27)$$

Soluționarea poate fi analitică dacă (9.27) are formă analitică, sau grafică dacă (9.27) este sub acesta formă. La soluționarea grafică se calculează (9.26) pentru câteva debite, ținând seama de modul de calcul al pierderilor de sarcină; reprezentarea grafică are forma din fig. 9.8. Pe grafic s-a reprezentat și curba de randament energetic al agregatului de pompare. Intersecția caracteristicii interne cu cea externă, în planul figurativ  $Q$ - $H$ , dă punctul de funcționare, care trebuie să se situeze în domeniul randamentelor maxime.

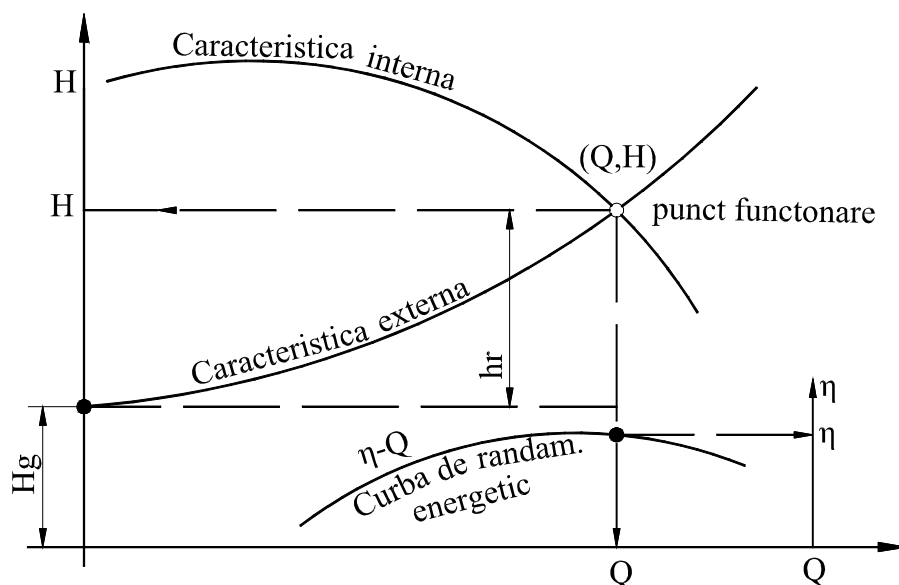


Fig. 9.8. Soluția grafică a calculului hidraulic de conlucrare pompă conducte de aspirație-refulare

### 9.3. Calculul hidraulic al conductelor lungi

Calculul hidraulic al conductelor lungi se reduce la calculul pierderilor de sarcină liniare, întrucât se neglijează pierderile locale și termenul cinetic. Aceste pierderi se determină în ipotezele de verificare, respectiv de dimensionare a conductelor.

Conducte lungi sunt privite conductele monofilare înseriate, conducte în paralel, conducte ramificate, conducte cu debit uniform distribuit, conducte care distribuie debite constante la echidistanță etc. Tot în acest subcapitol se pune problema calculului economic al conductelor simple.

#### 9.3.1. Calculul hidraulic al conductelor lungi în serie

Se consideră " $n$ " sectoare de conducte lungi înseriate prin care se tranzitează debitul  $Q$ . Conductele lungi înseriate de fapt reprezintă un tronson, însă sectoarele sunt privite conducte lungi (fig. 9.9). Sarcina sistemului este "consumată" pentru învingerea frecărilor, a pierderilor distribuite.

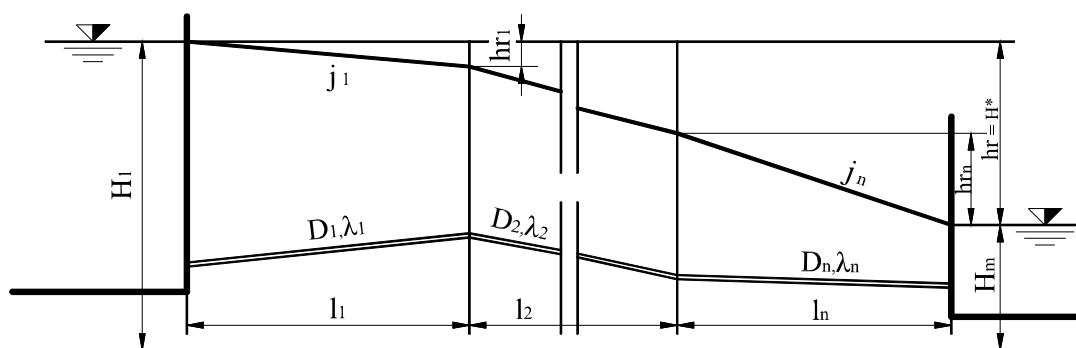


Fig. 9.9. Conducte lungi în serie

Se poate scrie

$$H = \sum_1^n hr_i = 0,0826 Q^2 \sum_1^n \frac{\lambda_i l_i}{D_i} = \sum_1^n j_i l_i = Q^2 \sum_1^n \frac{l_i}{K^2} = Q^2 \sum_1^n M_i \quad (9.82)$$

Calcululele diferă în funcție de problematica pusă: de verificare sau de dimensionare.

**1. Problema de verificare** constă în determinarea debitului transportat la sarcina sistemului dată sau a sarcinii sistemului, când debitul este dat. Bineînțeles, se cunosc caracteristicile geometrice ale conductelor înseriate.

a) La determinarea sarcinii sistemului (sau  $H_I$  sau  $H_n$ ) pentru debit cunoscut, practic se calculează pierderile liniare pentru fiecare sector, acordând atenție stabilirii coeficientului  $\lambda$ .

b) Când sarcina sistemului și elementele geometrice ale conductei sunt date, calculul debitului necesită aproximări succesive. La prima iterație se acceptă  $\lambda_i$  pentru zona turbulenței rugoase, rezultând din (9.28) debitul. Cu valoarea debitului se reanalizează coeficienții  $\lambda_i$ , sau altă formă de exprimare a lor, tot din (9.28), rezultând noul debit. Iterațiile se repetă până când diferența debitelor de la două iterații succesive se încadrează în toleranță.

Când conducta în serie este compusă din două sectoare și se cunoaște  $H^*$ , respectiv  $H_1$  și  $H_2$ , calculul debitului poate fi făcut prin intersecția caracteristicii sectorului 1 și 2, analitic sau grafic (fig. 9.10), se poate scrie:

$$\begin{cases} H_I = H_2 + hr_2(Q) \\ H_I = H_1 - hr_1(Q) \end{cases} \quad (9.29)$$

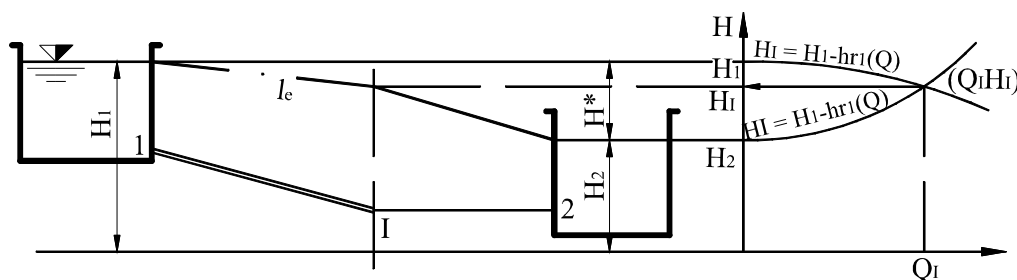


Fig. 9.10 Soluția grafică a conductelor înseriate

Dând valori debitului  $Q$ , unic ambelor sectoare, se reprezintă în planul figurativ funcțiile (9.29). Intersecția lor corespunde punctului de coordonate  $(Q_I, H_I)$ , care reprezintă practic debitul conductei și sarcina în punctul de branșament a celor două sectoare.

**2. Dimensionarea** conductelor înseriate pentru transportul debitului  $Q$ , la distanța  $L$ , sub sarcina sistemului  $H^*$  este o problemă matematic nedeterminată. Există o infinitate de soluții pentru echiparea tronsonului pe sectoare cu materiale de conductă, diametre și lungimi aferente care să satisfacă condițiile impuse. Dacă se intervine cu o condiție de optimizare economică - investiție minimă, cost total anual minim - calculul devine o problemă de programare liniară, ușor soluționabilă cu programe de bibliotecă existente în centre de calcul. Mărimilor hidraulice pot fi impuse limitări referitoare la viteze și presiuni. Acesta problemă se va trata în

complex în cadrul paragrafului rețele ramificate, conducta în serie fiind un tronson al rețelei.

Când conducta se realizează din unul sau două diametre calculele sunt matematic determinate. Diametrul fiind necunoscut se acceptă o valoare inițială verosimilă pentru  $\lambda$  (sau  $K$ ,  $M$ ), rezultând din (9.28) o valoare pentru diametru. Diametrele fiind standardizate până la  $Dn = 1500mm$ , se poate accepta diametrul standardizat imediat superior valorii rezultate pentru  $hr$ , care poate să fie inferioară lui  $H^*$  dat.

Mai corectă este acceptarea realizării conductei, în condițiile date, din două sectoare, unul având diametrul imediat superior diametrului rezultat, celălalt diametru standard imediat inferior. Pentru cele două diametre și material se

determină la  $Q$  dat,  $\lambda$ , respectiv  $j = \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2g}$  și se scrie sistemul:

$$\begin{cases} j_1 l_1 + j_2 l_2 = H^* \\ l_1 + l_2 = L \end{cases}, \quad (9.30)$$

din care rezultă lungimea fiecărui sector, aferent diametrului.

**3. Funcționarea conductei lungi situată parțial deasupra liniei piezometrice.** Se consideră o conductă cu diametru uniform, legată la rezervorul  $A$  și debitând în atmosferă în  $B$  sub sarcina  $H^*$ . Punctul cel mai înalt al conductei este cu distanța " $h$ " deasupra liniei drepte care unește nivelul din rezervor cu punctul  $B$ , însă sub planul orizontal hidrostatic din rezervorul  $A$  (fig. 9.10.).

Se presupune presiunea atmosferică  $p_a$ , iar temperaturii  $\theta$  a lichidului (de greutate specifică  $\gamma$ ) îi corespunde presiunea de vaporizare  $p_v$ . Conducta, inițial considerată goală, întâi se umple până în  $M$ , apoi curge către punctul de jos  $D$  și va ieși în atmosferă în  $B$ . Dacă viteza este suficient de mare, în timp aerul de pe traseul  $MD$  este antrenat afară, în caz contrar rămâne parțial și conturbă curgerea. Presupunem că aerul este evacuat prin curgere sau printr-o pompă de vid în  $M$ .

Funcționarea poate avea loc în două situații în funcție de mărimea  $y$  și  $\frac{p_a - p_v}{\gamma}$ .



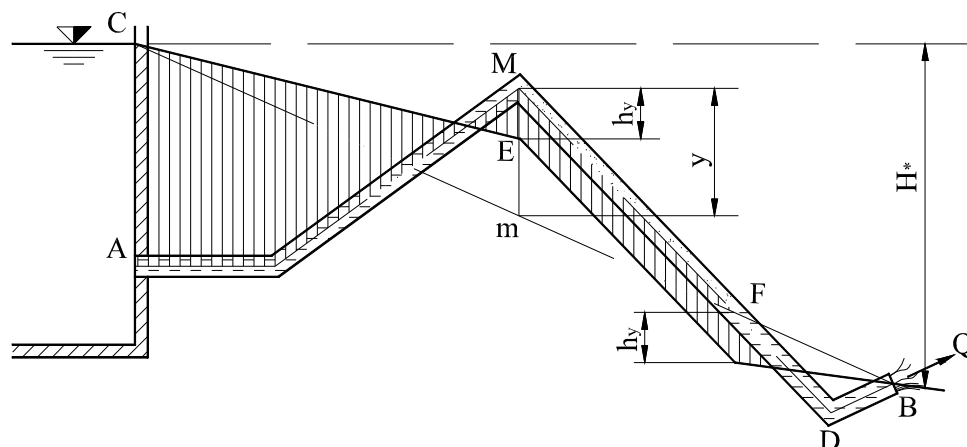


Fig. 9.10'. Conductă situată parțial deasupra liniei piezometrice

1. Nu este aer pe conductă și  $y < \frac{(p_a - p_v)}{\gamma}$ . Presupunând numai

pierderi liniare uniforme, linia energetică și piezometrică în coincidență este o linie dreaptă  $CmB$ , debitul curs fiind la fel ca și când toată conducta ar fi sub linia piezometrică.

2. Când  $y > \frac{p_a - p_v}{\gamma}$ , debitul este limitat chiar dacă tot aerul este

evacuat și linia piezometrică nu va fi o singură linie dreaptă pe toată lungimea conductei. Această linie piezometrică pe traseul  $AM$  este după

linia  $AE$  unde distanța  $ME = h_v = \frac{p_a - p_v}{\gamma}$  reprezintă presiunea de

vaporizare în vârful  $M$ . Presiunea absolută în  $M$  este presiunea de vaporizare și această presiune este constantă până în punctul  $F$ . Curgerea pe traseul  $MF$  are loc cu conducta parțial plină. Dacă se consideră pe această porțiune o curgere uniformă linia piezometrică va fi situată sub axa conductei cu cantitatea  $h_v$ , uniform. Pe distanța  $FB$  panta liniei piezometrice este aceeași ca pe  $AM$  (curgere cu secțiune plină). Din această condiție se poate determina poziția punctului  $F$ , respectiv lungimea porțiunii de conductă unde curgerea este cu secțiune parțial umplută și panta liniei piezometrice pe această porțiune fiind panta conductei.

La viteză de curgere mica aerul nu poate fi evacuat de curenți, mai mult, datorită scăderii presiunii se acumulează aer din cel eliberat din apă. Condițiile de curgere în punctul cel mai înalt se înrăutățesc și reduc mult debitul. Asigurarea curgerii necesită în acest caz evacuarea forțată a aerului

în punctul  $M$ . Dacă punctul înalt  $M$  este situat sub linia piezometrică aerul poate fi evacuat prin supape de aerisire-dezaerisire, în caz contrar numai forțat. Punctele înalte de pe conducte totdeauna sunt puncte criticabile, în special când linia piezometrică este sub axa conductei și nu sunt condiții de evacuare a aerului adunat în vârf.

### 9.3.2. Calculul conductelor lungi în paralel

Conducte în paralel se utilizează în practică atunci când nu există posibilitatea tehnică de a realiza conducta cu un singur fir sau când mai multe fire sunt mai economice.

O altă situație de legare în paralel a conductelor este atunci când apare necesitatea suplimentării debitului transportat, respectiv la etapizarea lucrărilor în funcție de necesitățile de consum.

Se consideră " $n$ " conducte legate în paralel în două noduri (fig. 9.11). În ambele noduri se respectă condiția de nod (9.1), deci debitul total al conductelor în paralel este suma debitelor firelor

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (9.31)$$

Fiecare fir lucrează sub aceeași sarcină a sistemului  $H^*$ , care este și pierderea pe fiecare fir  $h_{r_i} = H^*$ .

Condiția pierderilor pe fire se poate transcrie inelelor, dacă acestea se iau algebric. Se alege un sens de parcurs al inelului (arbitrar). Pierdere este pozitivă când sensul de parcurs coincide cu direcția de mișcare a lichidului și negativ în caz contrar. Astfel rezultă

$$\sum_{inel} hr = 0 \quad (9.32)$$

care se poate scrie situației din fig. 9.11.

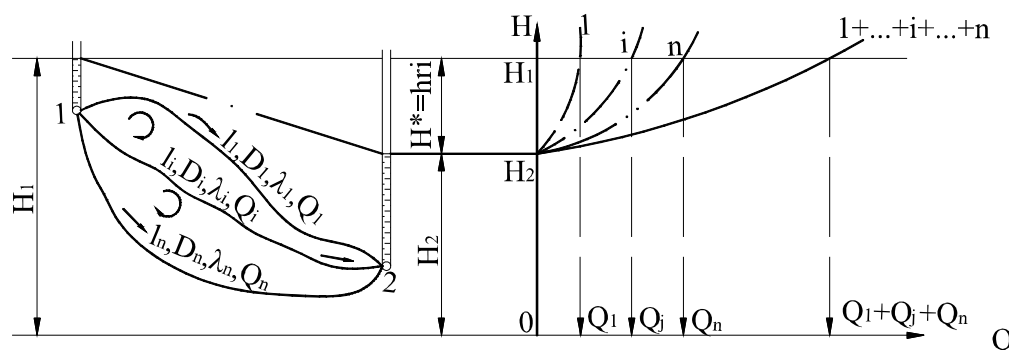


Fig. 9.11. Funcționarea în paralel a conductelor

$$\text{și} \quad \begin{cases} hr_1(Q_1) - hr_2(Q_2) = 0 \\ \vdots \\ hr_i(Q_i) - hr_n(Q_n) = 0 \end{cases} \quad (9.33)$$

Când se cunoaște debitul total, sarcina sistemului și elementele geometrice ale firelor, implicit și modulul de rezistență echivalent  $M_{ei}$ , se pot determina debitele din condiția (9.33), care se transcrie

$$M_1 Q_1^2 = M_i Q_i^2 \text{ sau } Q_i = Q_1 \sqrt{\frac{M_1}{M_i}} \quad (9.34)$$

Debitul total este

$$Q = Q_1 + \sum_{i=2}^n Q_i = Q_1 \left( 1 + \sum_{i=2}^n \sqrt{\frac{M_1}{M_i}} \right)$$

de unde

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^n \sqrt{\frac{M_1}{M_i}}} \quad (9.35)$$

Luând succesiv în loc de  $Q_1$  celelalte valori, pe baza (9.34 și 9.35) rezultă debitele firelor. Soluționarea grafică a problemei este construirea caracteristicilor fiecărui fir

$$H = H_2 + hr_i(Q) \quad (9.36)$$

Pentru  $H = H_1$  din (9.36) rezultă debitul fiecărui fir. Curba sumă este însumarea debitelor tuturor firelor pentru aceeași sarcină  $H$ .

Problema de dimensionare pentru " $n$ " fire, când  $H^*$  și  $Q$  este dat, prezintă nedeterminare. Nedeterminarea se poate înlătura prin scrierea de  $n - 2$  ecuații din alte condiții (tehnice sau economice).

În cazul în care două conducte, legate între ele în paralel, sunt legate cu a treia în serie (fig. 9.11'), calculul hidraulic se rezumă la

relațiile:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ H_I = H_2 + hr_1(Q_1) \\ H_I = H_2 + hr_2(Q_2) \\ H_I = H_1 - hr_3(Q_1) \end{cases} \quad (9.37)$$

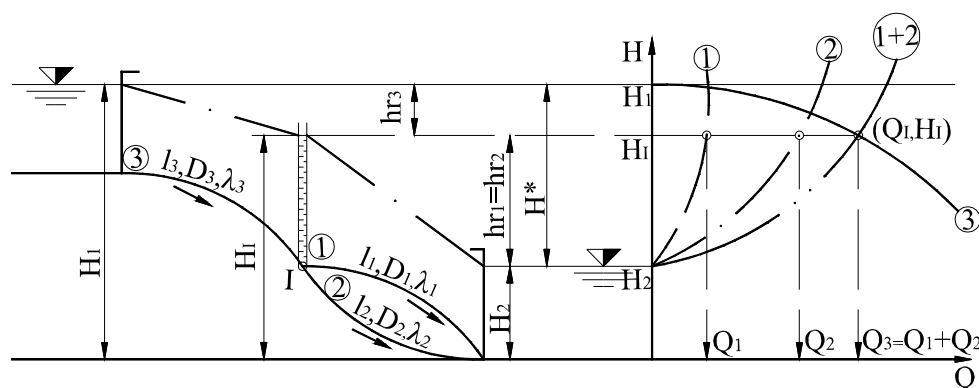


Fig. 9.11'. Două conducte în paralel, cuplate cu a treia în serie

Când se cunosc elementele geometrice ale conductelor și  $H^*$ , din relații rezultă  $Q_1, Q_2, Q_3$  și sarcina în punctul de branșare  $H_I$ .

Pierdere de sarcină totală  $hr = H^*$  se compune din  $hr_3$  și  $hr_1$  sau  $hr_2$ .

Soluționările concrete depind de elementele cunoscute și cele care se calculează, ele urmând tehnicile prezentate anterior.

### 9.3.3. Calculul hidraulic al conductelor ramificate (problema celor trei rezervoare)

Se presupun trei rezervoare  $R_1, R_2$  și  $R_3$  cu cota nivelului liber față de un plan de referință orizontal, respectiv  $H_1, H_2$  și  $H_3$ . Cele trei rezervoare sunt interconectate prin trei conducte lungi, cu branșament comun în punctul I (fig. 9.12). Se cunosc elementele geometrice ale conductelor și un parametru al rezistenței lor hidraulice (ex.  $\lambda$ ). Se urmărește determinarea debitelor conductelor, sensurile de curgere și sarcina în punctul de branșare,  $H_I$ .

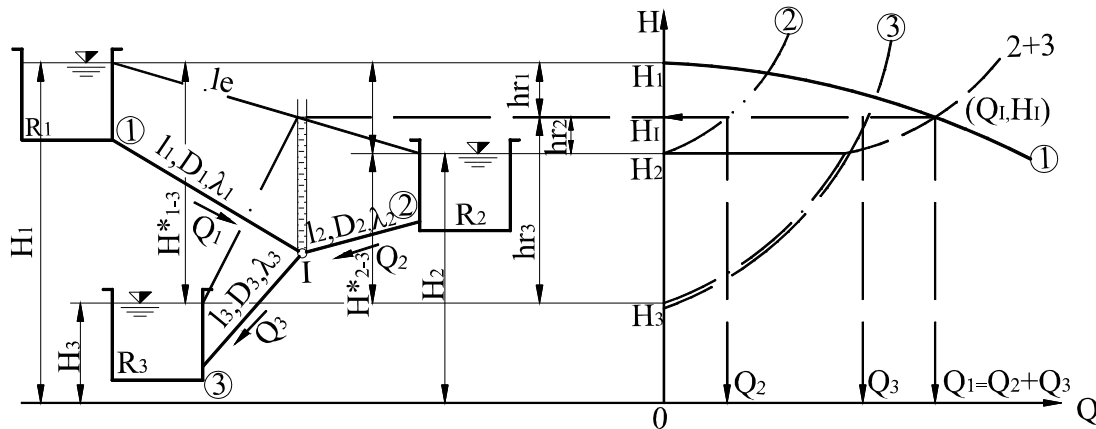


Fig. 9.12. Schema de calcul a conductelor ramificate. Cazul  $H_1 > H_2$

Cu siguranță, sensul curgerii pe conducta 1 este  $R_1 - I$ , iar pe 3,  $I - R_3$ . Pe conducta 2 sensul de curgere depinde de poziția nivelului din rezervorul  $R_2$  față de sarcina în punctul I și poate fi în ambele sensuri sau nulă.

1.  $H_1 > H_2$ . În acest caz sensul curgerii pe conducta 2 este cel punctat. Debitul sosit pe conducta 1,  $Q_1$ , în punctul I se desparte în  $Q_2$  și  $Q_3$ , respectându-se condiția de nod.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (9.38)$$

Pierderile de sarcină se exprimă astfel:

$$\begin{cases} H_{1-2}^* = hr_1(Q_1) + hr_2(Q_2) \\ H_{1-3}^* = hr_1(Q_1) + hr_3(Q_3) \end{cases} \quad (9.39)$$

deci conducta 1 este legată în serie cu 2 + 3. Caracteristicile conductelor au forma

$$\begin{cases} H_1 = H_1 - hr_1(Q) \\ H_1 = H_2 + hr_2(Q) \\ H_1 = H_3 + hr_3(Q) \end{cases} \quad (9.40)$$

Ecuatiile (9.39) și (9.40) sunt echivalente. Soluționarea comună a ecuațiilor (9.38) și (9.39) permite determinarea debitelor, iar rezolvarea sistemului (9.38) și (9.40) conduce la valoarea celor trei debite și sarcini în punctul I. Calculul pierderilor de sarcină trebuie să respecte metodologia de calcul din cap. 8. Reprezentarea caracteristicilor conductelor, în condiția (9.38), pentru câteva valori ale debitelor, permite soluționarea grafică a problemei (fig. 9.13 dreapta).

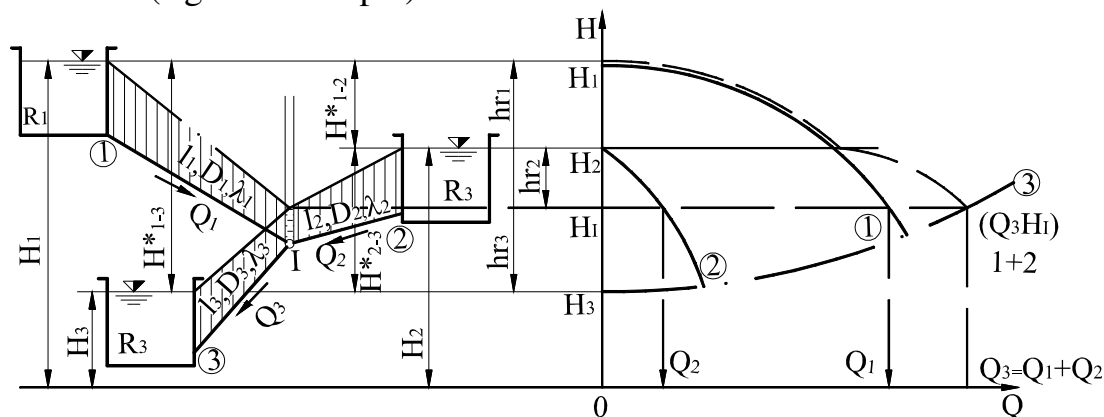


Fig. 9.13. Soluția grafică a problemei conductelor ramificate.

Cazul.  $H_1 < H_2$

2.  $H_1 < H_2$ . Sensul curgerii pe conducte în acest caz este: pe 1,  $R_1 - I$ , pe 2  $R_2 - I$ , pe 3  $I - R_3$ , condiția de nod devenind

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (9.38')$$

Pierderile de sarcină sunt

$$\begin{cases} H_{1-3}^* = hr_1(Q_1) + hr_3(Q_3) \\ H_{2-3}^* = hr_2(Q_2) + hr_3(Q_3) \end{cases} \quad (9.39')$$

deci conducta 3 este legată în serie cu celelalte două. Caracteristicile conductele sunt

$$\begin{cases} H_1 = H_1 - hr_1(Q) \\ H_1 = H_2 - hr_2(Q) \\ H_1 = H_3 + hr_r(Q) \end{cases} \quad (9.40')$$

Soluționarea analitică sau grafică (fig. 9.13) a ecuațiilor (9.38') și (9.40') permite determinarea necunoscutelor  $Q_1, Q_2, Q_3$  și  $H_1$ .

3.  $H_1 = H_2$ . În acest caz pe conducta 2 neexistând diferență de presiune între  $R_1 - I$  debitul  $Q_2$  este nul, rezultând

$$Q_1 = Q_3 \quad (9.38'')$$

$$H_{1-3}^* = hr_r(Q_1) + hr_3(Q_3) \quad (9.39'')$$

sau caracteristicile conductelor sunt

$$H_1 = H_1 - hr_1(Q)$$

$$H_1 = H_3 + hr_3(Q) \quad (9.40'')$$

Soluționarea analitică sau grafică (fig. 9.14) a ecuațiilor (9.38'') și (9.40'') conduce la valoarea necunoscutelor  $Q_1$  și  $Q_3$ . De fapt acest ultim caz este mai mult teoretic, fiindcă orice diferență mică (sau chiar pulsațiile de presiune din I) de presiune implică mișcarea pe  $R_2 - I$ .

Asemănător problemei celor trei rezervoare funcționează conducta cu castel de apă sau rezervor cu pernă de aer în derivație sau cu contra rezervor (cu nivel liber sau sub presiune).

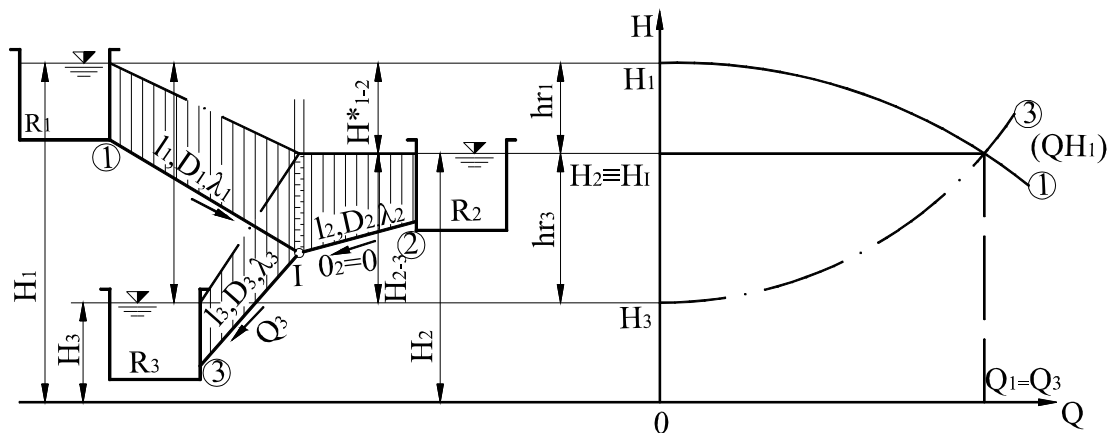


Fig. 9.14. Soluția grafică a problemei conductelor ramificate. Cazul  $H_1 < H_2$ .

### 9.3.4. Calculul hidraulic al conductelor cu debit uniform distribuit

Se consideră o conductă cu diametrul  $D$  constant, care, pe lungimea sa  $L_D$ , distribuie uniform debitul  $q$ , în total

$$Q_D = q \cdot L_D \quad (9.41)$$

și tranzitează debitul  $Q_T$  (fig. 9.15) în regim staționar. Legea pierderilor de sarcină se acceptă sub forma ecuației putere a pantei hidraulice  $j$ , care conține și influența singularităților exprimate prin lungimea lor echivalentă,  $l_e$ :

$$j = \frac{a(1 + \frac{l_e}{L_D})K^c}{D^{3+b+c}} Q^b = RQ^b \quad (9.42)$$

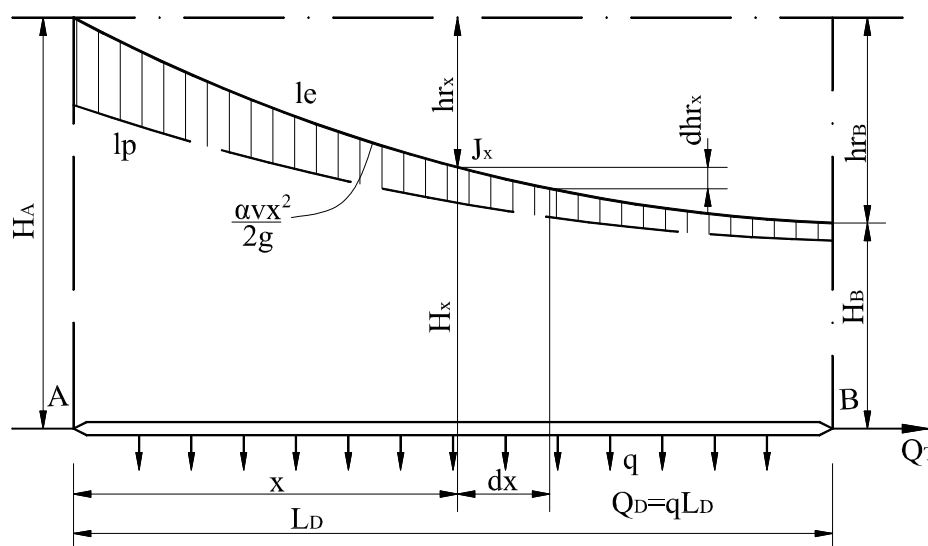


Fig. 9.15. Schema de calcul al conductelor cu debit uniform distribuit

Valoarea lui  $b$  depinde de regimul de curgere: în laminar  $b=1$ , iar în turbulent  $1 < b \leq 2$ .

Se notează  $L_T = \frac{Q_T}{q}$ , o distanță virtuală pe care s-ar distribui uniform

tot debitul de tranzit  $Q_T$ . Debitul într-o secțiune oarecare  $x$ , măsurat de la capătul amonte al conductei, este:



$$Q_x = Q_T + Q_D - q \cdot x \quad (9.43)$$

iar panta hidraulică - pe distanța  $dx$  se consideră coarda curbei - se exprimă prin

$$j_x = R Q_x^b \quad (9.44)$$

Pe distanța  $dx$  pierderile distribuite sunt:

$$dhr_x = j_x dx \quad (9.45)$$

sau

$$dhr_x = R(Q_T + Q_D - q \cdot x)^b dx = R(Q_T + Q_D)^b \left(1 - \frac{qx}{Q_T + Q_D}\right)^b dx = j_a \left(1 - \frac{x}{L_T + L_D}\right)^b dx \quad (9.46)$$

unde  $j_a$  este panta hidraulică a conductei la debitul de alimentare.

Pierdere de sarcină pe distanța  $x$  rezultă din integrarea ecuației (9.45) în limitele 0 și  $x$ , deci

$$hr_x = j_a \int_0^x \left(1 - \frac{x}{L_T + L_D}\right)^b dx \quad (9.47)$$

Se efectuează schimbarea de variabilă  $z = 1 - \frac{x}{L_T + L_D}$  respectiv

$dx = -(L_T + L_D)dz$ ; după integrare și revenire la variabila inițială, se obține:

$$hr_x = j_a \frac{L_T + L_D}{b+1} \left[ 1 - \left(1 - \frac{x}{L_T + L_D}\right)^{b+1} \right] \quad (9.48)$$

care particularizat pentru:

$x = 0$  (capăt amonte), rezultă  $hr_A = 0$

$x = L_D$  (capăt aval), rezultă

$$hr_B = j_a \frac{L_T + L_D}{b+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{L_D}{L_T + L_D} \right)^{b+1} \right] \quad (9.49)$$

Luând plan de referință planul orizontal al axului conductei, cota piezometrică în secțiunea  $X$  se exprimă în funcție de sarcina din  $A$  sau  $B$

$$H_x = H_A - hr_x - \frac{\alpha V_x^2}{2g} \quad (9.50)$$

sau dacă se neglijează termenul cinetic

$$H_x = H_A - hr_x \quad (9.50')$$

Cazuri particulare a ecuației (9.48) sunt:

**1. Când debitul de tranzit este nul** ( $Q_T=0$ ), respectiv  $L_T=0$ , deci

$$hr_x = \frac{j_a L_D}{b+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{L_D} \right)^{b+1} \right] \quad (9.51)$$

sau pentru lungimea totală a conductei

$$hr_B = \frac{j_a \cdot L_D}{b+1}$$

unde produsul  $j_a \cdot L_D$  are semnificația pierderii de sarcină pe lungimea  $L_D$  dacă debitul  $Q_D$  ar fi în tranzit. Deci în cazul când debitul se distribuie uniform pierderea este  $a(b+1)-a$  parte din pierderea ce s-ar forma la tranzitarea aceluși debit.

a) Ecuațiile (9.51 și 9.52) particularizate regimului laminar ( $b=1$ ), conduc la

$$hr_x = j_a x \left( 1 - \frac{x}{2L_D} \right) \quad (9.53)$$

respectiv:

$$hr_B = \frac{j_a \cdot L_D}{2} \quad (9.54)$$

Pierderea de sarcină pe întreaga lungime a conductei este jumătate din pierderea ce s-ar realiza la tranzitarea acelui debit.

b) Ecuațiile (9.51 și 9.52) particularizate turbulenței pătratică ( $b=2$ ), conduc la relațiile general cunoscute în literatură:

$$hr_x = j_a \cdot x \left( 1 - \frac{x}{L_D} + \frac{x^2}{3L_D^2} \right) \quad (9.55)$$

și

$$hr_B = \frac{j_a \cdot L_D}{3} \quad (9.56)$$

Pierderea de sarcină pe întreaga lungime a conductei este a treia parte din pierderea ce s-ar realiza la tranzitarea acelui debit.

**2. Când debitul distribuit este nul** ( $Q_D = 0$ ) tot debitul este în tranzit pe întregul traseu al conductei, deci panta hidraulică este constantă:

$$j_a = j_x = \text{const.}$$

și integrarea ecuației (9.46) conduce la  $hr_x = j_a x$ , respectiv  $hr_B = j_a L_D$ .

O analiză mai aprofundată a problemei evidențiază că la debit variabil pe traseul conductei legea pierderilor de sarcină variază, deci este posibil ca  $b$  să varieze de la 1 la 2, însă acceptarea lui  $b=1$  pentru sectorul laminar și  $1,7 < b \leq 2$  în sectorul turbulent descrie destul de precis fenomenul.

Relația (9.49) se poate transforma ușor pentru  $b=2$  sub formele general cunoscute.

$$hr_B = \frac{L}{K^2} \left( Q_T^2 + Q_D Q_T + \frac{Q_D^2}{3} \right) \sim \frac{L}{K^2} (Q_T + 0,55 Q_D)^2 = M (Q_T + 0,55 Q_D)^2 \quad (9.49')$$

Conducte cu debit uniform distribuit se utilizează deseori ca model hidraulic în cazul conductelor care distribuie la echidistanță debite constante (sau aproape constante), **modelul hidraulic al conductei cu debit uniform distribuit**, care reduce mult volumul de calcul și asigură o precizie acceptabilă.

### 9.3.5. Calculul hidraulic al conductelor care distribuie debite constante la echidistanță

Pentru simplificarea expunerii, se consideră o conductă orizontală cu diametru constant  $D$ , având lungimea totală  $L$ , alimentată sub sarcină constantă  $H_A$ , care la echidistanța  $l_c$  distribuie debite concentrate constante  $Q_c$ . Tronsonul amonte, între punctul de alimentare  $A$  și distribuitorul  $n$  are lungimea  $m \cdot l_c$  ( $m$  - număr pozitiv). Conducta este echipată cu  $n$  distribuitoare (fig. 9.16).

Din punct de vedere al pierderilor de sarcină tubulatura este caracterizată de expresia pantei hidraulice, de formă putere ce conține și influența pierderilor locale prin lungimile lor echivalente (9.42).

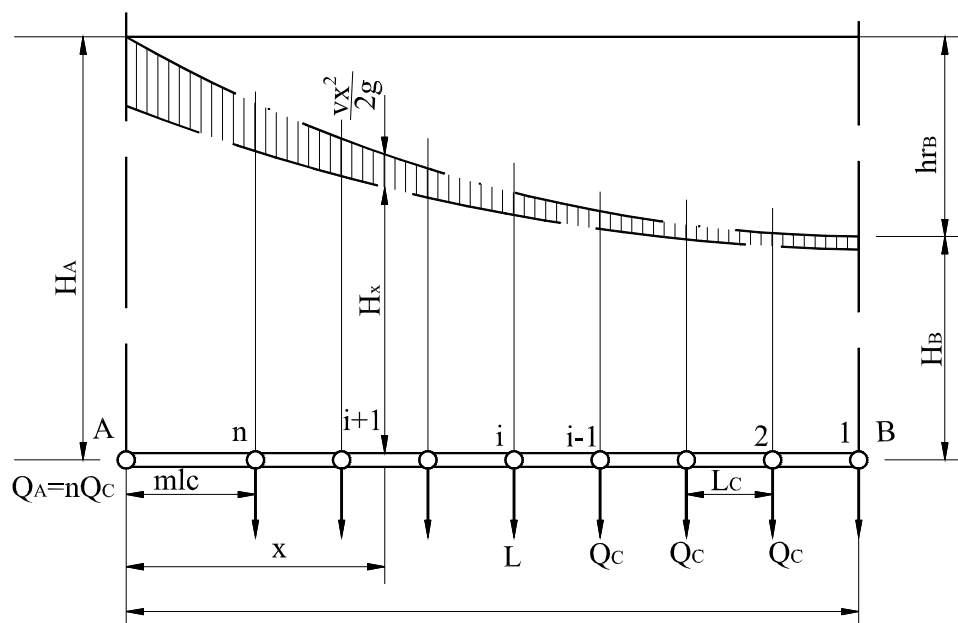


Fig. 9.16. Schema de calcul al conductelor care distribuie debite constante la echidistanță

Debitul de alimentare al conductei este

$$Q_a = nQ_c \quad (9.57)$$

De fapt conducta este formată din  $n$  tronsoane, debitul scăzând în aval la fiecare nod cu  $Q_c$ . Se presupune pe toată conducta regimul turbulent.

Pierderile de sarcină pentru fiecare tronson se pot scrie astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} hr_{(1-2)} = R(1Q_c)^b l_c \\ hr_{(2-3)} = R(2Q_c)^b l_c \\ \cdot \\ \cdot \\ hr_{i(i+1)} = R(iQ_c)^b l_c \\ \cdot \\ \cdot \\ hr_{(n-1)-n} = R[(n-1)Q_c]^b l_c \\ hR_{(n-A)} = R(nQ_c)^b ml_c \end{array} \right. \quad (9.58)$$

Pierderile totale se obțin prin însumarea lor pe tronsoane, rezultând:

$$hr_{A+B} = \sum_{i=1}^n hr_{i-(i+1)} = RQ_c^b \cdot l_c [1^b + 2^b + \dots + i^b + \dots + (n-1)^b + mn^b] \quad (9.59)$$

Transformând produsul

$$Q_c^b \cdot l_c = \frac{Q_a^b \cdot L}{n^b (m+n-1)} \quad (9.60)$$

(9.59) se poate scrie

$$hr_{(A-B)} = j_a L \frac{mn^b + \sum_{i=1}^{n-1} i^b}{n^b (m+n+1)} \quad (9.61)$$

care pentru curgere în zona pătratică devine:

$$hr_{A-B} = \frac{6mn^b + (n-1)n(2n-1)}{6n^b (m+n-1)} \quad (9.62)$$

În calcule este necesară verificarea regimului de curgere pe ultimele tronsoane și dacă rezultă laminar, primele ecuații din sistemul (9.58) se modifică adecvat, efectuarea calculelor urmând sistemul (9.58).

Dacă pentru conducta cu distribuția de debite concentrate se acceptă modelul distribuției continue (9.3.3), cu debit uniform distribuit  $q = \frac{Q_c}{l_c}$ , din echivalarea ecuațiilor (9.61) cu (9.52) rezultă o corecție care trebuie aplicată pierderilor de sarcină de la modelul distribuției virtual continue:

$$M(m, n, b) = \frac{hr_{conc}}{hr_{unif.}} = \frac{j_a L \cdot \frac{mn^b + \sum_{i=1}^{n-1} i^b}{n^b(m+n-1)}}{\frac{j_a L}{b+1}} = \frac{(b+1)(mn^b + \sum_{i=1}^{n-1} i^b)}{n^b(m+n-1)} \quad (9.63)$$

deci

$$hr_{conc} = hr_{unif} = \frac{(b+1)(mn^b + \sum_{i=1}^{n-1} i^b)}{n^b(m+n-1)} = hr_{unif} \cdot M(m, n, b) \quad (9.64)$$

În situația limită, când  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(m, n, b) = 1$ .

Pentru valori finite ale lui  $n$ ,  $M(m, n, b)$  are valori supraunitare, deci pierderea de sarcină pe o conductă cu debite concentrate este superioară pierderilor pe aceeași conductă cu același debit total uniform distribuit. De exemplu:  $M(1, 10, b) = 1,39... 1,155$  pentru  $b = 1,7... 2,0$ .

În multe cazuri conductele care distribuie la echidistanță debite (cvasi) constante sunt echipate cu distribuitoare a căror caracteristică hidraulică are forma

$$Q_c = c_1 H^r \quad (9.65)$$

unde  $H$  este presiunea la distribuitor (exprimat în mH<sub>2</sub>O).

Totodată se impune o condiție suplimentară din funcțional, ce se referă la uniformitatea distribuției în lungul conductei.

Presiunea în lungul conductei variază în funcție de pierderile de sarcină și panta conductei, presiunii maxime corespunzându-i  $Q_{c \max}$  iar presiunii minime  $Q_{c \min}$ .

Se presupune că neuniformitatea tolerată relativă a distribuției este:  $\delta Q_c$ , deci

$$\frac{Q_{c \max} - Q_{c \min}}{Q_{c \max}} \leq \delta_{Q_c}, \quad (9.66)$$

unde:  $Q_{c \max} = C_1 H_{\max}$  și  $Q_{c \min} = C_1 H_{\min}$ . Presiunea de obicei se controlează în capătul amonte al conductei.

Calculul se diferențiază în funcție de panta terenului.

1. **Pentru**  $I \leq 0$  (fig. 9.17) presiunea maximă este în capătul amonte al conductei, iar în capătul aval  $H_{\min} = H_{\max} - |I| \cdot L - hr$ .

După înlocuirile necesare în (9.66), dezvoltarea în serie Taylor, cu neglijarea termenilor care conțin pe  $\delta_{Q_c}$  la puteri supraunitare, acesta devine:

$$\frac{|I| \cdot L + hr_{1-n}}{H_{\max}} \leq \frac{\delta Q_c}{r} \quad (9.67)$$

Înlocuind  $hr$  după (9.61), în care  $m=0$ , (9.67) devine:

$$|I| \cdot l_c (n-1) + R Q_c^b \cdot l_c \sum_{i=1}^{n-1} i^b - \frac{\delta Q_c}{r} H_{\max} \leq 0 \quad (9.68)$$

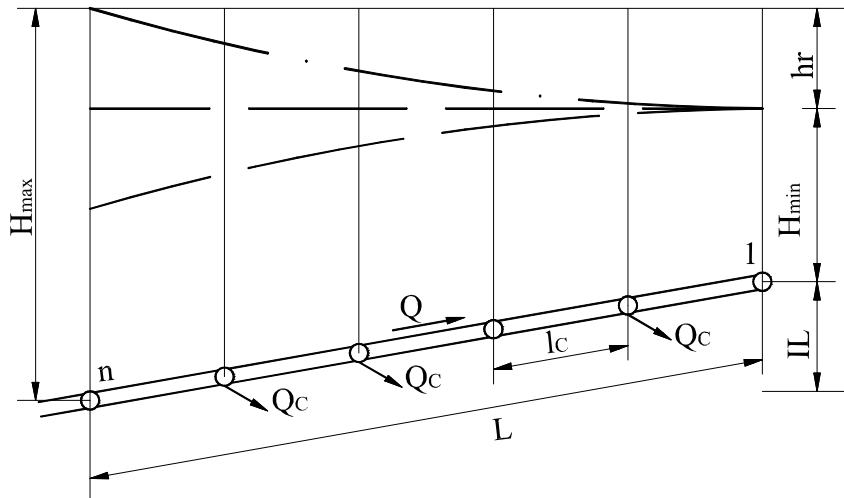


Fig. 9.17 Cazul  $I \leq 0$

Printr-o metodă numerică se soluționează inegalitatea pentru  $n=\max$  (număr natural) care satisface relația.

2. Pentru  $I > 0$  sunt posibile două situații.

a)  $I > j_{n-1}$ , panta terenului este mai mare decât panta hidraulică pe ultimul tronson, (n-1).

În acest caz sarcina minimă pe conductă este în amonte, iar sarcina maximă în aval (fig. 9.18). Cu presiunea controlată în capătul amonte (9.66) se mai poate scrie:

$$\frac{Q_{c \min} - Q_{c \max}}{Q_{c \min}} \geq -\delta_{Q_c} \quad (9.66')$$

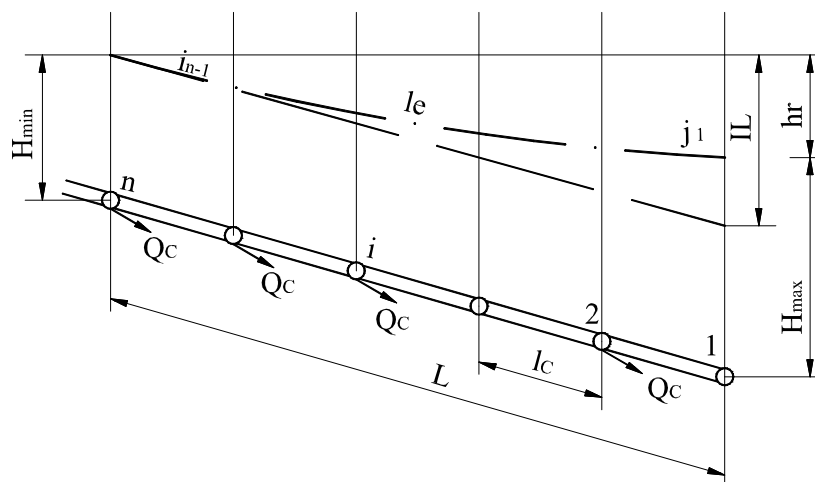


Fig. 9.18. Cazul  $I > j_{n-1}$

Făcând înlocuirile necesare și dezvoltând în serie Taylor, cu neglijarea termenilor care conțin pe  $\delta Q_c$  la puteri supraunitare, rezultă:

$$I \cdot L - hr - \frac{\delta Q_c}{r} H_{\min} \leq 0 \quad (9.69)$$

Înlocuind  $hr$  după (9.61), se obține:

$$I \cdot l_c (n-1) + R Q_c^b l_c \sum_{i=1}^{n-1} i^b - \frac{\delta Q_c}{r} H_{\min} \leq 0 \quad (9.70)$$

Ecuția se soluționează printr-o metodă numerică pentru  $n = \max$  (număr natural).



b)  $0 < I < j_{n-1}$ , în acest caz sarcina maximă se obține în capătul amonte și aval a conductei, sarcina minimă fiind pe o poziție intermediară a lungimii  $L$  (fig. 9.19).

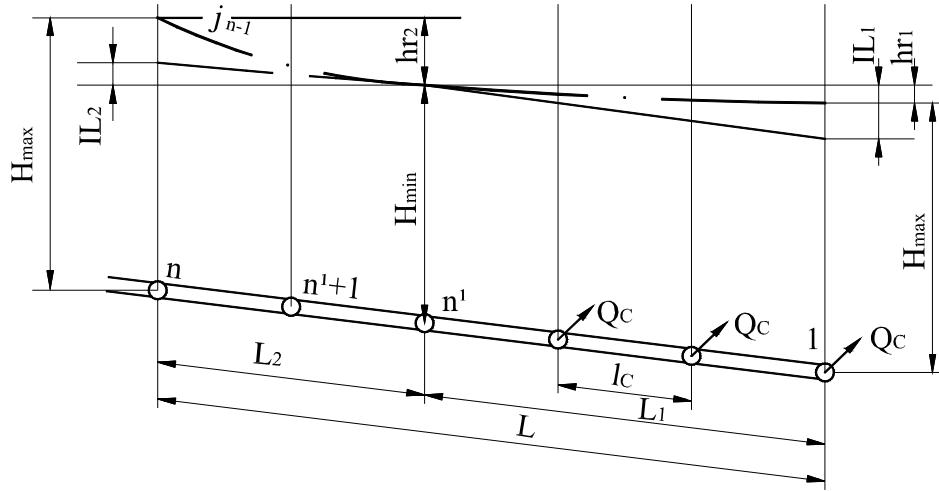


Fig. 9.19. Cazul  $0 < I < j_{n-1}$ .

Lungimea  $L_1 = (n' - l)l_c$ , rezultă cu valoarea obținută din condiția:

$$I \cdot L_1 - hr_1 - \frac{\delta Q_c}{r} H_{max} \leq 0 \quad (9.71)$$

care, asemănător cazului precedent, este:

$$I \cdot l_c (n' - 1) + R Q_c^b l_c \sum_1^{n'-1} i^b - \frac{\delta Q_c}{r} H_{max} \leq 0 \quad (9.71')$$

Lungimea  $L_2 = (n - n')l_c$  rezultă cu valoarea lui  $n$  determinată din condiția

$$-I \cdot L_2 + hr_2 - \frac{\delta Q_c}{r} H_{max} \leq 0 \quad (9.72)$$

care se poate scrie

$$-I(n - n') \cdot l_c + R l_c Q_c^b \sum_{n'}^{n-1} i^b - \frac{\delta Q_c}{r} H_c \leq 0 \quad (9.73)$$

Ecuatiile (9.71 și 9.73) se soluționează numeric pentru  $n = max$  și  $n' = max$  numere naturale.

### 9.3.6. Calculul economic al conductelor

Uneori la dimensionarea conductelor condițiile hidraulice nu sunt suficiente, existând o infinitate de variante în care se poate realiza conducta respectivă.

O latură importantă a ingineriei este conceperea, proiectarea și realizarea unor conducte economic avantajoase, care să prezinte investiție sau cheltuieli totale anuale minime. Cheltuielile anuale totale sunt compuse din amortismentul investiției și din cheltuieli de exploatare:

$$C_T = C_a + C_e \quad (9.74)$$

Costul unității de lungime de conductă, pusă în funcțiune, se poate aproxima cu o funcție de forma:

$$P_c = c D^b + a \quad (9.75)$$

La transportul debitului de lichid  $Q$  pe tronson se pierde o parte din energia curentului; la creșterea diametrului scad pierderile de energie. Debitul  $Q$  și pierderea de sarcină  $hr$  permite calculul puterii pierdute nete

$$P = \gamma Q hr \quad (9.76)$$

Când energia curentului se realizează prin pompare, puterea pierdută brută la transport este

$$P = \frac{\gamma Q \cdot hr}{\eta} \quad (9.76')$$

Energia pierdută într-un an depinde de volumul pompat, adică de timpul de funcționare anual,  $t$ :

$$E = \gamma W hr = \gamma Q hr \cdot t \quad \text{sau} \quad E = \frac{\gamma W_{hr}}{\eta} = \frac{\gamma Q_{hr} t}{\eta} \quad (9.77)$$

Notând cu  $r = 1/T$ , coeficientul de amortizare (inversul timpului normat de viață a tronsonului de conductă),  $L$  - lungimea conductei,  $P_e$  - prețul unitar al energiei, cheltuielile totale anuale devin:

$$C_T = r P_c(D) \cdot L + \frac{\gamma Q hr(D) \cdot t P_e}{\eta} \quad (9.78)$$

Prin înlocuirea (9.75) și a pierderilor de sarcină sub forma (8.4), ecuația de mai sus devine

$$C_T = r L (a + b D^c) + \frac{8 \rho L t P_e \cdot Q^3 \lambda(D)}{\pi^2 \eta D^5} \quad (9.79)$$

Când  $\lambda$  este exprimat de o relație tip putere monomă (8.75, 8.50,..., 8.54, 8.71, 8.72) forma redusă (9.79) este

$$C_T(D) = A_1 + A_2 D^c + A_3 D^{-5+A_4} \quad (9.80)$$

Acceptând diametrul continuu,  $D > 0$ , minima funcției se află prin anularea primei derivate

$$\frac{d C_T}{d D} = A_2 c D^{c-1} + A_3 (-5 + A_4) D^{-6+A_4} = 0 \quad (9.81)$$

din care se poate explicita diametrul.

Problema calculului economic al conductelor simple (pe tronsoane) prezintă unele particularități: diametru continuu se poate accepta doar pentru domeniul nestandardizat, pe domeniul standardizat seria de diametre utilizate fiind discretă.

**1. Pe domeniul nestandardizat** al diametrelor, valoarea rezultată din calcul se rotunjește la un diametru acceptat tehnologic - de obicei superior - refăcându-se calculele de verificare pentru diametrul acceptat.

**2. Pe domeniul standardizat** al diametrelor calculul se diferențiază în funcție de cunoașterea sau necunoașterea funcției de preț al conductei.

*a. Dacă funcția preț este cunoscută*, pentru un diametru virtual continuu rezultă o valoare cuprinsă între două diametre standard,  $D_1 < D < D_2$ , și o pierdere de sarcină  $hr(D)$ . Tronsonul se va echipa cu cele două diametre standardizate, astfel ca pierderea pe tronson să fie  $hr(D)$ , utilizând relațiile (9.70).

*b. Dacă funcția preț este necunoscută*, dar se cunoaște prețul unitar al tuburilor cu diametru discret, se reprezintă funcția (9.78, 9.80). Pentru diametre rezultă costuri de amortisment, de exploatare și totale. Costului total minim îi corespunde diametrul economic (fig. 9.20 a).

Chiar și în cazul diametrului continuu se poate utiliza procedeul când derivata (9.81) nu se poate soluționa; pentru câteva diametre se calculează amortismentul, cheltuielile de exploatare și cheltuielile totale și se reprezintă

grafic. Punctele permit trasarea curbelor amortismentelor cheltuielilor de exploatare și totale anuale. Minima curbei cheltuielilor totale anuale corespunde diametrului economic (fig. 9.20 b).

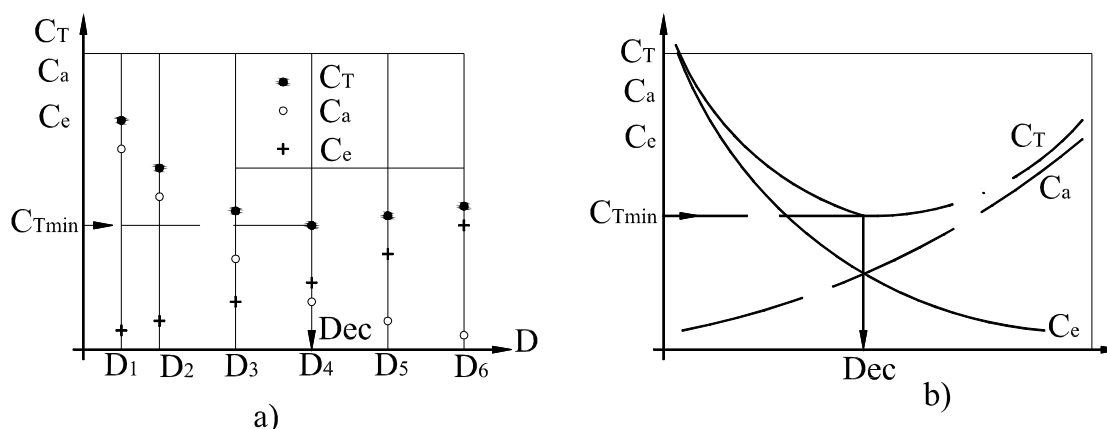


Fig. 9.20. Calculul grafic al diametrului economic

Calcululele se pot desfășura după un tabel de forma tabelului 9.1.

**Tabelul 9.1.**

Q (l/s)	D <sub>i</sub> (mm)	λ <sub>i</sub>	hr (mCA)	P <sub>c</sub> (lei/m)	I (lei)	C <sub>a</sub> (lei/an)	C <sub>e</sub> (lei/an)	C <sub>T</sub> (lei/an)	Obs.
	D <sub>1</sub>								Costului total anual minim îi corespunde D <sub>ec</sub>
	.								
	.								
	.								
	.D <sub>i</sub>								
	.								
	.								
	.								
	.								
	.								
	D <sub>n</sub>								

#### 9.4. Calculul rețelelor de conducte ramificate

Se numește **rețea ramificată** un sistem sub presiune, format din  $m$  tronsoane și  $n = m+1$  noduri, astfel încât două noduri oarecare sunt unite printr-un singur drum format din noduri și tronsoane. De obicei alimentarea rețelei se face printr-un singur **nod de alimentare**. Nodul care aparține unui tronson și nu este nod de alimentare este **nod de consum**. Ansamblul de noduri și tronsoane care unesc nodul de alimentare cu cel mai îndepărtat nod de consum este conducta principală (fig. 9.21).

Unei rețele de conducte îi este caracteristică forma generală în plan, lungimea tronsoanelor, cotele geodezice în noduri și în alte puncte. Elementele hidraulice caracteristice sunt: debitele tronsoanelor, diametrul și lungimea pe sectoare, cotele piezometrice și presiunile disponibile în noduri și alte puncte (în general de cotă extremă).

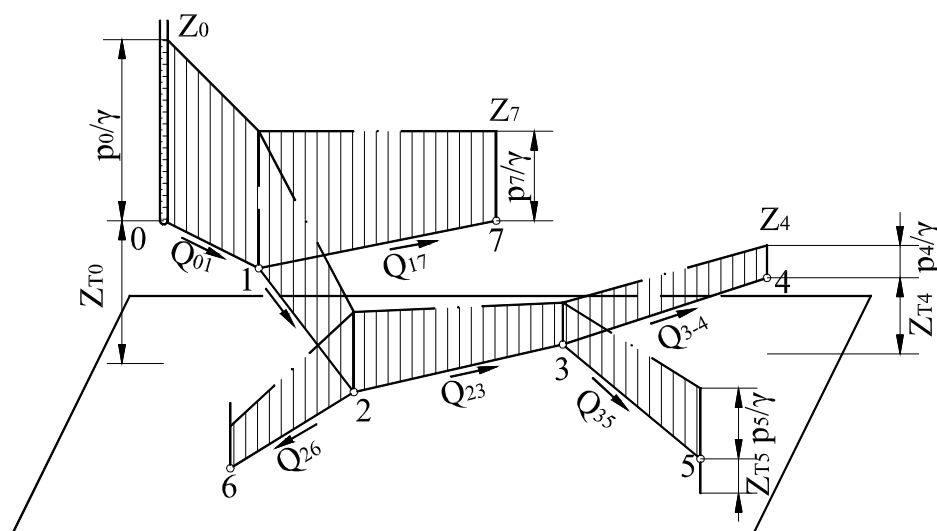


Fig. 9.21 Schema rețelei ramificate

Nodurile se numără de la 1 la  $n$ , tronsoanele au indicele  $i, j$  a nodurilor din capăt ca și debitele pe ele.

Nodurilor și tronsoanelor le sunt caracteristice relațiile (9.1...9.4).

Calculul hidraulic al rețelelor ramificate se diferențiază în probleme de verificare și probleme de dimensionare.

#### 9.4.1. Verificarea rețelelor de conducte ramificate

Se presupune rețeaua din fig. 9.21 cu traseul în plan cunoscut, cotele terenului în noduri, lungimile și diametrele sectoarelor, materialul conductei (implicit rugozitatea).

Pentru debitele tronsoanelor,  $Q_{ki}$  și presiunile de serviciu în nodurile de consum cunoscute, se cere stabilirea presiunii necesare în nodul de alimentare.

Calculul se reduce la calculul pierderilor pe fiecare sector,  $h_{r_{ki}}$  și aplicarea relațiilor (9.3...9.4). Se calculează cota piezometrică în nodurile de pe capătul liber

$$\begin{cases} Z_4 = Z_{T4} + h_s \\ Z_5 = Z_{T5} + h_s \\ Z_6 = Z_{T6} + h_s \\ Z_7 = Z_{T7} + h_s \end{cases} \quad (9.82)$$

apoi pierderile pe tronsoane  $hr_{ki} = \sum (hr_y)_{ki}$ . Plecând din fiecare capăt liber se determină cotele piezometrice în nodurile pe tronson până la nodul de alimentare

$$\begin{cases} Z_0^{(4)} = Z_4 + hr_{43} + hr_{32} + hr_{21} + hr_{10} \\ Z_0^{(5)} = Z_5 + hr_{53} + hr_{32} + hr_{21} + hr_{10} \\ Z_0^{(6)} = Z_6 + hr_{62} + hr_{21} + hr_{10} \\ Z_0^{(7)} = Z_7 + hr_{71} + hr_{10} \end{cases} \quad (9.83)$$

Valoarea maximă dintre  $Z_0^i$  este cota piezometrică necesară la alimentare

$Z_{0\max}$ , respectiv  $\frac{P_0}{\gamma} = Z_{0\max} - Z_{T0}$ . Cu această presiune (respectiv cotă piezometrică) se satisface necesarul pe traseul cel mai nefavorabil. Se calculează epura presiunii pe rețea plecând de la nodul de alimentare. Presupunem traseul nefavorabil (0-4), deci

$$\begin{cases} Z_1 = Z_{0\max} - hr_{01}; \frac{P_1}{\gamma} = Z_1 - Z_{T1} \\ Z_2 = Z_1 - hr_{12}; \frac{P_2}{\gamma} = Z_2 - Z_{T2} \\ Z_3 = Z_2 - hr_{23}; \frac{P_3}{\gamma} = Z_3 - Z_{T3} \\ Z_4 = Z_3 - hr_{34}; \frac{P_4}{\gamma} = Z_4 - Z_{T4} = h_s \end{cases} \quad (9.84)$$

Pe traseele celelalte condițiile sunt mai favorabile ajungându-se la nodurile de pe capătul liber cu presiune superioară presiunii de serviciu, astfel

$$\begin{cases} Z_7 = Z_1 - hr_{17}; \frac{P_7}{\gamma} = Z_7 - Z_{T7} > h_s \\ Z_6 = Z_2 - hr_{26}; \frac{P_6}{\gamma} = Z_6 - Z_{T6} > h_s \\ Z_5 = Z_3 - hr_{35}; \frac{P_5}{\gamma} = Z_5 - Z_{T5} > h_s \end{cases} \quad (9.85)$$

Alte probleme de verificare privesc:

- la sarcină de alimentare și debitele tronsoanelor date, se cere verificarea presiunilor pe rețea. Practic se reprezintă grafic epura presiunilor pe rețea și se compară presiunile rezultate cu cele necesare;

- verificarea debitelor posibile de transportat la sarcini date este o operație matematică dificilă, întrucât trebuie rezolvat un sistem de ecuații dinamice cu coeficienți constanți, numărul necunoscutelor fiind egal cu numărul ecuațiilor. Pentru rețeaua din fig. 9.21 se poate scrie:

$$\begin{cases} H_{04}^* = M_{34}Q_{34}^2 + M_{23}Q_{23}^2 + M_{12}Q_{12}^2 + M_{01}Q_{01}^2 = hr_{04} \\ H_{05}^* = M_{35}Q_{35}^2 + M_{23}Q_{23}^2 + M_{12}Q_{12}^2 + M_{01}Q_{01}^2 = hr_{05} \\ H_{06}^* = M_{26}Q_{26}^2 + M_{12}Q_{12}^2 + M_{01}Q_{01}^2 = hr_{06} \\ H_{07}^* = M_{17}Q_{17}^2 + M_{01}Q_{01}^2 = hr_{07} \end{cases} \quad (9.86)$$

Acest sistem se completează cu ecuații privind continuitatea în noduri, astfel ca numărul necunoscutelor este egal cu cel al ecuațiilor. Sistemul are  $2n$  soluții,  $n$  fiind numărul necunoscutelor, iar alegerea soluției corecte fizic este de asemeni dificilă. Există și posibilitatea unei soluționări numerice cu corecții iterative, care însă presupune valoare inițială arbitrară verosimilă uneia din variabile.

De fapt configurația formată din nodurile și tronsoanele unei rețele ramificate este un graf (**un arbore**), putând utiliza la soluționări teoria grafelor.

#### 9.4.2. Dimensionarea rețelelor de conducte ramificate

Rețeaua de conducte ramificată de configurație în plan dată, lungimea tronsoanelor, debitele lor cunoscute, presiunile de serviciu impuse, la dimensionare prezintă nedeterminare, datorită faptului că fiecare tronson

poate fi echipat pe sectoare, de lungime și diametre necunoscute (două necunoscute pe sector), existând posibilitatea scrierii unei singure ecuații pe sector.

Se poate demonstra că un tronson izolat, cu debit dat, se poate realiza economic din numai două sectoare, cu diametre alăturate din seria de diametre standard.

Prin completarea numărului de ecuații cu restricții tehnice și economice și punând problema optimizării economice, dimensionarea rețelelor ramificate se poate efectua.

Pentru dimensionarea rețelei ramificate se pot utiliza mai multe metode: metodă manuală de calcul economic, metoda discontinuă (după Labye), metoda continuă, metoda programării liniare. În cele ce urmează se prezintă succint metoda manuală de calcul economic și metoda programării liniare.

### 1. Dimensionarea economica a rețelelor ramificate sub presiune

Dimensionarea economică a rețelei de conducte presupune următoarele operații:

- conform (9.35) pentru fiecare tronson, considerat independent se determină diametrul economic. De obicei diametrele se încadrează în domeniul seriei de diametre standardizate. Eventual calculele nu se întocmesc pentru întreaga serie de diametre, ci numai celor corespunzătoare intervalului de viteze economice ( $v_{\min} \sim 0,5 \text{ m/s}$  iar  $v_{\max} = 2,5 \text{ m/s}$ ), pentru care corespund

$$D_{\max} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_{\min}}} \text{ și } D_{\min} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_{\max}}} \quad (9.87)$$

care se rotunjesc la valorile existente în seria de diametre standardizate;

- se presupune că fiecare tronson se echipează cu diametrul economic și se calculează cota piezometrică necesară în punctul de alimentare, plecând de la fiecare capăt liber de consum

$$Z_0 = Z_{Ti} + H_s + \sum hr_{0-i} \quad (9.88)$$

Traseul corespunzător lui  $Z_0 = \max$ , se numește **traseul cel mai nefavorabil**, cel corespunzător  $Z_0 = \min$  este **traseul cel mai favorabil**, celelalte fiind trasee intermediare;



- echiparea rețelei pe tronsoane și sectoare. Această operație constă în considerarea uneia din trasee echipat cu diametrele economice, celelalte trasee fiind recalculat în funcție de necesități.

a) Dacă se acceptă diametru economic pe traseul cel mai nefavorabil, pe traseele mai favorabile, cu diametre economice se ajunge la presiuni disponibile superioare presiunii de serviciu, deci din condiția ca să se ajungă la presiunile de serviciu, traseele diferite de cel nefavorabil se echipează și cu diametre mai mici decât cel economic. La o rețea cu un singur grad de ramificare (conductă principală și ramificații) problema este matematic determinată, cunoscându-se cotele piezometrice în nodurile rețelei. Pe orice ramificație favorabilă se determină pierderile de sarcină admisă din relația

$$hr_{ij}^{admis} = Z_{am} - Z_{av} \quad (9.89)$$

care este superioară pierderii realizate de conductă cu diametru economic, deci pe o porțiune a tronsonului se prevede diametru economic pe altă porțiune diametru inferior celui economic.

Lungimile sectoarelor rezultă din condițiile (fig. 9.22).

$$\begin{aligned} hr_{ij}^{admis} &= j_{Dec} \cdot l_{Dec} + j_D \cdot l_D \\ L_{ij} &= l_{Dec} + l_D \end{aligned} \quad (9.90)$$

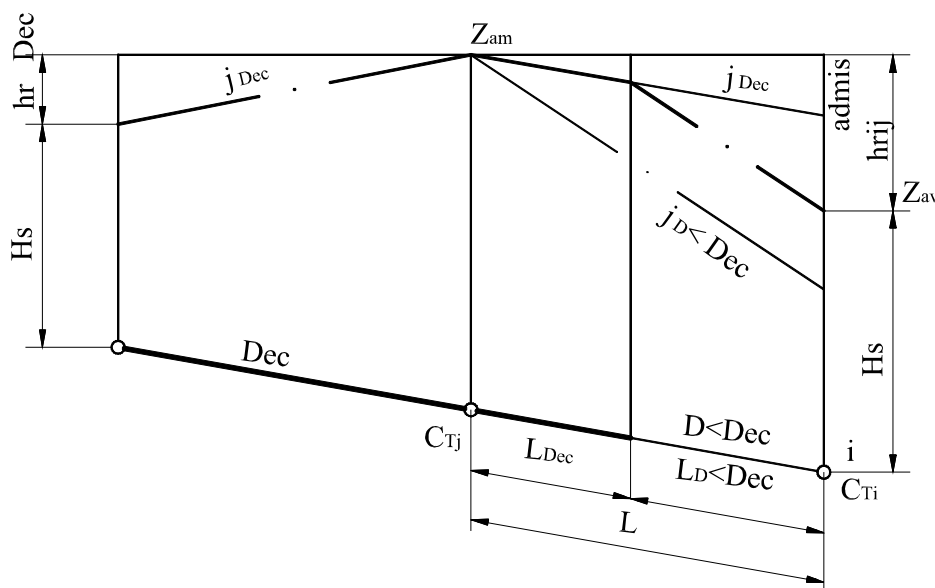


Fig. 9.22. Echiparea tronsoanelor pe trasee favorabile

Când rețeaua are un grad de ramificare superior, pe traseele favorabile echiparea sa nu este matematic riguros determinată, existând mai multe soluții. Arbitrar se echipează unele tronsoane cu diametrul economic, ultimul tronson fiind echipat pe considerente susmenționate.

b) Dacă se acceptă diametru economic pe cel mai favorabil traseu, celelalte trasee mai nefavorabile vor fi echipate pe sectoare și cu diametre mai mari decât cel economic. Mersul calculelor este asemănător cazului prezentat.

c) Dacă se acceptă diametru economic pe un traseu intermediar, atunci pe trasee mai nefavorabile se vor pune pe sectoare și diametre mai mari, iar pe traseele mai favorabile și diametre mai mici decât diametrul economic, raționamentul calculelor fiind identic punctului a). Pe ansamblu cost minim se obține la echiparea rețelei cu diametru economic pe un traseu intermediar (pct.c), însă aceasta depinde și de "îndemânarea proiectantului". Rezultatele economice obținute după pct. a, b, c au diferențieri nesemnificative (sub 2%).

După echiparea rețelei cu diametre se construiește epura presiunilor disponibile, bazat pe interpretarea geometrică a ecuației energiei.

## 2. Dimensionarea economica a rețelei prin programare liniară

Dimensionarea unei rețele de conducte ramificate poate fi o problemă de programare liniară, în care restricțiile sunt reprezentate de condițiile tehnice, iar funcția de optimizare (obiectivă) reprezintă condițiile economice. Numărul ecuațiilor care pot fi scrise, în general, este mai mic decât numărul necunoscutelor, iar în multe cazuri condițiile tehnice se exprimă prin inegalități. Din mulțimea de variante tehnice posibile se alege varianta care este optimă din punct de vedere economic.

### a) Restricții tehnice pentru rețea.

Parte din restricții sunt obligatorii fiecărui tronson, și anume:

- cota piezometrică în capătul amonte al tronsonului trebuie să satisfacă cota piezometrică din aval, deci

$$Z_K^{am} \geq Z_k^{av} + \sum hr_k \quad (9.91)$$

- lungimea tronsonului este lungimea însumată a sectoarelor de pe tronson

$$L_k = \sum_{i=1}^n lki \quad (9.92)$$

Alte restricții se scriu în punctele caracteristice ale rețelei, astfel:

- cota piezometrică în nodurile de consum extreme trebuie să satisfacă presiunea de serviciu

$$Z_k^{av} \geq Z_{tk}^{av} + H_s \quad (9.93)$$

- în puncte cu cota terenului joasă se pot limita presiunile disponibile prin

$$H_d = Z_k - Z_{tk} \leq H_{admis} \quad (9.94)$$

- în puncte cu cota terenului înaltă se poate impune o presiune disponibilă minimă pentru buna funcționare a rețelei și dispozitivelor aferente

$$H_d = Z_k - Z_{tk} \geq H_{min} \quad (9.95)$$

- la punctul de alimentare se poate limita presiunea din condiția înălțimii rezervorului, a variației de nivel din aceasta, sau din condiția caracteristicilor pompelor posibile de utilizat

$$H_{0min} \leq H_{0d} = Z_0 - Z_{t0} \leq H_{0max} \quad (9.96)$$

- uneori instrucțiunile de proiectare limitează consumul specific din diferite materiale necesare realizării rețelei. La tubulatură, de exemplu, se limitează pentru fiecare material  $j$  lungimea echivalentă, exprimată prin lungimea unui singur diametru (cel echivalent), astfel

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_k} CE_{ki}^j l_{ki} \leq L_{ET}^j \quad (9.97)$$

unde  $m$  este numărul tronsoanelor rețelei;  $CE_{ki}^j$  - coeficient de echivalență a conductei de pe sectorul  $ki$  referitor la materialul  $j$ ,  $L_{ET}^j$  - lungimea echivalentă totală admisă pe ansamblul rețelei a conductei din materialul  $j$ .

Dacă rețeaua trebuie să satisfacă eventual și alte condiții tehnice acestea se formulează asemănător celor prezentate.

Condițiile tehnice pot fi satisfăcute de rețeaua realizată într-o infinitate de variante.

b) *Funcții de optimizare.* Din multitudinea de variante tehnice posibile prin funcția de optimizare (obiectivizare) se determină singura variantă care satisface acest criteriu. Funcția de optimizare se scrie diferit, în funcție de modul de alimentare a rețelei - gravitațional sau prin pompare:

- Dacă  $P_{cki}$  este prețul unitar al conductei pe sectorul  $l_{ki}$ , la o alimentare gravitațională pentru investiție minimă se poate scrie

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_k} P_{cki} l_{ki} = \text{minim} \quad (9.98)$$

- Dacă alimentarea este prin pompare, se liniarizează funcția de investiție specifică în funcție de puterea instalată

$$I_{sp} = C\sqrt{P} = c\sqrt{\gamma Q_0 \frac{H_0}{\eta}} \sim A' + AH_0 \quad (9.99)$$

iar investiția totală este

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_k} (P_{cki} l_{ki} + AH_0) = \min \quad (9.100)$$

Din care rezultă optimizarea ansamblului rețea-pompare.

O analiză mai aprofundată permite obiectivizarea prin funcția costului total anual al rețelei în conlucrare cu pomparea, în care pe lângă amortismentul investiției intervin și cheltuielile de exploatare. Partea variabilă a cheltuielilor de exploatare reprezintă costul energiei consumate anual, care depinde de volumul pompat (debitul x timpul de funcționare) și sarcina  $H_b$

$$C_e = \frac{\gamma W H_0}{\eta} P_e = b H_0 \quad (9.101)$$

unde  $P_e$  este prețul unitar al energiei. Acceptând coeficienții de amortizare pentru sectoarele rețelei " $a_{ki}$ ", iar pentru stația de pompare " $a$ ", se poate scrie

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_k} [a_{ki} P_{cki} l_{ki} + (aA + b) H_0] = \min \quad (9.102)$$

Eventual coeficienții de amortizare pot fi majorați pentru mobilizarea fondurilor fixe.

Soluționarea problemei de programare liniară poate fi făcută după algoritmul Simplex. Centrele de calcul de obicei dețin programe de bibliotecă pentru programare liniară, cu instrucțiuni de utilizare (ex. programul PROGL1N din biblioteca OPALIN).

Diferențele obținute la dimensionarea rețelei prin programare liniară și dimensionarea manuală pot ajunge la 2-3%, favorabile calcului automat.

### 9.5. Calculul rețelelor de conducte inelare

Se numește rețea inelară plană un sistem sub presiune format din  $n$  noduri și  $m$  tronsoane, dispuse astfel încât în fiecare nod să convergă cel puțin două tronsoane, două noduri să fie unite direct între ele prin cel mult un tronson, iar tronsoanele să nu se intersecteze în puncte care nu sunt noduri (fig. 9.23). Se pot defini și rețele inelare spațiale, când două noduri sunt unite de mai multe tronsoane însă nu se tratează aici. Nodurile și tronsoanele rețelei inelare plane formează  $k$  inele. Aplicând relația lui Euler referitoare la poliedre se găsește:

$$m = k + n - 1 \quad (9.103)$$

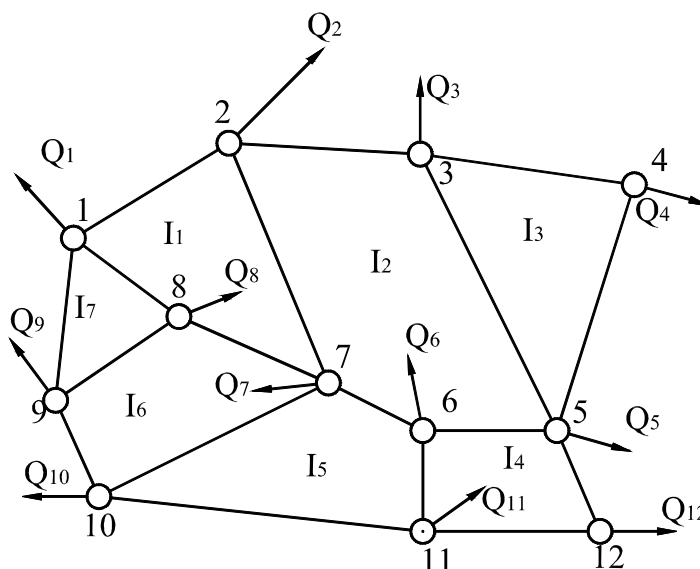


Fig. 9.23. Schema unei rețele inelare de conducte

Calculul de verificare și de dimensionare a rețelelor inelare se diferențiază, însă rămân valabile relațiile (9.1...9.4) și (9.32). La o rețea inelară orice consumator (nod) poate fi alimentat cel puțin pe două trasee. Din acest considerent fiabilitatea lor este superioară rețelelor ramificate. Se utilizează în alimentări cu apă în special.

Se consideră o rețea inelară plană cu " $n$ " noduri și " $m$ " tronsoane. Fie  $N_i$  un nod oarecare ( $i=1,2,...,n$ ), " $a_i$ " numărul tronsoanelor care converg în  $N_i$ ;  $T_{ij}$  - tronsonul care unește direct nodurile  $N_i$  cu  $N_j$ , ( $j=1,2,...,a_i$ );  $Q_{ij}$  - debitul tronsonului  $T_{ij}$ ,  $Q_i$  - debitul de alimentare sau de consum în nodul  $N_i$  (fig. 9.24).

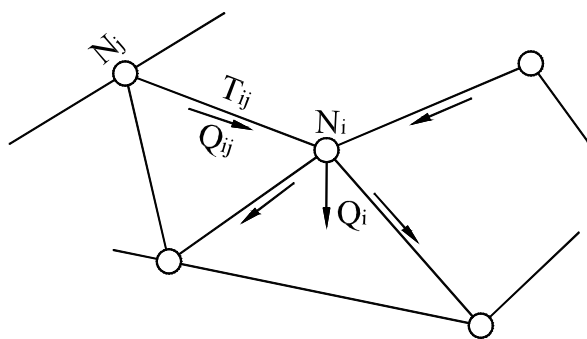


Fig. 9.24. Schema nodului.

Dacă se consideră pozitive debitele care intră în  $N_i$ , atunci conform cu continuitatea

$$\sum_{j=1}^{a_i} Q_{ij} + Q_i = 0, \quad (i=1,2,...,n-1) \quad (9.104)$$

Semnul "+" corespunde alimentării lui  $N_i$ , iar semnul "-" debitării (consumului). Fiecărui nod  $i$  se poate scrie o astfel de ecuație, însă toate necunoscutele  $Q_{nj}$ , ( $j=1,2,...,n$ ) care intervin în ecuația corespunzătoare nodului  $N_n$  figurează și în ecuațiile corespunzătoare nodurilor  $N_i$  ( $i=1,2,...,n-1$ ), deci valorile  $Q_{ij}$  care satisfac ecuațiile (9.104) satisfac și ecuația pentru nodul  $N_n$ . Rezultă  $n-1$  ecuații diferite pentru  $m$  necunoscute  $Q_{ij}$ . Fie  $I_r$  ( $r=1,2,...,k$ ) un inel al rețelei, iar  $b_r$  fie numărul tronsoanelor care formează inelul  $I_r$  (fig. 9.25). Pe toate inelele rețelei se adoptă același sens pozitiv de parcurgere a lor (ex. sensul acelor de ceasornic). Admițând

curgerea pe tronsoane în zona turbulenței pătratice, pe un tronson oarecare  $T_{ij}$  pierderea de sarcină este,  $hr_{ij} = M_{ij} Q_{ij}^2$ , unde  $M_{ij}$  este modulul de rezistență (eventual echivalent) al tronsonului. Pierderea de sarcină între nodurile  $N_i$  și  $N_f$  se poate scrie sub una din formele

$$h' r_{if} = hr_{ij} + hr_{je} - hr_{ef}; h'' r_{if} = hr_{ig} + hr_{gf} \quad (9.105)$$

sau

$$hr_{if} = M_{ij} Q_{ij}^2 + M_{je} Q_{je}^2 - M_{ef} Q_{ef}^2; hr_{if} = M_{ig} Q_{ig}^2 + M_{gf} Q_{gf}^2 \quad (9.105')$$

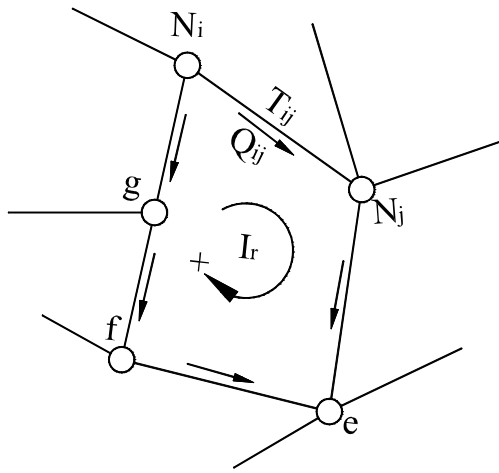


Fig. 9.25. Schema inelului

Deoarece  $h' r_{if} = h'' r_{if}$ , rezultă că pentru tot inelul  $hr$  este nulă,

$$hr_k = h' r_{if} - h'' r_{if} = 0$$

sau în general

$$hr_k = \sum_k hr_{ij} = \sum_k (\pm M_{ij} Q_{ij}^2) = \sum_k M_{ij} |Q_{ij}| Q_{ij} = 0 \quad (9.106)$$

Semnul pierderii este pozitiv dacă sensul de parcurgere al inelului coincide cu cel al debitului de pe tronson și negativ în caz contrar. Pentru fiecare inel  $i$  poate scrie câte o ecuație de tipul (9.106), în total  $k$  ecuații. Pentru întreaga rețea se pot scrie în total  $m = k + n - 1$  ecuații.

### 9.5.1. Verificarea rețelei de conducte inelare

La problema de verificare dimensiunile rețelei  $(l_{ij}, D_{ij}, M_{ij})$ , debitele de alimentare și de consum ( $Q_i$ ) sunt cunoscute. Se pune problema stabilirii debitului fiecărui tronson și a presiunii disponibile.

Necunoscutele fiind debitele tronsoanelor  $Q_{ij}$ , numărul ecuațiilor ce se pot scrie este egal cu numărul necunoscutelor. Sistemul de ecuații fiind neliniar, el se rezolvă prin metode de aproximare, cum este și metoda Cross - Lobacev. Expunerea se prezintă pe rețeaua simplificată din fig. 9.26, unde circulația presupusă a lichidului cu valorile  $Q_{ij}$  (inițială) este marcată.

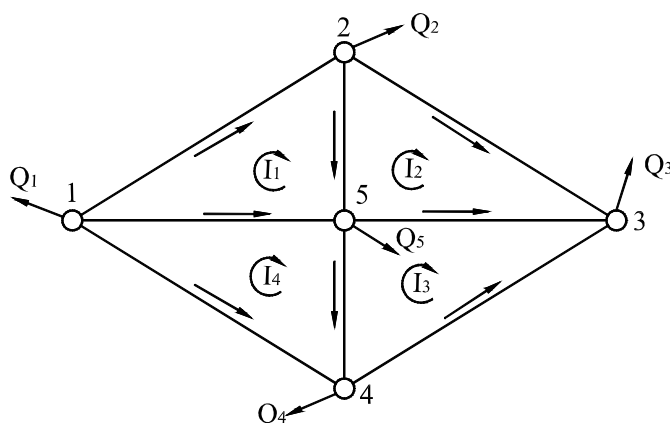


Fig. 9.26 Compensarea debitelor rețelei inelare

Debitele inițiale  $Q_{ij}$  satisfac condiția (9.104), dar în general nu se satisfac ecuațiile (9.106) datorită distribuției arbitrare a debitelor inițiale, deci:

$$\begin{aligned}
 I_1). \quad & M_{12} Q_{12(0)}^2 + M_{25} Q_{25(0)}^2 - M_{15} Q_{15(0)}^2 = hr_{1(0)} \neq 0 \\
 I_2). \quad & M_{23} Q_{23(0)}^2 - M_{35} Q_{35(0)}^2 - M_{25} Q_{25(0)}^2 = hr_{2(0)} \neq 0 \\
 I_3). \quad & M_{35} Q_{35(0)}^2 - M_{34} Q_{34(0)}^2 - M_{45} Q_{45(0)}^2 = hr_{3(0)} \neq 0 \\
 I_4). \quad & M_{15} Q_{15(0)}^2 + M_{45} Q_{45(0)}^2 - M_{14} Q_{14(0)}^2 = hr_{4(0)} \neq 0
 \end{aligned} \tag{9.107}$$

Pentru a corecta aceste ecuații pentru fiecare inel  $I_r$  ( $r=1, \dots, 4$ ) se introduc debite de corecție  $Q_r$ , ( $r=1, 2, 3, 4$ ). Se poate constata că prin aceasta nu se afectează ecuațiile de continuitate din nod, însă (9.107) devine:



$$\begin{aligned}
I_1) & M_{12} (Q_{12(0)} + \Delta Q_1)^2 + M_{25} (Q_{25(0)} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^2 - M_{15} (Q_{15(0)} - \Delta Q_1 + \Delta Q_4)^2 = 0 \\
I_2) & M_{23} (Q_{23(0)} + \Delta Q_2)^2 - M_{35} (Q_{35(0)} - \Delta Q_2 + \Delta Q_3)^2 - M_{25} (Q_{25(0)} - \Delta Q_2 + \Delta Q_1)^2 = 0 \\
I_3) & M_{35} (Q_{35(0)} + \Delta Q_3 - \Delta Q_2)^2 - M_{34} (Q_{34(0)} - \Delta Q_3)^2 - M_{45} (Q_{45(0)} - \Delta Q_3 + \Delta Q_4)^2 = 0 \\
I_4) & M_{15} (Q_{15(0)} + \Delta Q_4 - \Delta Q_1)^2 + M_{45} (Q_{45(0)} + \Delta Q_4 - \Delta Q_3)^2 - M_{14} (Q_{14(0)} - \Delta Q_4)^2 = 0
\end{aligned} \tag{9.108}$$

În fiecare paranteză a sistemului este debitul tronsonului  $T_{ij}$  corectat. Tronsoanele comune mai multor inele se corectează algebric cu debitele de corecție a inelelor respective. Fectuând ridicările la patrat, neglijând termenii care conțin  $(\Delta Q_i)^2$  și  $\Delta Q_i \cdot \Delta Q_j$ , se obține:

$$\begin{aligned}
I_1) \quad & hr_{1(0)} + 2\Delta Q_1 \sum_1 M_{ij} |Q_{ij}| - 2\Delta Q_2 M_{25} |Q_{25(0)}| - 2\Delta Q_4 M_{15} |Q_{15(0)}| = 0 \\
I_2) \quad & hr_{2(0)} + 2\Delta Q_2 \sum_2 M_{ij} |Q_{ij}| - 2\Delta Q_3 M_{35} |Q_{35(0)}| - 2\Delta Q_1 M_{25} |Q_{25(0)}| = 0 \\
I_3) \quad & hr_{3(0)} + 2\Delta Q_3 \sum_3 M_{ij} |Q_{ij}| - 2\Delta Q_4 M_{45} |Q_{45(0)}| - 2\Delta Q_2 M_{35} |Q_{35(0)}| = 0 \\
I_4) \quad & hr_{4(0)} + 2\Delta Q_4 \sum_4 M_{ij} |Q_{ij}| - 2\Delta Q_1 M_{15} |Q_{15(0)}| - 2\Delta Q_3 M_{45} |Q_{45(0)}| = 0
\end{aligned} \tag{9.109}$$

Sistemul (9.109) constituie un sistem de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute  $\Delta Q_i$ , ( $i=1,2,3,4$ ). Deoarece sistemul (9.109) s-a obținut prin liniarizarea sistemului (9.108), soluția lui reprezintă o aproximare a soluției lui (9.108). Dacă debitele  $Q_{ij(0)}$  sunt destul de apropiate de cele reale,  $Q_{ij}$ , această aproximare este suficientă în practică. Pentru un sistem cu multe inele scrierea și soluționarea sistemului (9.109) este tot dificilă și este recomandată obținerea soluției prin aproximații succesive.

Pentru prezentarea metodei se consideră sistemul

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 = b_3 \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 = b_4 \end{cases} \tag{9.110}$$

care se poate pune sub următoarea formă:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} X_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} X_3 - \frac{a_{14}}{a_{11}} X_4 \\ X_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} X_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} X_3 - \frac{a_{24}}{a_{22}} X_4 \\ X_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} X_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} X_2 - \frac{a_{34}}{a_{33}} X_4 \\ X_4 = \frac{b_4}{a_{44}} - \frac{a_{41}}{a_{44}} X_1 - \frac{a_{42}}{a_{44}} X_2 - \frac{a_{45}}{a_{44}} X_3 \end{cases} \quad (9.111)$$

Se introduc matricele:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \frac{b_4}{a_{44}} \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \frac{a_{24}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \frac{a_{34}}{a_{33}} \\ \frac{a_{41}}{a_{44}} & \frac{a_{42}}{a_{44}} & \frac{a_{43}}{a_{44}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.112)$$

iar U matricea de ordinul 4. Sistemul (9.111) se poate scrie

$$X = B + AX \quad (9.111')$$

O metodă iterativă de rezolvare a sistemului (9.111) utilizează forma (9.111') ca formulă de iterație

$$X_{p+1} = B + AX_p \quad (9.113)$$

Luând  $X_0 = 0$ , din (9.113) rezultă

$$\begin{cases} X_1 = B + AX_0 = B \\ X_2 = B + AX_1 = B + AB = (U + A)B \\ X_3 = B + AX_2 = (U + A + A^2)B \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p = (U + A + A^2 + \dots + A^{p-1})B \end{cases} \quad (9.114)$$

Dacă procesul converge, soluția sistemului (9.111) este

$$X = \lim_{p \rightarrow \infty} X_p = (U + A + A^2 + \dots)B \quad (9.115)$$

Metoda se extinde ușor la un sistem de ecuații liniare cu  $m$  necunoscute. Se demonstrează că relațiile:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| < |a_{ii}|, (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (9.116)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |a_{ij}| < |a_{jj}|, (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

constituie condiții suficiente de convergență a procesului. Altă condiție de convergență este

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left( \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 < 1 \quad (9.117)$$

Pentru sistemul (9.109) prima iterație corespunde primei relații din (9.114), deci:

$$\Delta Q_{r(1)} = - \frac{hr_{r(0)}}{2 \sum_r M_{ij} |Q_{ij(0)}|} = - \frac{\sum_r (\pm M_{ij} Q_{ij(0)}^2)}{2 \sum_r M_{ij} |Q_{ij(0)}|} \quad (9.118)$$

Debitele de corecție se adună algebric la debitele tronsoanelor. Tronsoanele comune se corectează cu debitele de corecție de pe inele cărora aparține tronsonul. Dacă debitele inițiale au fost bine alese procesul converge rapid. Standardele admit ca sfârșit al iterațiilor neînchiderea maximă pe inele,  $hr_{r(p)} < 0,5mCA$ . La alegerea necorespunzătoare a soluției inițiale procesul poate fi divergent (caz în care se reanalizează distribuția inițială a debitelor  $Q_{ij(0)}$  sau în rezonanță ( $hr_r$  variază de 1a o iterație la alta

cu aceeași valoare în plus și în minus, caz în care înjumătățirea debitelor de corecție conduce la soluție).

Cu debitele rezultate pe tronsoane, corespunzătoare unei situații staționare limită, plecând de la punctul de alimentare, se trasează pe rețea epura presiunilor disponibile, calculându-se în prealabil cotele piezometrice. Într-un nod  $N_i$  cota piezometrică rezultată mergând pe un traseu poate diferi de cel obținut mergând pe alt traseu, cel mult cu suma neîchiderilor pe inele parcurse pe traseul respectiv. Epura presiunilor disponibile furnizează informații asupra satisfacerii presiunilor de serviciu în nodurile de consum și în punctele cu cote extreme.

În calculele modului de rezistență echivalent al unui tronson  $M_{ij}$  poate varia de la o iterație la alta în funcție de regimul de curgere, iar în turbulent, în funcție de zona în care lucrează tronsonul, deci  $M_{ij} = f(\text{Re}, k(D)_{ij})$ .

Toate punctele în care este consum se consideră noduri, între ele fiind tronsoane. Dacă pe o porțiune sunt distribuții multe și egale la echidistanță aceea porțiune se poate asimila cu un tronson cu debit uniform distribuit.

### 9.5.2. Dimensionarea rețelei de conducte inelare

În cazul dimensionării rețelei inelare, pentru forma sa în plan dată, numărul cutelor este  $2m$ , valorile  $Q_{ij}$  și  $D_{ij}$ . Numărul relațiilor care pot fi scrise este  $m$  și nici condițiile suplimentare tehnico-economice nu aduc sistemul de ecuații la o formă matematic determinată. Din acest considerent dimensionarea rețelelor inelare este arbitrară. Procesul de dimensionare este următorul:

- pe traseul în plan dat al rețelei (din condiția de funcțional) se propune un circuit rațional al lichidului, alimentând consumatorii importanți și cei mai îndepărtați pe cel mai scurt traseu;
- se propun debitele tronsoanelor făcând diferite ipoteze asupra proporției după care un consumator este alimentat pe diferite trasee care converg în nodul respectiv, respectând totodată condiția de nod;
- conform cu debitele propuse  $Q_{ij}$  pentru fiecare tronson  $T_{ij}$ , considerat că lucrează independent, se calculează diametrul economic;
- se presupune rețeaua echipată pe tronsoane cu diametre economice și se "compensează" rețeaua; debitele propuse reprezintă distribuția inițială;
- după compensarea rețelei se verifică concordanța noilor debite cu diametre economice;

- pe tronsoanele unde diametrul nu corespunde domeniului diametrului economic la debitul rezultat, se corectează diametrele și se reia operația de compensare a rețelei;

- dimensionarea se consideră terminată când  $Q_{ij}$  și  $D_{ij}$  corespund domeniului economic;

- cu presiunile disponibile impuse în punctele cele mai nefavorabile (cele mai înalte sau îndepărtate) se calculează cotele piezometrice în noduri și puncte nefavorabile (înalte și joase) și se trasează epura presiunilor disponibile pe rețea. Din aceasta rezultă și presiunea necesară în punctul sau punctele de alimentare a rețelei (înălțime de pompare, cotă rezervor de alimentare).

## 9.6. Aplicații

**9.1.** Să se determine înălțimea geodezică de aspirație maximă a unei pompe centrifugale care debitează  $Q = 30 \text{ l/s}$ , linia de aspirație având caracteristicile: țeava de oțel cu  $D = 150 \text{ mm}$  și  $L = 30 \text{ m}$ , echipată cu sorb cu ventil, cot la  $90^\circ$  ( $R = 1,5 D$ ), confuzor asimetric la  $D = 100 \text{ mm}$ , robinet fluture cu  $\frac{a}{D} = 0,15$ . Condițiile de lucru ale instalației de pompare: presiune atmosferică normală ( $p_a = 760 \text{ mm Hg}$ ) și temperatura maximă a apei pompate  $\theta = 24^\circ\text{C}$ . Se admite coeficient de siguranță la cavitație  $C = 1,2$  (vezi fig. 9.4).

**Rezolvare:** Instalația funcționează cât nu se rupe coloana de lichid pe linia de aspirație datorită cavității (presiunii de vaporizare). Înălțimea geodezică maximă rezultă din condiția ca presiunea minimă în punctul cel mai nefavorabil, la limită să fie egală cu presiunea vaporilor saturați, amplificată cu coeficientul de siguranță. Secțiunea cea mai nefavorabilă este cea de intrare în pompa (2-2), deci  $p_2 \geq C \cdot p_v$ . Valoarea  $H_{ga}$  rezultă din ecuația lui Bernoulli aplicată între secțiunile 1 și 2.

$$H_{ga} = \frac{p_a - p_v}{\gamma} - (\alpha + \zeta^*) \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} = \frac{(0,76 - 0,02338)13600 \cdot 9,81}{9810} \left( 1,1 + 25,67 \frac{8 \cdot 0,03^2}{9,81 \pi^2 0,15^4} \right) = 6,02 \text{ m}$$

unde

$$\zeta^* = \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{sv} + \zeta_c + \zeta_{rf} + \zeta_r = 0,0503 \frac{30}{0,15} + 15 + 0,4 + 0,15 + 0,06 = 25,67$$

Coeficientul  $\lambda$  se calculează după Sevelev, pentru

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0.03}{\pi 0.15^2} = 1.70 \text{ m/s}, \text{ cu relația valabilă pentru } V > 1.2 \text{ m/s}.$$

$$\lambda = \frac{0.021}{D^{0.3}} \cdot k_1 \cdot k_2 = \frac{0.021}{0.15^{0.3}} \cdot 1.18 \cdot 1.25 = 0.0503$$

Coeficienții de rezistență la armături sunt:

- la sorb  $\zeta_{sv} = 15$ ;

- la cot  $\zeta_c = 0.4$ ; cot rugos la  $Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{1.70 \cdot 0.15}{0.913 \cdot 10^{-6}} = 279220$ ;

- la robinet fluture deschis  $\zeta_{rf} = 0.15$ ;

- la reducere  $\zeta_r = 0.06$ ;

Presiunea de vaporizare și coeficientul de vâscozitate cinematic la  $\theta = 24^\circ\text{C}$  sunt

$$p_v = 23.38 \text{ mmHg}$$

$$\nu = 0.913 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

**9.2.** Să se determine debitul sifonului din fig. 9.6 și presiunea în punctul cel mai nefavorabil, cunoscând  $H^* = 2 \text{ m}$ ,  $Z = 1 \text{ m}$ ,  $D = 100 \text{ mm}$ ,  $l_u = 30 \text{ m}$ ,  $l_c = 60 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $\zeta_i = 0.5$ ,  $\zeta_{c90^\circ} = 0.988$ ,  $\zeta_{c45^\circ} = 0.183$ ,  $\zeta_e = 1$ ,  $\alpha = 1$  și  $p_a = 0$

**Rezolvare:** Conform ecuației (9.22):

$$Q = \frac{\pi D^2}{4\sqrt{\alpha + \zeta^*}} \sqrt{2gh} = \frac{\pi \cdot 0.1^2}{4\sqrt{1 + 20.854}} \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2} = 0.0105 \text{ m}^3/\text{s} = 10.5 \text{ l/s}$$

iar

$$\zeta^* = \frac{\lambda(l_u + l_c)}{D} + \zeta_i + 2\zeta_{c45^\circ} + \zeta_e = \frac{0.02(30 + 60)}{0.1} + 0.5 + 2 \cdot 0.183 + 0.998 + 1 = 20.854$$

Presiunea în punctul M, conform (9.23) este

$$\frac{P_M}{\gamma} = \frac{P_a}{\gamma} - z - \frac{D}{2} - (\alpha + \zeta_{1-M}^*) \frac{V^2}{2g} = -1 \frac{0.1}{2} - (1.7 + 7.671) \frac{1.337^2}{2 \cdot 9.81} = -1.85 \text{ mCA}$$

$$\zeta_{1-M}^* = \frac{\lambda u}{D} + \zeta_i + \zeta_{c45^\circ} + \zeta_{c90} = \frac{0,02 \cdot 30}{0,1} + 0,5 + 0,183 + 0,998 = 7,671$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,0105}{\pi \cdot 0,1^2} = 1,337 \text{ m/s}$$

**9.3.** Să se dimensioneze o conductă lungă în serie pentru transportul debitului  $Q=50 \text{ l/s}$ , pe distanța  $L=1200 \text{ m}$ , sub o sarcină  $H^*=5 \text{ m}$ . Se cunosc  $\lambda_g = 0,017$  și seria de diametre utilizabile între 100...400mm, din 50 în 50 mm (conform fig. 9.10).

**Rezolvare:** Se consideră diametrul continuu și din condiția

$$H^* = hr = \frac{\lambda l V^2}{D 2g} = \frac{8 \lambda l Q^2}{\pi^2 g D^5}$$

Rezultă diametrul care ar trebui să-l aibă conducta lungă cu diametru unic

$$D = \left( \frac{8 \lambda l Q^2}{g \pi^2 H^*} \right)^{1/5} = \left( \frac{8 \cdot 0,017 \cdot 1200 \cdot 0,5^2}{9,81 \cdot 5 \cdot \pi^2} \right)^{1/5} = 0,243 \text{ m}$$

Conducta va fi echipată cu două diametre pe sectoare:  $D_1=250 \text{ mm}$  pe lungimea  $l_1$  și  $D_2=200 \text{ mm}$  pe distanța  $l_2$ . Lungimile  $l_1$  și  $l_2$  rezultă din sistemul

$$\begin{cases} j_1 l_1 + j_2 l_2 = H^* \\ l_1 + l_2 = L \end{cases}$$

unde

$$j_1 = \left( \frac{8 \lambda Q^2}{g \pi^2 D_1^5} \right) = \left( \frac{8 \cdot 0,017 \cdot 0,05^2}{9,81 \cdot 0,25^5 \cdot \pi^2} \right) = 3,60 \cdot 10^{-3}$$

$$j_2 = \left( \frac{8 \lambda Q^2}{g \pi^2 D_2^5} \right) = \left( \frac{8 \cdot 0,017 \cdot 0,05^2}{9,81 \cdot 0,2^5 \cdot \pi^2} \right) = 10,97 \cdot 10^{-3}$$

Din sistemul anterior se obține

$$l_1 = \frac{H^* - j_2 L}{j_1 - j_2} = \frac{5 - 10,97 \cdot 10^{-3} \cdot 1200}{3,6 \cdot 10^{-3} - 10,97 \cdot 10^{-3}} = 1107 \text{ m}$$

$$l_2 = L - l_1 = 1200 - 1107 = 93 \text{ m}$$

Pierderile de sarcină pe cele două sectoare sunt;

$$hr_1 = j_1 \cdot l_1 = 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 1107 = 3,98 mCA$$

$$hr_2 = j_2 \cdot l_2 = 10,97 \cdot 10^{-3} \cdot 93 = 1,02 mCA$$

deci

$$H^* = hr = hr_1 + hr_2 = 3,98 + 1,02 = 5 mCA$$

**9.4.** Trei conducte legate în paralel au modulii de rezistență  $M_1=465 s^2/m^5$ ,  $M_2=1320 s^2/m^5$ ,  $M_3=849 s^2/m^5$  și transportă debitul total  $Q=350 l/s$ . Să se determine debitul firelor și sarcina sub care lucrează (vezi fig. 9.11).

**Rezolvare:** Cele trei conducte legate paralel lucrează sub aceeași sarcină,  $H^* = M_1 Q_1^2 = M_2 Q_2^2 = M_3 Q_3^2$  și transportă debitul  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ . Prin explicitarea (9.34) rezultă

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \text{ și } Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{M_1}{M_3}}$$

Se poate scrie

$$Q = Q_1 \left( 1 + \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} + \sqrt{\frac{M_1}{M_3}} \right) \text{ sau } Q_1 = \frac{Q}{1 + \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} + \sqrt{\frac{M_1}{M_3}}},$$

deci

$$Q_1 = \frac{0,35}{1 + \sqrt{\frac{465}{1320}} + \sqrt{\frac{465}{849}}} = 0,150 m^3 / s,$$

respectiv

$$Q_2 = 0,15 \sqrt{\frac{465}{1320}} = 0,089 m^3 / s \text{ și } Q_3 = 0,15 \sqrt{\frac{465}{849}} = 0,11 m^3 / s$$

Sarcina sistemului este:

$$H^* = 465 \cdot 0,15^2 = 10,46 m$$



**9.5.** Trei rezervoare  $R_1, R_2, R_3$  sunt legate între ele prin trei conducte care au branșament comun în punctul I. Conductele au modulele de rezistență  $M_1=410 \text{ s}^2/\text{m}^5$ ,  $M_2=350 \text{ s}^2/\text{m}^5$  și  $M_3=250 \text{ s}^2/\text{m}^5$ . Să se determine distribuția debitelor pe conducte și cota piezometrică în punctul I, când cotele luciului apei în rezervoare sunt  $H_1=40\text{m}$ ,  $H_2=37\text{m}$  și  $H_3=30\text{m}$ .

**Rezolvare:** Pentru stabilirea direcției de curgere se presupun  $Q_2 = 0$ , deci  $Q_1 = Q_3$  și se determină cota piezometrică în punctul I în această ipoteză

$$Q_1 = Q_3 = \sqrt{\frac{H_1 - H_3}{M_1 + M_3}} = \sqrt{\frac{40 - 30}{410 + 250}} = 0,1231 \text{ m}^3 / \text{s}$$

respectiv

$$H_I = H_1 - M_1 Q_1^2 = 40 - 410 \cdot 0,1231^2 = 33,79 \text{ mCA}$$

$$H_I = H_3 + M_3 Q_3^2 = 30 + 250 \cdot 0,1231^2 = 33,79 \text{ mCA}$$

Fiindcă  $H_2 > H_I$  curgerea pe sistem este conform fig. 9.1, fiind valabile relațiile (9.38') și (9.40'). Scăzând primele două ecuații ale sistemului (9.40') se obține

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_1 - H_2 + M_2 Q_2^2}{M_1}},$$

iar din scăderea ultimelor două ecuații sistemul (9.40') avem:

$$H_2 - H_3 = M_3 Q_3^2 + M_2 Q_2^2.$$

Înlocuind  $Q_3$  din (9.38'), rezultă o ecuație în  $Q_2$ .

$$\left( \frac{M_2 - M_3}{M_1} + M_2 + M_3 \right) Q_2^2 + 2M_3 Q_2^2 \sqrt{\frac{H_1 - H_2 + M_2 Q_2^2}{M_1}} + \frac{M_3}{M_1} (H_1 - H_2) - (H_2 - H_3) = 0$$

După înlocuiri rezultă:

$$813,41 Q_2^2 + 500 Q_2^2 \sqrt{7,52 \cdot 10^{-3} + 0,854 Q_2^2} - 5,1707 = 0$$

care admite soluția  $Q_2 = 0,0548 \text{ m}^3 / \text{s}$ .

Se calculează

$$Q_1 = \sqrt{\frac{40 - 37 + 350 \cdot 0,0548^2}{410}} = 0,0994 \text{ m}^3 / \text{s}$$

apoi

$$Q_3 = 0,0994 + 0,0548 = 0,1542 m^3 / s$$

Sarcina în punctul I este

$$H_I = 40 - 410 \cdot 0,0994^2 = 35,94 m$$

**9.6.** O conductă orizontală cu  $D = 100 \text{ mm}$  are lungimea  $L_D = 200 m$  tranzitează debitul  $Q_T = 4 \text{ l/s}$  și distribuie uniform  $Q_D = 5 \text{ l/s}$ . Panta hidraulică conductei este  $j = 89,25 Q^{1,78}$ , iar sarcina în punctul de alimentare este  $H_A = 10 \text{ mCA}$ . Să se traseze linia piezometrică calculând cota piezometrică din 50 în 50 m.

**Rezolvare:** Situația corespunde fig. 9.15. În calcule se aplică relațiile (9.44), (9.48) și (9.50'), rezultând:  $Q_D + Q_T = 0,008 m^3/s$

$$j_a = 89,25(0,009)^{1,78} = 0,0204$$

$$q = \frac{Q_D}{L_D} = \frac{0,005}{200} = 2,5 \cdot 10^{-5} m^3 / s$$

$$L_T = \frac{Q_T}{q} = \frac{0,004}{2,5 \cdot 10^{-5}} = 160 m$$

- la  $x = 0$ ;  $hr_{(0)} = 0$ ;  $H_{(0)} = H_A = 50 mCA$

- la  $x = 50 m$

$$hr_{(50)} = j_a \frac{L_T + L_D}{b+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{L_T + L_D} \right)^{b+1} \right] = 0,0204 \frac{160 + 200}{1,78} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{50}{160 + 200} \right)^{1,78+1} \right] = 0,9 m$$

$$H_{(50)} = H_A = hr_{(50)} = 10 - 0,9 = 9,10 m$$

- la  $x = 100 m$

$$hr_{(100)} = 2,642 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{100}{360} \right)^{2,78} \right] = 1,57 m$$

$$H_{(100)} = 10 - 1,57 = 8,43 m$$

- la  $x = 150 \text{ m}$

$$hr_{(150)} = 2,642 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{150}{360} \right)^{2,78} \right] = 2,05 \text{ m}$$

$$H_{(150)} = 10 - 2,05 = 7,95 \text{ m}$$

- la  $x = 200 \text{ m}$

$$hr_{(200)} = 2,642 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{200}{360} \right)^{2,78} \right] = 2,36 \text{ m}$$

$$H_{(200)} = 10 - 2,36 = 7,64 \text{ m}$$

Epura presiunii corespunde fig. 9.27

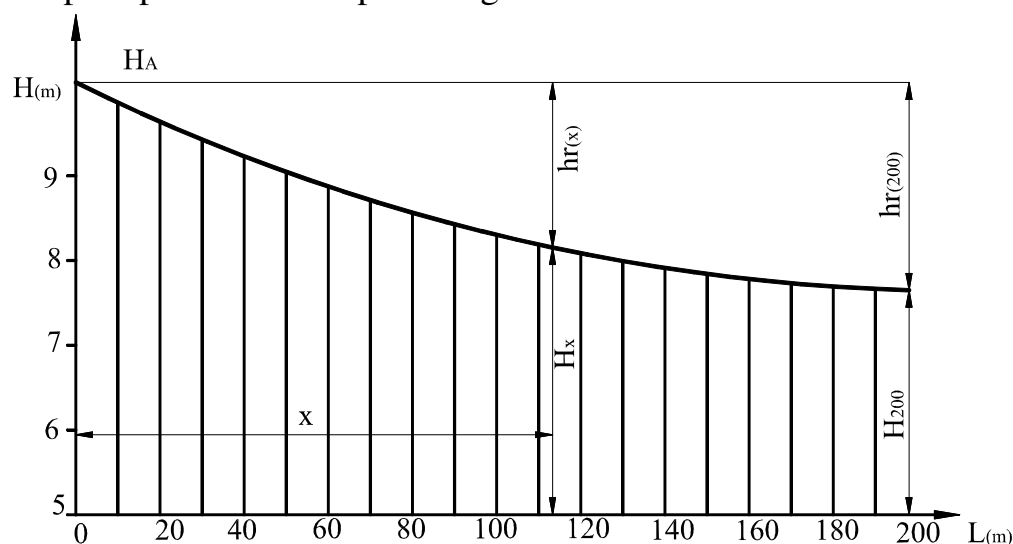


Fig. 9.27 Epura presiunii pe conductă

**9.7.** Să se determine diametrul economic al unei conducte din oțel care transportă debitul  $Q = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$  pe distanța  $L = 1500 \text{ m}$ , cunoscând timpul de funcționare anual  $T = 1500 \text{ ore}$ , randamentul global al alimentării prin pompare  $\eta = 0,75$ , prețul unitar al energiei  $P_e = 12 \text{ lei/kWh}$ , prețul unitar al conductei  $F_c = a + cD^b = 420 + 10180D^{0,88}$  (în lei/m, pentru  $D$  în m), cota de amortizare  $r = 8\%$  și panta hidraulică

$$j = xQ^y D^{-(3+y+z)} = 2,19 \cdot 10^{-3} Q^2 D^{-5,33}.$$

**Rezolvare:** Costul total al conductei se compune din amortismentul investiției și cheltuielile de energie pentru transport

$$C_T = C_a + C_e$$

Amortismentul este  $C_a = r \cdot L \cdot P_c = rL(n + cD^b)$ , iar cheltuielile energetice

$$C_e = \frac{\gamma Q h r T P_e}{\eta} = \frac{\gamma Q j L T P_e}{\eta} = \frac{\gamma Q T P_e L x Q^y D^{-(3+y+z)}}{\eta}$$

Cheltuielile totale sunt

$$C_T = rL(a + cD^b) + \frac{\gamma T P_e L x Q^{y+1} D^{-(3+y+z)}}{\eta} = \text{minim}$$

La diametru continuu, cu  $D > 0$ , avem

$$\frac{dC_T}{dD} = bcrLD^{b-1} - \frac{\gamma T P_e L x Q^{y+1} (3+y+z)}{\eta} D^{-(4+y+z)} = 0$$

sau

$$D = \left[ \frac{\gamma T P_e x (3+y+z) Q^{y+1}}{bcr\eta} \right]^{\frac{1}{3+y+z+b}} = \left[ \frac{9,810 \cdot 1500 \cdot 12 \cdot 2,19 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5^3 \cdot 5,33}{0,88 \cdot 10180 \cdot 0,08 \cdot 0,75} \right]^{\frac{1}{6,21}} = 1,51m$$

**9.8.** Să se dimensioneze rețeaua ramificată din fig. 9.28 alimentată prin pompare, cunoscând: presiunea de serviciu  $H_s = 40mCA$ , caracteristicile tronsoanelor (tab. 9.2), seria de diametre ale conductelor din azbociment și prețul lor unitar (tab. 9.3), cota de amortizare a rețelei  $r = 0,043$ , expresia pantei hidraulice  $J = 1,544 \cdot 10^{-3} Q^{1,87} D^{-4,87}$ , amortismentul în stația de pompare  $C_{asp} = 168000 + 4360H_{sp}$ , randamentul pompării  $\eta = 0,85$ , prețul unitar al energiei  $P_e = 12lei / kWh$ . Cotele terenului în noduri sunt trecute pe figură sub numărul nodului.

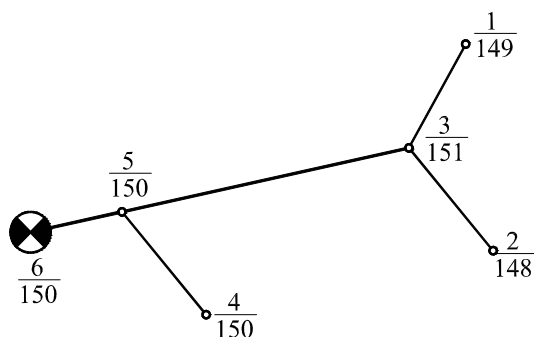


Fig. 9.28 Schema rețelei ramificate

Tabelul 9.2. Caracteristicile tronsoanelor

Tronson	L (m)	Q (l/s)	W (10 <sup>3</sup> m <sup>3</sup> / an)
1-3,2-3,4-5	800	30	150
3-5	1000	60	300
5 -6	500	60	450

Tabelul 9.3. Tuburi din azbociment și costul lor

Dn (mm)	100	125	150	200	250	300	350
P <sub>e</sub> (lei/m)	1472	1616	1776	2240	2995	3920	5216

Rezolvare:

1. Se calculează pentru fiecare tronson, considerat independent, diametrul economic (tab.9.4), știind

$$C_T = C_a + C_e$$

$$C_a = rLP_c = 0,043LP_c$$

$$C_e = \frac{\gamma \cdot W \cdot hr \cdot P_e}{3600\eta} = \frac{9,81 \cdot 12}{3600 \cdot 0,85} W \cdot hr = 0,03847 \cdot W \cdot hr$$

Tabelul 9.4 Calculul diametrului economic al tronsoanelor independente

Tronson	Q (m <sup>3</sup> /s)	D (mm)	100j	hr (mCA)	P <sub>c</sub> (lei/m)	C <sub>ac</sub>	C <sub>e</sub>	C <sub>T</sub>
						(mii lei/an)		
1-3 2-3	0,03	150	2,256	18,05	1766	60,75	104,16	164,91
		200	0,556	4,45	2240	77,06	25,68	102,74
		250	0,137	1,50	2995	103,03	8,66	111,69
3-5	0,06	250	0,685	6,85	2995	128,79	79,06	207,85
		300	0,282	2,82	3920	168,56	32,55	201,11
		350	0,133	1,33	5216	224,29	15,35	239,64
5-6	0,06	250	0,685	3,42	2995	64,39	59,21	123,60
		300	0,282	1,41	3920	84,28	24,41	108,69
		350	0,133	0,67	5216	112,14	11,60	123,74

2. Se determină traseul cel mai favorabil și cel mai nefavorabil, calculând cota piezometrică în punctul 6:

-traseul 1-3-5-6:

$$H_6 = Z_{T1} + H_s + hr_{13} + hr_{35} + hr_{56} = 149 + 40 + 4,45 + 2,82 + 1,41 = 197,68m$$

-traseul 2-3-5-6:

$$H_6 = Z_{T2} + H_s + hr_{2-3} + hr_{35} + hr_{56} = 149 + 40 + 4,45 + 2,82 + 1,41 = 196,68m$$

- traseul 4-5-6:

$$H_6 = Z_{T4} + H_s + hr_{45} + hr_{56} = 150 + 40 + 4,45 + 1,41 = 195,86m$$

Traseul cel mai favorabil este 4-5-6, cel mai nefavorabil 1-3-5-6, iar traseu intermediar 2-3-5-6.

**3. Echiparea rețelei.** Se acceptă pentru traseul intermediar diametrul economic, deci pe 5-6,  $D=300 \text{ mm}$ , pe 3-5,  $D=300 \text{ mm}$ , iar pe 3-2,  $D=200 \text{ mm}$ .

\*Se determină cotele piezometrice și presiunile disponibile pe traseul intermediar

$$Z_2 = Z_{T2} + H_s = 148 + 40 = 188m$$

$$Z_3 = Z_2 + hr_{23} = 188 + 4,45 = 192,45 \text{ m}$$

$$H_3 = Z_3 - Z_{T3} = 192,45 - 151 = 41,45m$$

$$Z_5 = Z_3 + hr_{35} = 192,45 + 2,82 = 195,27m$$

$$H_5 = Z_5 - Z_{T5} = 195,27 - 150 = 45,27m$$

$$Z_6 = Z_5 + hr_{56} = 195,27 + 1,41 = 196,68m$$

$$H_6 = Z_6 - Z_{T6} = 196,68 - 150 = 46,68m$$

\*Se determină pierderile de sarcină admise pe tronsoanele 1-3 și 4-5.

- pe tronsonul 1-3

$$Z_1 = Z_{T1} + H_s = 149 + 40 = 189m$$

$$hr_{23} = Z_3 - Z_1 = 192,45 - 189 = 3,45m$$

Fiindcă  $hr_{23}$  se încadrează între pierderea realizată de  $D_{ec}$  și următorul diametru mai mare, tronsonul 1-3 se va echipa cu aceste două diametre

$$\begin{cases} hr_{23} = j_{l(ec)} l_1 + j_2 l_2 \\ L_{23} = l_1 + l_2 \end{cases}$$

sau

$$l_1 = \frac{hr_{23} - j_2 L_{23}}{j_{l(ec)} - j_2} = \frac{3,45 - 0,00187 \cdot 800}{0,00556 - 0,00187} = 529,5m$$

$$l_2 = 270,5$$

Deci tronsonul 1-3 pe  $l_1=529,5 \text{ m}$  are diametrul  $D_{ec}=200 \text{ mm}$ , iar pe  $l_2=270,5 \text{ m}$ ,  $D=250 \text{ mm}$ .

- pe tronsonul 4-5

$$Z_4 = Z_{T4} + H_s = 150 + 40 = 190m$$

$$hr_{45} = Z_5 - Z_4 = 195,27 - 190 = 5,27m$$

Pe tronsonul 4-5 se pune pe primul sector  $D_{ec}$ , iar pe al doilea  $D < D_{ec}$  întrucât  $hr$  admis se încadrează între pierderile realizate de aceste diametre dacă s-ar pune pe toată lungimea, deci:

$$\begin{cases} hr_{45} = j_{l(ec)}l_1 + j_2l_2 \\ L_{45} = l_1 + l_2 \end{cases}$$

sau

$$l_1 = \frac{hr_{45} - j_2L_{45}}{j_{l(ec)} - j_2} = -\frac{5,27 - 0,02256 \cdot 800}{0,00556 - 0,02256} = 751,6m$$

$$l_2 = L_{45} - l_1 = 800 - 751,6 = 48,4m$$

Așezarea diametrelor pe sectoare se face telescopic, în ordinea descrescândă a diametrelor: cotele piezometrice în nodurile de legătură a sectoarelor vor fi:

- nod  $a$   $Z_a = Z_1 + j_1l_1 = 189 + 0,00556 \cdot 529,5 = 191,94m$
- nod  $b$   $Z_b = Z_4 + j_2l_2 = 190 + 0,02256 \cdot 48,4 = 191,09m$

Epura presiunilor disponibile corespund Fig. 9.29.

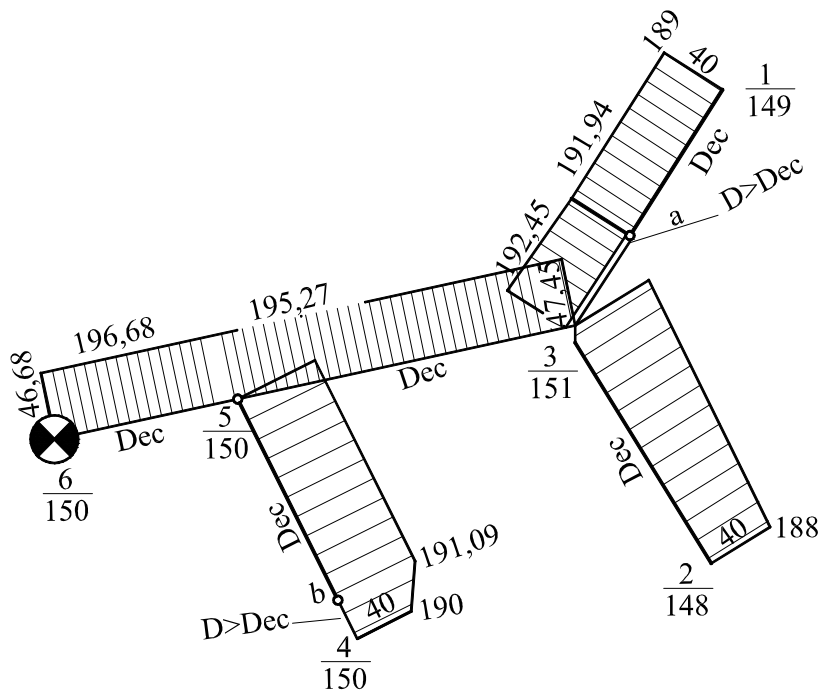


Fig. 9.29. Epura presiunii pe rețeaua ramificată

**9.9** Să se calculeze debitele și epura presiunii pe rețeaua inelară din fig. 9.30 știind lungimile, diametrele tronsoanelor, debitele în noduri și  $H_s=40\text{ m}$ . Rețeaua este în plan orizontal iar  $\lambda$  se poate calcula după Sevele  $\lambda = 0,021/D^{0,3}$ .

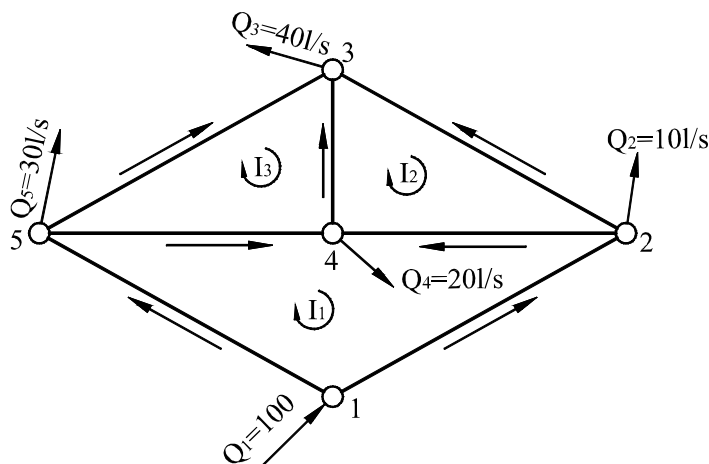


Fig. 9.30 Schema rețelei inelare

**Rezolvare:** Caracteristicile tronsoanelor sunt prezentate în prima parte a tabelului 9.5.

Punctul cel mai nefavorabil este cel mai îndepărtat, în care trebuie asigurată presiunea de serviciu, deci

$$Z_3 = H_s = 40\text{m};$$

$$Z_5 = Z_3 + hr_{35} = 40 + 3.13 = 43,13\text{m};$$

$$Z_2 = Z_3 + hr_{23} = 40 + 2.20 = 42,20\text{m};$$

$$Z_4 = Z_3 + hr_{34} = 40 + 0,38 = 40,38\text{m};$$

$$Z_1 = Z_5 + hr_{25} = 43,13 + 3,78 = 46,91\text{m}.$$



Tabelul 9.5 Calculul de compensație a rețelei inelare

$I_k$	$T_{ij}$	$l_{ij}$ (m)	$D_{ij}$ (mm)	$\lambda_{ij}$	$M_{ij}$ (s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup> )	Corecția inițială		
						$Q_{ij}$ (m <sup>3</sup> /s)	$M_{ij}  Q_{ij} $	$M_{ij} Q_{ij}^2$
1	1-2	1000	250	0.0318	2693	0,400	107,72	-4,309
	1-5	1000	300	0.0301	1025	0,060	61,50	3,690
	2-4	400	150	0.0371	16148	0,014	226,07	-3,165
	4-5	200	125	0.0392	21220	0,010	212,20	2,122
							607,49	-1,662
						$\Delta Q_{1(0)} = -\frac{-1,662}{2 \cdot 607,49} = 0,0014$		
2	2-3	800	200	0.0340	7030	0,016	112,48	-1,800
	2-4	400	150	0.0371	16148	0,014	226,07	3,165
	3-4	200	100	0.0419	69242	0,004	276,97	1,108
							615,52	2,473
						$\Delta Q_{2(0)} = -\frac{2,473}{2 \cdot 615,52} = -0,0020$		
3	3-5	900	200	0.0340	7909	0,020	158,18	3,164
	4-5	200	125	0.0392	21220	0,010	212,20	-2,122
	3-4	200	100	0.0419	69242	0,004	276,97	-1,108
							647,35	-0,066
						$\Delta Q_{3(0)} = -\frac{-0,066}{2 \cdot 647,35} = -5 \cdot 10^{-5}$		

Corecția 1			Corecția 2		
$Q_{ij}$ (m <sup>3</sup> /s)	$M_{ij}  Q_{ij} $	$M_{ij} Q_{ij}^2$	$Q_{ij}$ (m <sup>3</sup> /s)	$M_{ij}  Q_{ij} $	$M_{ij} Q_{ij}^2$
0,0386	103,95	-4,012	0,03927	105,75	-4,153
0,0614	62,94	3,864	0,06073	62,25	3,780
0,0106	171,17	-1,814	0,01150	185,70	-2,136
0,01135	240,85	2,734	0,01085	230,24	2,498
	578,91	+0,772		583,94	-0,010
$\Delta Q_{1(1)} = -\frac{0,771}{2 \cdot 578,91} = 0,00067$			$\Delta Q_{1(2)} = -\frac{-0,010}{2 \cdot 583,54} = 0,7 \cdot 10^{-6}$		
0,0180	126,54	-2,278	0,01777	124,94	-2,220
0,0106	171,17	1,814	0,01150	185,70	2,136
0,00195	135,02	0,263	0,00235	162,73	0,382
	432,73	-0,200		583,94	0,298
$\Delta Q_{2(1)} = -\frac{-0,200}{2 \cdot 432,73} = 0,00023$			$\Delta Q_{2(2)} = -\frac{0,298}{2 \cdot 583,94} = -0,00031$		
0,02005	158,58	3,179	0,01988	157,23	3,126
0,01135	240,85	-2,733	0,01085	230,24	-2,498
0,00195	135,02	-0,263	0,00235	162,72	-0,382
	345,44	0,183		550,19	0,245
$\Delta Q_{3(1)} = -\frac{0,183}{2 \cdot 534,44} = -1,7 \cdot 10^{-4}$			$\Delta Q_{3(2)} = -\frac{0,245}{2 \cdot 550,19} = -0,00022$		

## CAPITOLUL 10

### MIȘCAREA NEPERMANENTĂ A LICHIDELOR ÎN SISTEME HIDRAULICE SUB PRESIUNE

Mișcarea nepermanentă a lichidelor în conducte sub presiune este un caz normal de funcționare a acestora. Această mișcare este întreținută în sistemele hidraulice de variația cererii consumului în timp, de pornirea și oprirea instalațiilor sau de avarii. Schimbarea parametrilor hidraulici în timp este principala caracteristică a acestor mișcări și ca efect se poate nota suprasolicitarea sistemului hidraulic.

În amenajările cu caracter hidrotehnic aceste mișcări se întâlnesc curent la rețelele de conducte sub presiune, la stațiile de pompare, la aducțiuni și distribuții gravitaționale sub presiune, la subtraversări sifonate, alimentări cu apă potabilă, industrială etc.

În acest capitol se fac referiri la descrierea fizică a fenomenului, calculul vitezei de propagare a undelor, ecuațiile mișcării și modul de soluționare a acestora, particularitățile fenomenului în instalațiile hidraulice specifice meseriei, metode și mijloace de protecție ale instalațiilor împotriva efectelor loviturii de berbec și unele fenomene asociate cu lovitura de berbec. Se analizează și câteva cazuri practice care ajută la înțelegerea aspectelor teoretice și introduce pe viitorul specialist în problematica concretă, frecvent întâlnită în practica de zi cu zi.

#### 10.1. Noțiuni generale

Datorită variației în timp a condițiilor limită, mișcarea lichidelor în conducte sub presiune aproape în toate cazurile este nepermanentă - numai pe anumite intervale mici de timp și cu aproximație se poate considera mișcare permanentă.

Proiectarea instalațiilor hidraulice trebuie să cuprindă cel puțin și calcule de verificare în mișcarea nepermanentă, iar regulamentele de exploatare trebuiesc riguros respectate pentru a nu suprasolicita sistemele hidraulice prin aceste mișcări nepermanente. Calculele se întocmesc pentru cele mai nefavorabile condiții de funcționare.

În funcție de viteza variației în timp a parametrilor hidraulici se întâlnesc:  
- **mișcări nepermanente lent variate** - când mărimile caracteristice ale mișcării (viteze, presiuni) variază așa de lent încât se poate accepta în descrierea fenomenului modelul de fluid **incompresibil**, și

- **mişcări nepermanente rapid variate** - când variația în timp a mărimilor este relativ bruscă și calculele trebuie să țină seama de *compresibilitatea* lichidului și de *elasticitatea* conductelor.

Mișcările nepermanente lent variate se mai numesc **oscilații de masă** și se întâlnesc în sisteme sub presiune prevăzute cu rezervoare cu nivel liber (castele de echilibru) sau cu pernă de aer și în cazurile în care condițiile inițiale ale mișcării corespund echilibrului hidrostatic sau sunt apropiate de acestea.

Mișcările nepermanente rapid variate - **lovitura de berbec** - au loc în sisteme sub presiune când condițiile la limită se modifică brusc. Acest fenomen se propagă sub formă de unde, cu viteze foarte mari și este însoțit de variații mari ale presiunii, produce șocuri în instalații hidraulice, care poate conduce la avarii. Fenomenul se recunoaște prin zgomotele și vibrațiile puternice pe care le produce. Datorită vitezei mari de propagare și a duratei mici a oscilațiilor de presiune, pentru primele oscilații (cu o oarecare aproximare) se acceptă neglijarea frecărilor, însă de acestea trebuie ținut seama încât generează acele forțe care amortizează în timp fenomenul.

Una din metodele și mijloacele cele mai eficiente de atenuare a efectelor loviturii de berbec este transformarea mișcării **rapid variate** în mișcare **lent variată** prin rezervoare (deschise sau cu pernă de aer).

## 10.2. Mișcare nepermanenta rapid variată (Lovitura de berbec)

### 10.2.1. Descrierea fizică a fenomenului loviturii de berbec

Așa cum s-a arătat, lovitura de berbec este fenomenul de mișcare nepermanentă rapid variată a lichidelor în conducte sub presiune, ca urmare a modificării rapide a condițiilor la limită.

#### 10.2.1.1. Aspectul calitativ al fenomenului

Pentru înțelegerea fenomenului se prezintă această descriere calitativă a fenomenului.

Se consideră un rezervor cu lichid, având suprafața nivelului liber la cota  $h_0$  constantă față de axa conductei, care alimentează o conductă lungă orizontală, de secțiune  $A$ , prin care curge lichid la parametrii hidraulici inițiali constanți  $Q_0, V_0, p_0$  (fig. 10.1). Se presupune ca robinetul  $O$  din capătul aval al conductei se închide instantaneu. Dacă lichidul ar fi incompresibil și pereții conductei perfect rigizi tot lichidul s-ar opri instantaneu la închiderea robinetului.

În ipoteza neglijării frecărilor, considerării compresibilității lichidului (model de fluid pascalian) și a elasticității conductei, fenomenul se explică astfel: în momentul închiderii instantanee a robinetului din secțiunea  $O$ , particulele de lichid în contact cu robinetul se opresc, dar restul lichidului din conductă se mișcă cu viteza inițială  $V_0$  (datorită inerției) și comprimă stratul de lichid oprit la robinet. Comprimarea are loc conform compresibilității izoterme, care are loc sub acțiunea creșterii presiunii la valoarea  $p_0 + \Delta p$  (în masa de lichid oprită lângă robinet). Odată cu creșterea presiunii se deformează și conducta de la secțiunea  $A$  la  $A + \Delta A$ . După oprirea și comprimarea particulelor de lichid din imediata vecinătate a robinetului se opresc și se comprimă succesiv alte straturi de lichid - dinspre robinet spre rezervor - crescând presiunea cu  $\Delta p$  în straturile oprite și deformându-se și conducta. Fenomenul de oprire și comprimare a lichidului din aproape în aproape (cu creșterea presiunii cu  $\Delta p$  și deformării secțiunii cu  $\Delta A$ ) se transmite din aval (pct.  $O$ ) spre amonte (pct.  $R$ ) sub forma unei unde.

Când tot lichidul de pe conductă s-a comprimat, respectiv a crescut presiunea cu  $\Delta p$  și s-a dilatat conducta cu  $\Delta A$ , viteza s-a anulat în toată masa lichidului de pe conductă (energia cinetică s-a transformat în energia potențială elastică a lichidului și conductei). Acesta poziție de repaus este instantanee, fiindcă în secțiunea de îmbinare a rezervorului cu conducta, în secțiuni infinite vecine ( $R$  în conductă,  $r$  în rezervor) există diferența de presiune  $\Delta p$  (în  $R$  este  $p_0 + \Delta p$  în  $r$  este  $p_0 = \gamma h_0$ ) care, împreună cu tensiunea din peretele conductei, pune în mișcare inversă lichidul din conductă cu viteza  $V_0$ . Astfel lichidul pus în mișcare ajunge la presiunea inițială, iar conducta la secțiunea  $A$ , progresiv, (strat cu strat) din secțiunea  $R$  spre  $O$ . În momentul când fenomenul a ajuns în  $O$  tot fluidul are presiunea  $p_0$ , viteza  $-V_0$ , iar secțiunea a revenit la  $A$ . Timpul de la momentul închiderii robinetului, a propagării comprimării și decompresiei lichidului din  $O$  în  $R$  și invers este timpul necesar fenomenului - undei de presiune - pentru parcurgerea distanței  $2L$  cu viteza sa de propagare  $c$  (celeritate):

$$\tau = \frac{2L}{c}. \text{ În acest moment lichidul din conductă are viteza } -V_0 \text{ și datorită inerției}$$

continuă mișcarea dinspre  $O$  spre  $R$ . Robinetul în  $O$  fiind închis, lichidul de lângă robinet rămâne pe loc și este "întins", dilatat, în masa lichidă oprită producându-se scăderea presiunii cu  $\Delta p$ , conform legii compresibilității, la valoarea  $p_0 - \Delta p$ . Dilatarea lichidului, însoțită de scăderea presiunii și micșorarea secțiunii (cu  $\Delta A$  conform legii elasticității), odată cu anularea vitezei se propagă din strat în strat spre rezervor. Când fenomenul ajunge în secțiunea rezervorului - sub formă de undă - tot lichidul din conductă este în repaus, are presiunea

$p_0 - \Delta p$  și secțiunea este  $A - \Delta A$ . Existența instantanee a diferenței de presiune  $p_0 - (p_0 - \Delta p) = + \Delta p$  între secțiunile  $r$  și  $R$ , respectiv efortul din peretele conductei, produce mișcarea lichidului dinspre  $R$  spre  $O$  cu viteza inițială  $V_0$ .

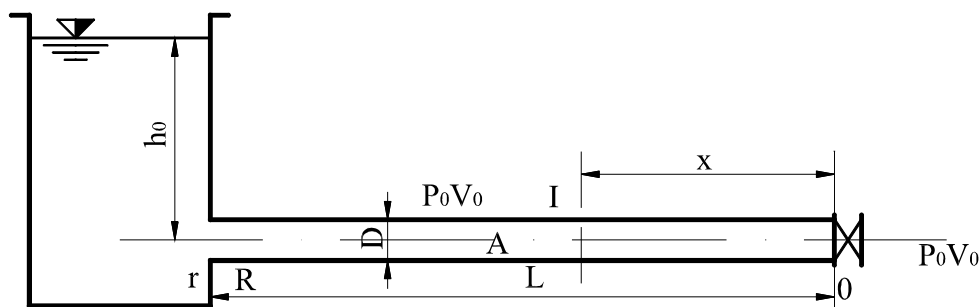


Fig. 10.1. Schema conductei

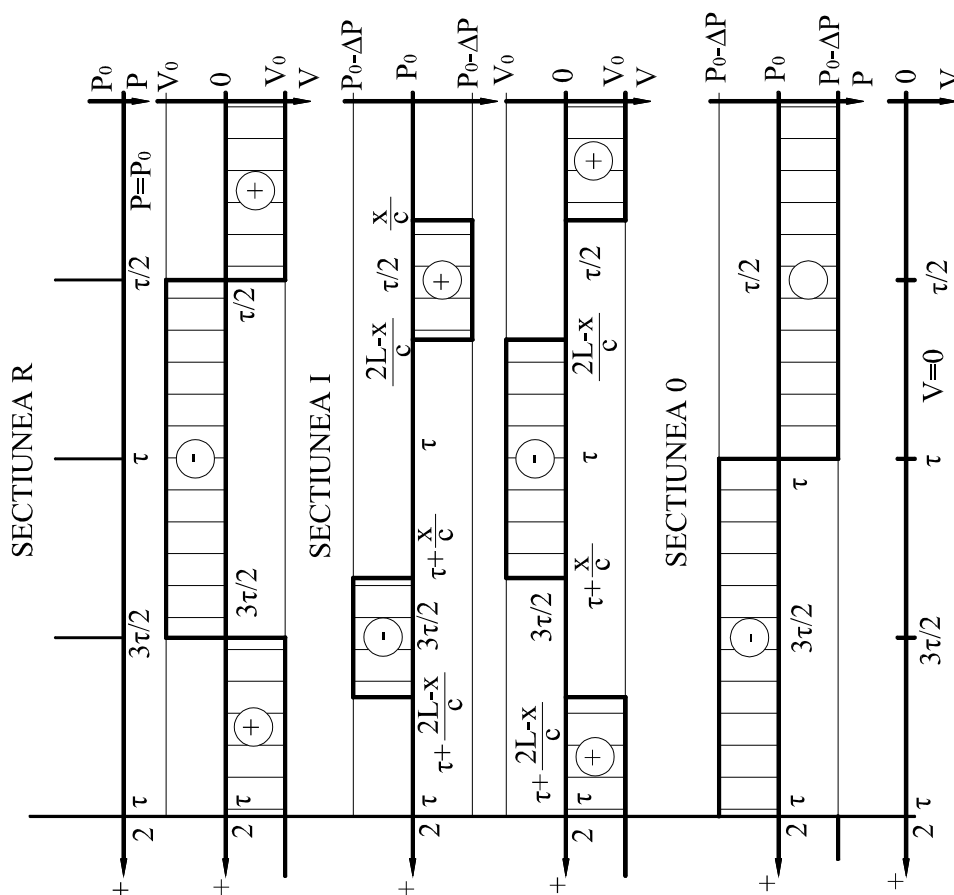


Fig. 10.2 Variația presiunii și vitezei în secțiunile conductei pentru model de lichid Pascalian

Destinderea lichidului - corespunzătoare presiunii  $p_0$  - și a secțiunii conductei, însoțită de punerea în mișcare a lichidului cu  $V_0$  se propagă, strat cu strat cu viteza  $c$ , până în secțiunea  $O$ . Instantaneu, după timpul  $2\tau$ , parametri mișcării lichidului revin la cei inițiali  $p_0$ ,  $V_0$ . După un astfel de ciclu complet fenomenul descris se repetă sub forma unei mișcări oscilatorii. Amplitudinea variației parametrilor  $p$  și  $V$  se reduce în timp datorită frecărilor vâscoase și turbulente.

În concluzie, la analiza și calculul loviturii de berbec trebuie ținut seama de compresibilitatea lichidului, elasticitatea conductei și de frecare - model de lichid real. Epura presiunii și vitezei pe conducta în secțiunea  $O$ ,  $R$  și  $I$  corespunde fig. 10.2.

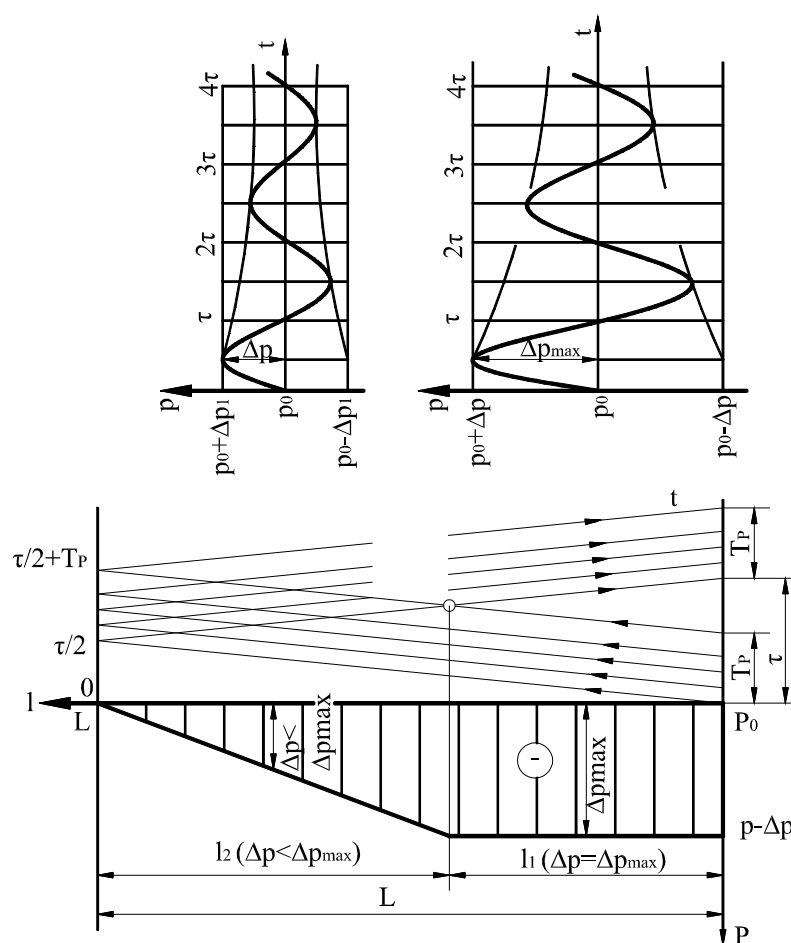
Prima undă care se propagă în lungul conductei, ca urmare a perturbației produse de organul obturator, se numește **undă directă**, iar reflectata ei - care vine de la rezervoare la robinet - **undă inversă**. **Faza directă** a loviturii de berbec într-o secțiune  $I$  de pe conductă, aflată la distanța  $x$  de organul perturbator este perioada de timp cuprinsă între momentul trecerii primei unde directe și momentul sosirii primei unde inverse. **Faza inversă** a loviturii corespunde perioadei dintre momentul trecerii unei unde inverse și momentul sosirii următoarei unde directe.

Datorită faptului că închiderea robinetului din secțiunea  $O$  necesită un anumit timp,  $T$  (timp de perturbare), valoarea maximă a suprapresiunii în  $O$  nu se obține instantaneu, presiunea crește până la valoarea maximă progresiv după legea închiderii robinetului. În perioada închiderii de la organul perturbator pleacă continuu unde directe care pe parcursul conductei întâlnesc unde inverse cu care se compun.

În raport cu mărimea timpului de închidere  $T$  și a timpului unei jumătăți de ciclu  $t$  pot exista două cazuri de lovitură:  $T_p < \tau$  și  $T_p > \tau$ .

### 10.2.2. Lovitură de berbec în conductă monofilară gravitațională pentru $T_p < \tau$

Durata perturbației  $T_p$  fiind inferioară timpului unei jumătăți de ciclu,  $\tau/2$ , undele directe se întâlnesc cu undele inverse pe traseul conductei cu care se compun și dau naștere la suprapresiuni mai mici decât  $\Delta p$ . Afirmatia este valabilă porțiunii de conductă unde are loc acesta întâlnire (fig. 10.3).

Fig. 10.3. Lovitură de berbec pentru  $T_p < \tau$ .

Schema din desen corespunde unei perturbări uniforme în timpul  $T_p$ .

Interferența undelor directe și indirecte pe porțiunea  $l_2$  a conductei conduce la micșorarea suprapresiunii, iar în secțiunea  $L$  toate undele directe întâlnesc unde inverse și presiunea se menține la valoarea  $p_0$ . Pe porțiunea  $l_1$  a conductei undele directe nu întâlnesc unde inverse, suprapresiunea ajungând la valoarea sa maximă. Asemenea situații se întâlnesc în conducte foarte lungi.

### 10.2.3. Lovitură de berbec în conductă monofilară gravitațională pentru $T_p > \tau$

Durata perturbației produsă de organul de închidere este superioară duratei unei jumătăți de ciclu a loviturii de berbec,  $T_p > \tau$ , deci toate undele directe întâlnesc pe traseul conductei unde indirecte cu care se compun.



Rezultanta impunerii undelor conduce la suprapresiune mai mică decât în cazul precedent. Fenomenul este interpretat în fig. 10.4.

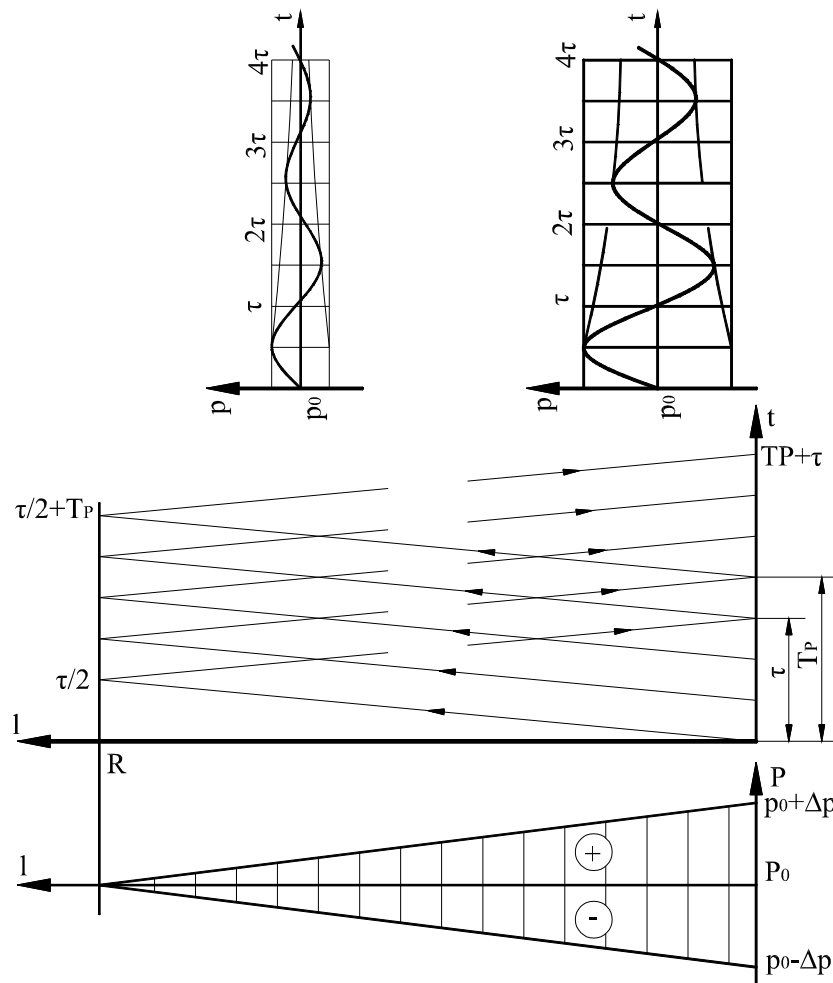


Fig. 10. 4. Lovitură de berbec pentru  $T_p > \tau$ .

Asemenea situații se întâlnesc la conducte scurte sau conducte lungi la care perioada perturbației este superioară lui  $\tau/2$ .

În cele arătate s-a evidențiat că la fenomenul loviturii de berbec trebuie să se opereze cu modelul de lichid real-greu, compresibil și vâscos. Compresibilitatea evidențiază aspectul fizic al fenomenului și presiunile extreme, iar vâscozitatea are rol de amortizare a oscilațiilor de presiune, de fapt a fenomenului însuși. Este necesar să se considere elasticitatea conductei (lucrul mecanic al forțelor elastice), care are efect asupra presiunilor extreme și asupra vitezei de desfășurare a fenomenului.

### 10.2.4. Viteza de propagare a undei loviturii de berbec

Viteza de propagare a undelor loviturii de berbec - **celeritatea** ( $c$ ) - se calculează pe baza principiului conservării masei în mișcare nepermanentă. Astfel, pe o porțiune a conductei, în imediata apropiere a organului perturbator (robinet), în timpul  $dt$  presiunea crește cu  $dp$ . Lungimea de conductă pe care are loc creșterea presiunii în intervalul de timp  $dt$  este  $ds = c \cdot dt$ . Creșterea presiunii cu  $dp$  implică creșterea densității, pe seama comprimării, de la  $\rho$  la  $\rho + d\rho$  și la deformarea secțiunii conductei de la  $A$  la  $A + dA$  (fig. 10.5).

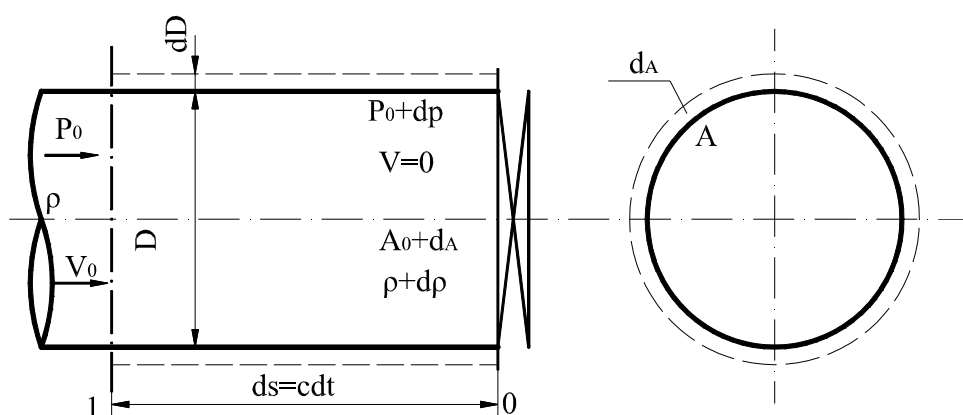


Fig. 10.5. Schemă pentru calculul celerității

În volumul  $Ads$ , în timpul  $dt$ , pe secțiunea 1 intră o masă de lichid  $dm_1$ , care corespunde variației de masă  $dm_2$  din volumul menționat pe seama modificării densității și a deformării secțiunii. Masa de lichid ce intră în timpul  $dt$  în volumul menționat este

$$dm_1 = \rho A V_0 dt \quad (10.1)$$

Variația masei în volumul de control este:

$$dm_2 = (\rho + d\rho)(A + dA)c dt - \rho A c dt \quad (10.2)$$

Efectuând calculul și neglijând termenii care conțin produsul a două mărimi infinitezimale, rezultă:

$$dm_2 = (\rho dA + Ad\rho) c dt \quad (10.2')$$

Din egalitatea  $dm_1 = dm_2$ , conform principiului conservării masei se obține

$$V_0 = c \left( \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \right) \text{ sau } c = \frac{V_0}{\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}} \quad (10.3)$$

De la compresibilitate izotermă se cunoaște că:

$$-\frac{dW}{W} = \frac{d\rho}{\rho} = \beta dp = \frac{dp}{\varepsilon} \quad (10.4)$$

Variația secțiunii conductei este

$$\frac{dA}{A} = \frac{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = 2 \frac{dD}{D} \quad (10.5)$$

Deformația relativă a diametrului  $\frac{dD}{D}$ , are loc sub acțiunea creșterii presiunii, respectiv creșterii efortului unitar din peretele conductei de la  $\sigma$  la  $\sigma + d\sigma$ . Deformarea relativă a diametrului conductei, în zona elastică, sub creșterea efortului unitar cu  $d\sigma$  se poate exprima din legea lui Hook, astfel

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} \quad (10.6)$$

unde  $E$  este modulul de elasticitate a materialului conductei. Din hidrostatică se cunoaște

$$\sigma = \frac{p_0 D}{2e} \quad (10.7)$$

respectiv

$$\sigma + d\sigma = \frac{(p_0 + dp)(D + dD)}{2e} \quad (10.8)$$

$e$  - fiind grosimea peretelui conductei. Efectuând produsul din (10.8) și neglijând termenii ce conțin  $dD$  (foarte mic comparativ cu alți termeni), se obține

$$d\sigma = \frac{Ddp}{2e} \quad (10.9)$$

După înlocuirile necesare, rezultă

$$\frac{dA}{A} = \frac{D}{e} \frac{dp}{E} \quad (10.10)$$

(10.3) devenind

$$c = \frac{V_0}{\left(\frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E} + 1\right) \frac{dp}{\varepsilon}} \quad (10.11)$$

Celeritatea se mai poate calcula cu ajutorul ecuației teoremei impulsului, aplicată volumului de control dintre secțiunile 1 și 2, distanțate la  $ds = cdt$  (fig. 10.6):

$$F = \rho Q'(\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + \bar{F}_{p1} + \bar{F}_{p2} + \bar{G}$$

unde  $Q'$  este fluxul volumic ce se oprește,  $V_2=0$  și proiecția lui  $\bar{F}$  după  $s$  este

$$\rho Q' V_0 - p_0(A + dA) + (p_0 + dp)(A + dA) = 0,$$

care cu  $Q' = \frac{dW}{dt} = \frac{Ads}{dt} = Ac$  și neglijând termenul  $dA \cdot dp$ , devine

$$dp = \rho c V_0 \quad (10.12)$$

care este relația lui Jukovski pentru suprapresiune.

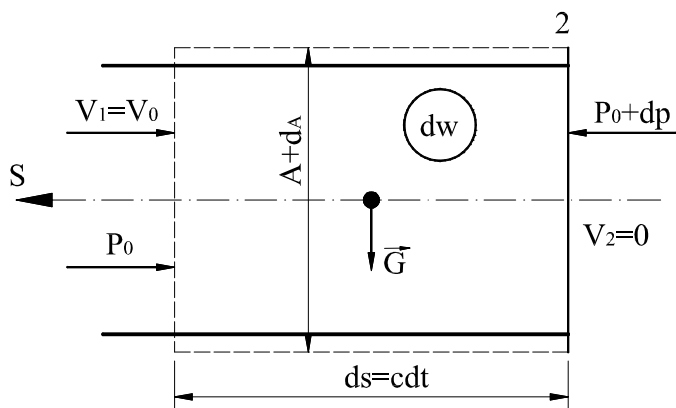


Fig. 10.6. Schemă pentru aplicarea ecuației teoremei impulsului

Înlocuind (10.12) în (10.11) se obține

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} \quad (10.13)$$

unde  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = c_0$  este viteza de propagare a sunetului în medii continui după

Newton. Pentru apă  $c_0 = 1435 \text{ m/s}$ ,  $\varepsilon = 2,06 \cdot 10^4 \text{ daN/cm}^2$ . Valorile modulului de elasticitate pentru diferite materiale de conductă corespund tabelului 10.1.

**Tabelul 10.1** Modulul de elasticitate a unor materiale

Nr. crt.	Materialul	E (daN/cm <sup>2</sup> )	
		variază între	se ia în calcul
1.	oțel aparent	(2,0...2,4)10 <sup>6</sup>	2,06·10 <sup>6</sup>
2.	oțel îngropat		2,25·10 <sup>6</sup>
3.	fonta	(7,5...8,5)10 <sup>5</sup>	8·10 <sup>5</sup>
4.	plumb	(1,5...1,7)10 <sup>5</sup>	1,6·10 <sup>5</sup>
5.	azbociment	-	1,4·10 <sup>5</sup>
6.	beton	(1,5...4)10 <sup>5</sup>	
7.	PVC-G		2 ·10 <sup>5</sup>
8.	cauciuc		10 <sup>2</sup>

### 10.2.5. Ecuațiile diferențiale ale loviturii de berbec

Calculul loviturii de berbec se bazează pe soluționarea ecuațiilor acestui fenomen, care sunt ecuația de continuitate și ecuația energiei, scrise mișcării nepermanente. În conducte cu rigiditate mare  $V \ll c$ ,  $|dA| \ll A$  și compresibilitatea mică a lichidului implică  $|d\rho| \ll \rho$ . Aceste constatări folosesc la simplificarea (liniarizarea) ecuațiilor, prin posibilitatea neglijării unor termeni pe baza constatărilor anterioare.

#### 1. Ecuația de continuitate

Ecuația de continuitate poate fi dedusă din ecuația de continuitate pentru un tub de curent în mișcare nepermanentă, formal din (10.3) sau direct, scriind că variația masei de lichid în conductă între două secțiuni 1 și 2, distanțate la  $ds$ , în timpul  $dt$  este egală cu diferența între cantitatea de lichid care intră și iese din volumul de control (fig. 10.7).

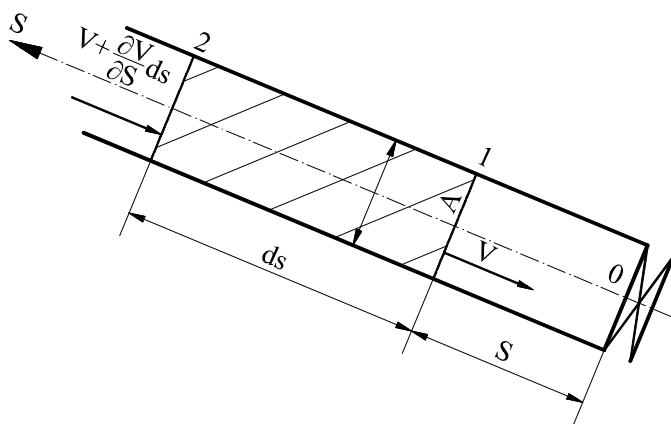


Fig. 10.7. Schemă pentru deducerea ecuației de continuitate

Variația masei de lichid în conductă între secțiunile 1 și 2, situate la distanța  $ds$ , în timpul  $dt$  (ca urmare a variației timpului, într-un spațiu dat) are expresia

$$dm_1 = (\rho + d\rho)(A + dA)ds - \rho A ds \sim (\rho dA + A d\rho)ds \quad (10.14)$$

(s-a neglijat termenul care conține produsul a două mărimi infinitezimale). În secțiunea 1, la distanța  $s$  de organul perturbator, viteza medie a lichidului este

$V$ , iar în secțiunea 2 este  $V + \frac{\partial V}{\partial s} ds$  (la același  $t$ ). Diferența între cantitatea de lichid ce intră și ce iese, în și din volumul de control, este

$$dm_2 = (\rho + d\rho)(A + dA) \left( V + \frac{\partial V}{\partial s} \right) dt - (\rho + d\rho)(A + dA) V dt,$$

sau, cu neglijarea termenilor care conțin pe  $d\rho$  și  $dA$

$$dm_2 \approx \rho A \frac{\partial V}{\partial s} ds dt \quad (10.15)$$

Egalând (10.14) și (10.15), se obține

$$\frac{\partial V}{\partial s} dt = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (10.16)$$

Conform (10.3, 10.11 și 10.12)

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_0}{c} = \frac{dp}{\rho c^2},$$

deci

$$\frac{\partial V}{\partial s} dt = \frac{dp}{\rho c^2} \text{ sau } \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10.17)$$

(S-a înlocuit  $\frac{dp}{dt}$  cu  $\frac{\partial p}{\partial t}$  întrucât variația lui  $dp$  provine din variațiile  $d\rho$  și  $dA$ , produse ca urmare a variației  $dt$ , cu  $s=const.$ ).

## 2. Ecuația energiei

Pentru un curent din tub ecuația energiei în mișcarea nepermanentă, considerând  $\beta = 1$ , este

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + j = 0 \quad (10.18)$$

unde

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{l}{2g} |V| V$$

sunt pierderile de energie. Primul termen din paranteză se mai poate scrie:

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V}{cg} \frac{\partial V}{\partial t}$$

și datorită faptului că  $V \ll c$  se poate neglija. În majoritatea cazurilor practice și  $j$  poate fi neglijat, cel puțin pentru prima oscilație, pierderile de sarcină având rolul de amortizare a fenomenului oscilatoriu. În aceste condiții (10.18), după împărțire cu  $g$  și ținând seama că  $s$  este contrar lui  $V$ , devine:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (10.19)$$

care este ecuația de mișcare simplificată.

### 3. Ecuațiile generale ale loviturii de berbec

Se urmărește eliminarea pe rând a lui  $V$  și  $p$  din ecuațiile (10.17) și (10.19). Ecuația (10.17) se derivează în raport cu  $\partial t$ , iar (10.19) în raport cu  $\partial s$ , obținând:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

și

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$$

sau

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \gamma c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad (10.20)$$

Pentru conducte rectilinii  $\frac{d^2 z}{ds^2} = 0$ , rezultând

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (10.21)$$

Se derivează (10.17) în raport cu  $\partial s$  și (10.19) în raport cu  $\partial t$ , ceea ce permite eliminarea lui  $p$ , obținându-se



$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \quad (10.22)$$

Ecuatiile (6.21) și (6.22) sunt ecuațiile loviturii de berbec în conducte rectilinii sub formă diferențială, fiind neglijate frecările. Aceste ecuații reprezintă ecuația corzilor vibrante (fig. 10.8).

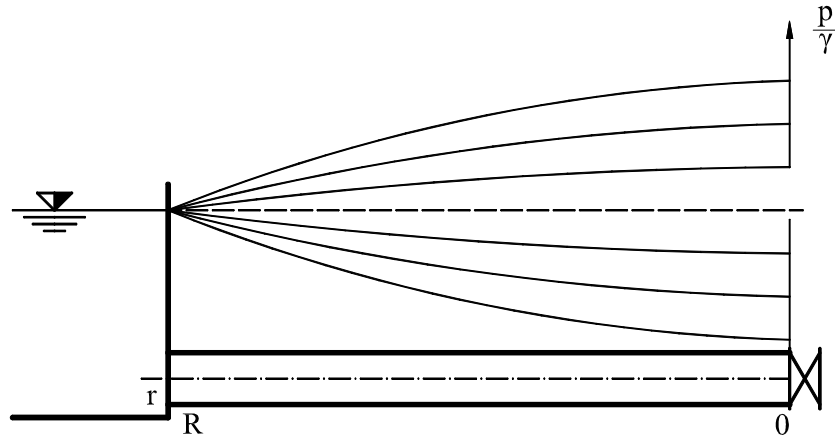


Fig. 10.8. Înfășurătorile variației presiunii pe conductă gravitațională rectilinie la lovitură de berbec

Forma canonică a ecuației (10.21) se obține făcând schimbarea de variabile

$$\xi = s - c \cdot t \text{ și } \eta = s + c \cdot t \quad (10.23)$$

rezultând

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (10.24)$$

În (10.24)  $p$  depinde de  $t$  și  $s$  prin ambele variabile noi  $\xi$  și  $\eta$ . Se integrează (10.24) în raport cu  $\eta$ .

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = F_1(\xi),$$

unde  $F_1(\xi)$  este o funcție arbitrară de variabilă  $\xi$  (derivata sa în raport cu  $\eta$  este evident nulă). Integrând în raport cu  $(\xi)$ , se obține

$$p = \int F_1(\xi) d\xi + f(\eta) + c$$

sau

$$p = F^*(\xi) + f^*(\eta) + c \quad (10.25)$$

unde  $f^*(\eta)$  este o funcție arbitrară de  $\eta$ , iar  $F^*(\xi)$  o funcție arbitrară de  $\xi$ . Constanta de integrare rezultă din condițiile inițiale. Pentru  $t=0$ , în orice secțiune  $s$ , se pune condiția  $F^*(\xi)$  și  $f^*(\eta)=0$ . Variabila  $p$  ia valorile  $p = p_0$ , unde  $p_0$  poate fi o funcție de  $s$ . Rezultă  $c = p_0$ , deci

$$p - p_0 = F^*(\xi) + f^*(\eta) \quad (10.25')$$

Revenind la variabilele inițiale avem:

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) + f^*(s + c \cdot t) \quad (10.26)$$

funcțiile  $F^*(s - c \cdot t)$  și  $f^*(s + c \cdot t)$  fiind funcții arbitrare. Ele se determină din condițiile la limită.

Cunoscând soluția pentru  $p$ , soluția ecuației (10.22) se obține pe baza fig. 10.9 asemănător cazului precedent.

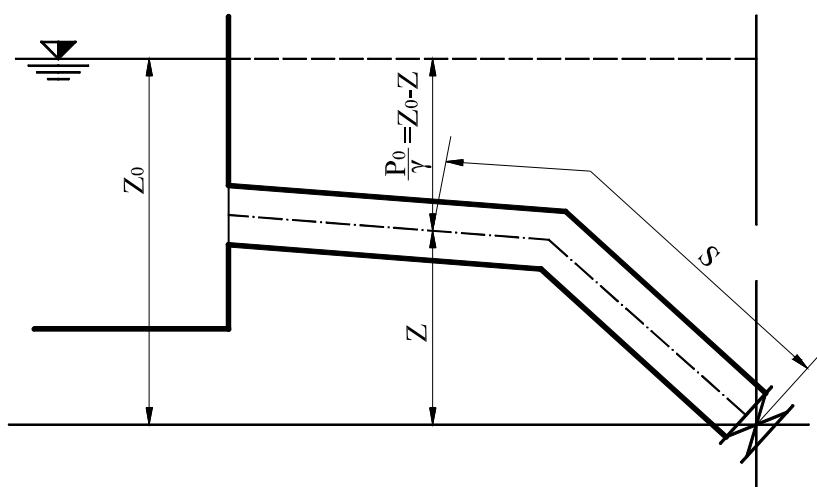


Fig. 10.9. Schemă pentru soluționarea ecuației (10.22)

Pentru conducta formată din tronsoane rectilinii, presiunea  $p_0$ , la momentul  $t=0$ , are expresia

$$p_0 = \gamma(z_0 - z)$$

Se derivează ecuația (10.26) în raport cu  $s$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p_0}{\partial s} + \frac{\partial F^*}{\partial s} + \frac{\partial f^*}{\partial s},$$

însă

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s}, \text{ fiindcă } z_0 = \text{constant},$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial s} = \frac{\frac{\partial F^*}{\partial t}}{\frac{\partial (s - c \cdot t)}{\partial t}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial F^*}{\partial t},$$

și

$$\frac{\partial f^*}{\partial s} = \frac{\frac{\partial f^*}{\partial t}}{\frac{\partial (s + c \cdot t)}{\partial t}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f^*}{\partial t},$$

deci

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial F^*}{\partial t} - \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) \quad (10.27)$$

Înlocuind (10.27) în (10.19), avem:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial F^* (s - ct)}{\partial t} - \frac{\partial f^* (s + ct)}{\partial t} \right] \quad (10.28)$$

care integrată devine:

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} [F^* (s - ct) - f^* (s + ct)] \quad (10.29)$$

unde  $V$  este viteza în secțiunea  $s$  la momentul  $t$ , iar  $V_0$  viteza în aceeași secțiune în momentul inițial  $t = 0$ .

#### 4. Sensul fizic al funcțiilor $F$ și $f$

Se analizează cazul particular când  $f^* = 0$  și  $F^* = 0$ . Dacă în două secțiuni diferite  $s_1$  și  $s_2$  există relația de parcurgere uniformă a spațiului  $s$  cu viteza  $c$ :

$$s_1 - c \cdot t_1 = s_2 - c \cdot t_2$$

sau

$$s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1) \quad (10.30)$$

presiunea este aceeași, fiindcă  $F^*(s_1 - c \cdot t_1) = F^*(s_2 - c \cdot t_2)$ .

Dacă  $t_2 > t_1$ , rezultă  $s_2 > s_1$ . Prin urmare, funcția  $F^*$  reprezintă **unda directă de presiune** care se propagă cu viteza  $c$  și care păstrează o valoare constantă în lungul conductei (s-au neglijat pierderile de sarcină).

Procedând în mod analog, făcând  $F^* = 0$  și  $f^* \neq 0$ , rezultă că la două momente diferite  $t_2 > t_1$  presiunea are aceeași valoare în două secțiuni diferite  $s_1$  și  $s_2$ , dacă sunt îndeplinite condițiile

$$s_1 + c \cdot t_1 = s_2 + c \cdot t_2$$

sau

$$s_1 - s_2 = c(t_2 - t_1) \quad (10.31')$$

Însă  $t_2 > t_1$ , înseamnă  $s_2 < s_1$ , deci funcția  $f^*$  reprezintă **unda inversă**, care, se propagă cu viteza  $c$  și păstrează o valoare constantă în lungul conductei.

Din cele arătate rezultă că unda de presiune  $F^*(s - ct)$ , la un moment dat  $t = t_1$ , are o distribuție  $F^*(s - ct_1)$  în lungul axului  $s$ ; se propagă fără deformare în sensul  $+s$  cu viteza  $c$ , astfel că  $F^*(s - ct_2)$  se obține printr-o translare a lui  $F^*(s - ct_1)$  pe distanța  $c(t_2 - t_1)$ , (fig. 10.10. a).

În mod asemănător se întâmplă cu unda  $f^*(s + ct)$  în sensul  $-s$ , unde  $f^*(s + ct_2)$  se obține prin translarea  $f^*(s + ct_1)$  pe distanța  $-c(t_2 - t_1)$ , fig. 10.10. b.

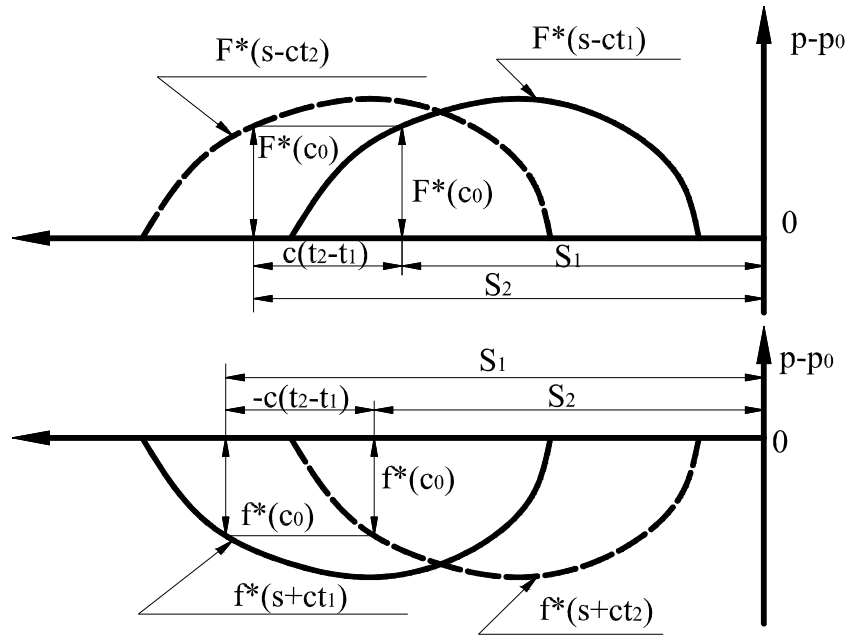


Fig. 10.10. Deplasarea în lungul conductei a undelor de presiune.  
a-directe; b-inverse

Relațiile (10.30 și 10.31) arată că mișcarea undelor de presiune este uniformă, fapt ce are importanță în soluția grafică a loviturii de berbec și în interpretarea rezultatelor calculelor.

În anumite condiții limită, între funcțiile  $F^*$  și  $f^*$  există relații simple. Pentru conductă alimentată de rezervor cu nivel constant aceste relații sunt:

a) pentru  $s = L$ ;  $p = P_0 = \gamma h_0$ , iar (10.26) arată

$$F^*(L - ct) + f^*(L + ct) = 0 \quad (10.31)$$

b) o condiție asemănătoare se poate scrie între funcții pentru o distanță oarecare  $s$ , cu modificarea corespunzătoare a argumentelor. Se poate alege un timp  $t_1$  astfel ca

$$s + ct_1 = L + ct \quad (10.32)$$

și un alt timp  $(t_1 - \tau_s)$  astfel ca

$$s - c(t_1 - \tau_s) = L - ct \quad (10.33)$$

păstrându-se valabilă relația (10.31). Din cele două condiții anterioare rezultă:

$$\tau = \frac{2(L-s)}{c} \quad (10.34)$$

pentru care:

$$F^* [s - c(t_1 - \tau_s)] + f^*(s + ct_1) = 0,$$

deci la un moment dat  $t$  funcția  $f^*$  are valoarea  $-F^*$ , corespunzătoare momentului  $t - \tau_s$ , deci în orice secțiune  $f^*$  repetă valoarea  $F^*$ , însă cu semn schimbat și cu un decalaj de timp  $\tau_s$ . Valoarea lui  $\tau_s$  pentru o secțiune  $s$  este timpul de reflexie a undei directe - necesară parcurgerii distanței din secțiune până în  $R$  și invers. În aceste condiții (10.26 și 10.29), devin

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) - F^*[s - c(t - \tau_s)] \quad (10.35)$$

și

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} \{ F^*(s - ct) + F^*[s - c(t - \tau_s)] \} \quad (10.36)$$

Funcțiile  $F^*$  și  $f^*$  au fost definite pentru  $t \geq 0$  (pentru  $t < 0$  sunt nule), rezultă că  $F^*[s - c(t - \tau_s)]$  intervine în secțiunea  $s$  numai dacă  $t < \tau_s$ . Pentru  $t < \tau_s$  secțiunea  $s$  se găsește sub influența undei directe și în acest interval de timp  $F^*[s - c(t - \tau_s)] = 0$ . Pentru  $t > \tau_s$  secțiunea  $s$  este sub influența undei inverse. În cazul considerat, unda directă creează o suprapresiune, iar unda inversă descarcă presiunea, cele două unde fiind de semn contrar.

Pentru  $t < \tau_s$  (10.35 și 10.36) devin

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) \quad (10.35')$$

și

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} [F^*(s - ct)] \quad (10.36')$$

sau

$$p - p_0 = \rho c (V_0 - V) \quad (10.37)$$

care are valoare maximă pentru  $V=0$ , deci

$$\Delta p = p - p_0 = \rho c V_0 \quad (10.12)$$

relația lui Jukovski.

Valoarea lui  $\Delta p$  este pozitivă când  $V_0 > V$ , la închiderea robinetului din O și negativă pentru  $V_0 < V$ , pentru deschiderea robinetului. Valoarea suprapresiunii depinde numai de valorile inițiale și finale ale vitezei  $V$ , nu și de legea după care aceasta variază.

Dacă  $T_p < \tau_s$ , în secțiune se obține suprapresiunea maximă, însă când  $T_p > \tau_s$  în secțiune suprapresiunea este mai mică, fiindcă acolo apare și unda inversă. Pentru secțiunea O a robinetului  $s=0$  și  $\tau_s = \tau = \frac{2L}{c}$  și unda inversă apare

după timpul  $t = \tau$ . În secțiunea rezervorului (R),  $s=L$  și unda inversă apare odată cu unda directă - are loc reflectarea undei - unda directă se transformă în undă inversă.

Un alt caz, la care se pot stabili relații între  $F^*$  și  $f^*$ , la limită, este conducta închisă la un capăt, la celălalt capăt acționând un piston (fig. 10.11).

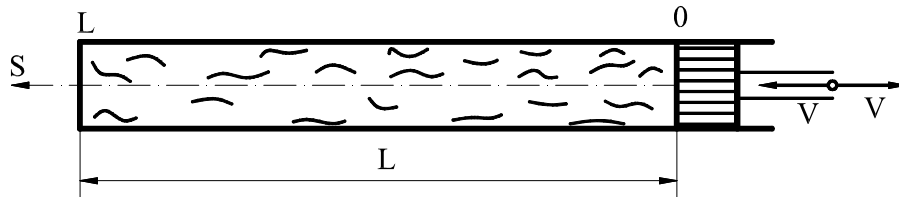


Fig. 10.11. Conductă închisă cu lichid, acționat de piston

La capătul închis al conductei se poate scrie:  $V=V_0=0$  și din ecuația (10.29) se obține:

$$F^*(s-ct) - f^*(s+ct) = 0 \quad (10.38)$$

Într-o secțiune  $s$ , pe baza relațiilor (10.30 și 10.31), se obține:

$$f^*(s+ct) = F^*[s-c(t-\tau_s)] = 0 \quad (10.39)$$

deci, în secțiunea  $s$  la momentul  $t$ ,  $f^*$  ia valoarea  $F^*$  de la momentul  $t - \tau_s$ . Funcția  $f^*$  repetă valorile  $F^*$  în secțiune cu un decalaj de timp  $\tau_s$ . Ecuațiile (10.26 și 10.29) devin:

$$p - p_0 = F^* (s - c \cdot t) + F^* [s - c \cdot (t - \tau_s)] \quad (10.26'')$$

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} \{ F^* (s - ct) - F^* [s - c(t - \tau_s)] \} \quad (10.29'')$$

Pentru  $s=L$  rezultă  $\tau_s = 0$  și unda directă de presiune se reflectă în unda inversă de același semn. La asemenea situații compunerea undelor poate conduce la pericole, prin realizarea unor supra sau subpresiuni foarte mari, care pot distruge sistemul hidraulic în lipsa unor mijloace de protecție.

Uneori este mai comod ca în ecuații presiunile să fie exprimate în înălțime de coloană de lichid  $\left( h = \frac{p}{\gamma} \right)$ , iar viteza cu ajutorul debitului  $\left( V = \frac{Q}{A} \right)$ . Notând cu

$$F = \frac{F^*}{\gamma}; \quad f = \frac{f^*}{\gamma} \quad \text{și} \quad m = \frac{c}{gA}, \quad (10.40)$$

ecuațiile (10.26 și 10.29) devin:

$$h - h_0 = F(s - c \cdot t) + f(s + ct) \quad (10.41)$$

și

$$-m(Q - Q)_0 = F(s - ct) - f(s + ct) \quad (10.42)$$

unde  $m$  este rezistența de undă. În relațiile de mai sus  $F$  și  $f$  sunt lungimi. De fapt se poate concluziona că la o undă de presiune corespunde și o undă de debit și că cele două unde sunt asociate.

### 10.2.6. Reflexia și refracția undelor

În paragraful precedent s-au analizat două cazuri (extreme):

a) când în secțiunea  $R$ , de legătură cu rezervor cu nivel constant, unda se reflectă cu aceeași intensitate și semn schimbat;

b) capătul etanș închis al conductei ( $L$ ), unde unda se reflectă tot cu aceeași intensitate cu același semn.



În primul caz, secțiunea de curgere crește brusc de la o valoare finită la o valoare infinită (sau foarte mare), iar în al doilea caz, secțiunea de curgere se reduce de la o valoare oarecare la zero.

Într-un caz intermediar, la o îngustare sau lărgire bruscă, dar finită de secțiune, unda de presiune suferă un proces de **reflexie** și de **refracție**.

Se consideră o variație bruscă de secțiune pe traseul unei conducte (fig. 10.12). O undă directă  $F_1$  se deplasează din secțiunea A spre B; în secțiunea C întâlnește o variație bruscă de secțiune, unde unda  $F_1$  parțial se reflectă - sub forma undei  $f_1$  - și parțial se refractă în  $F_2$ .

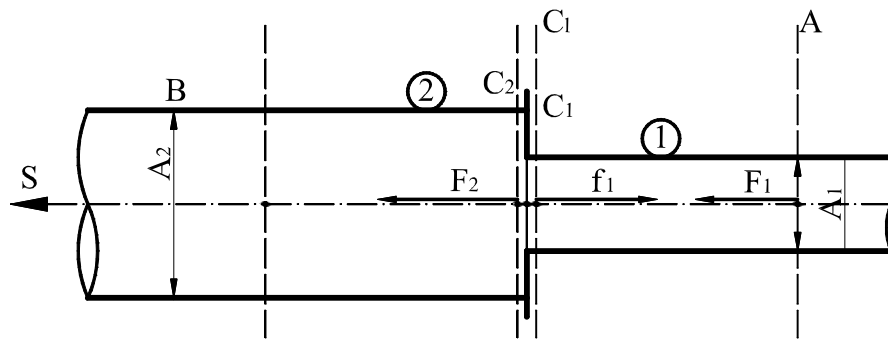


Fig. 10.12. Reflexia și refracția undelor de presiune

Fie  $C_1$  și  $C_2$  două secțiuni de o parte și alta a secțiunii C, infinit apropiate, aparținând conductei 1, respectiv 2. Presiunile și debitele în secțiunile  $C_1$  și  $C_2$  sunt egale în orice moment, deci

$$\begin{aligned} h_1 - h_{01} &= F_1 + f_1 \\ -m_1(Q_1 - Q_{01}) &= F_1 - f_1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} h_2 - h_{02} &= F_2 \\ -m_2(Q_2 - Q_{02}) &= F_2 \end{aligned}$$

Fie  $f_1 = k' F_1$  și  $F_2 = k F_1$ , cu  $k'$  - coeficient de reflexie și  $k$  - coeficient de refracție. Respectând condițiile  $h_{01} = h_{02}$ ;  $h_1 = h_2$ ;  $Q_{01} = Q_{02}$ , din egalitatea presiunilor se obține

$$F_1 + f_1 = F_2,$$

sau

$$1 + k' = k \quad (10.43)$$

iar din egalitatea debitelor

$$\frac{F_1 - f_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} \text{ sau } \frac{1 - k'}{m_1} = \frac{k}{m_2} \quad (10.44)$$

Din (10.43 și 44) se obțin

$$k = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} = \frac{2 \frac{C_2}{A_2}}{\frac{C_2}{A_2} + \frac{C_1}{A_1}} \quad (10.45)$$

respectiv

$$k' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{\frac{C_2}{A_2} - \frac{C_1}{A_1}}{\frac{C_2}{A_2} + \frac{C_1}{A_1}} \quad (10.46)$$

În cazurile particulare, tratate anterior, rezultă:

- conductă legată la rezervor:  $A_2 = \infty, k' = -1; k = 0$ ;
- conductă închisă la un capăt:  $A_2 = 0, k' = 1; k = 0$ . Coeficientul de reflexie este nul ( $k'=0$ ) numai pentru  $m_1=m_2$ .

### 10.2.7. Metoda caracteristicilor pentru calculul loviturii de berbec

În timp s-au elaborat mai multe metode de soluționare a loviturii de berbec în cazuri concrete, mai simple sau mai complicate, cum sunt cele elaborate de Allievi, Morozov, Evangelisti, Jaeger, Conti, de Marchi, Schnyder, Bergeron etc. sub formă analitică sau grafică. Aceste metode au mai mult caracter istoric, pentru că după perfecționarea metodei grafice (Schnyder-Bergeron) și numerice, ale caracteristicilor, nu se mai apelează la ele.

#### 10.2.7.1. Metoda grafică a caracteristicilor

Acesta metodă se caracterizează prin relații de calcul simple și cu evident sens fizic. Se poate introduce în calcule și efectul forțelor de frecare. Ecuațiile caracteristice se soluționează pe cale grafică, cu precizia specifică acestei rezolvări.

### 1. Curbe caracteristice în mișcarea permanentă

La mișcarea permanentă a lichidelor în instalații hidraulice, dependența între debit și presiune într-o secțiune dată (la diferite debite, variabil, continuu în intervalul dat) este curba caracteristică a instalației. De exemplu o conductă alimentată gravitațional dintr-un rezervor, caracteristica în planul figurativ  $Q-h$  este

$$h = h_0 - MQ^2 \quad (10.47)$$

unde  $M$  este modulul de rezistență echivalent (s-a neglijat termenul cinetic) (fig. 10.13). De obicei o astfel de conductă conlucrează cu un robinet la capătul aval, care are caracteristica

$$Q = k_R \left( \frac{a}{D} \right) \sqrt{h} \quad (10.48)$$

Intersecția caracteristicii conductei cu caracteristica robinetului este punctul de funcționare al instalației.

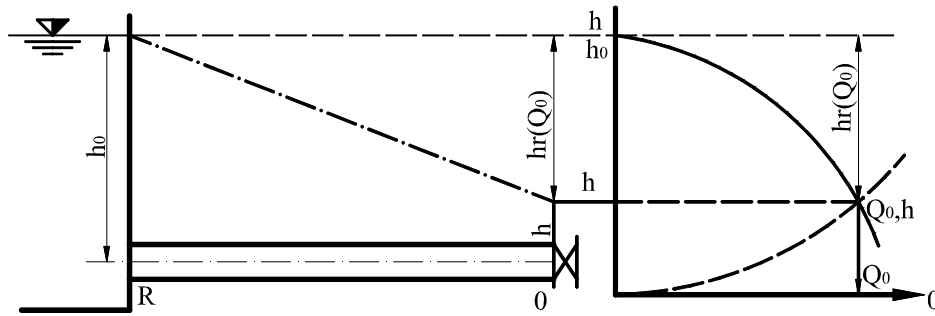


Fig. 10.13. Caracteristica conductei gravitaționale cu robinet de capăt aval

Caracteristica robinetului depinde de gradul de închidere ( $a/D$ ) și poate ocupa în mod continuu tot cadranul  $Q-h$ . Mai mult, închiderea robinetului poate fi descrisă de o funcție de timp.

O conductă alimentată prin pompare, cu refulare în rezervor (fig. 10.14), are caracteristica

$$h = H_g + MQ^2 \quad (10.49)$$

iar punctul de funcționare se obține prin intersecția cu caracteristica internă a grupului de pompare

$$Q = f(h) \quad (10.50)$$

Pompa la diverse turații  $n$  își modifică caracteristica, turația putând fi funcție de timp. Legătura mărimilor caracteristice ale pompei centrifugale funcție de modificarea turației este:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{n}{n_0}; \frac{h}{H_0} = \frac{n^2}{n_0^2}; \frac{N}{N_0} = \frac{n^3}{n_0^3}; \eta = 1 - (1 - \eta) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{0.2} \quad (10.51)$$

Caracteristica pompei la diferite turații rezultă din topograma pompei, care conține curbele de sarcină, putere, randament și NPSH.

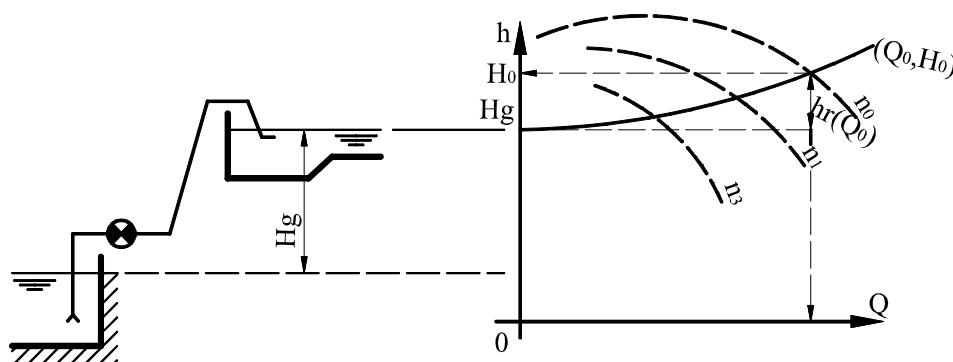


Fig. 10. 14. Caracteristica conductei de pompare

## 2. Curbe caracteristice în mișcare nepermanentă

În mișcare nepermanentă curbele caracteristice ale unui sistem hidraulic se modifică în timp: în orice secțiune I atât  $Q$  cât și  $h$  pot avea diverse valori. Problema este găsirea acestor valori.

Undele de presiune și de debit la mișcarea nepermanentă au caracteristicile (10.41), respectiv (10.42). Aceste două funcții leagă patru necunoscute  $Q$ ,  $h$ ,  $F$  și  $f$ .

Se consideră o conductă rectilinie ( $O;R$ ), cu organul perturbator în secțiunea  $O$  și o secțiune  $I$ , aflată la distanța  $l$  de  $O$  (fig. 10.15). Timpul necesar undei directe ca să ajungă în  $I$  (măsurat de la momentul perturbării  $t=0$ ) este  $\tau_i$ . Dacă se cunosc  $F$  și  $f$  din (10.41 și 10.42) se pot determina ( $Q$ ,  $h$ ) în punctul  $I$  în momentul  $\tau_i$ .

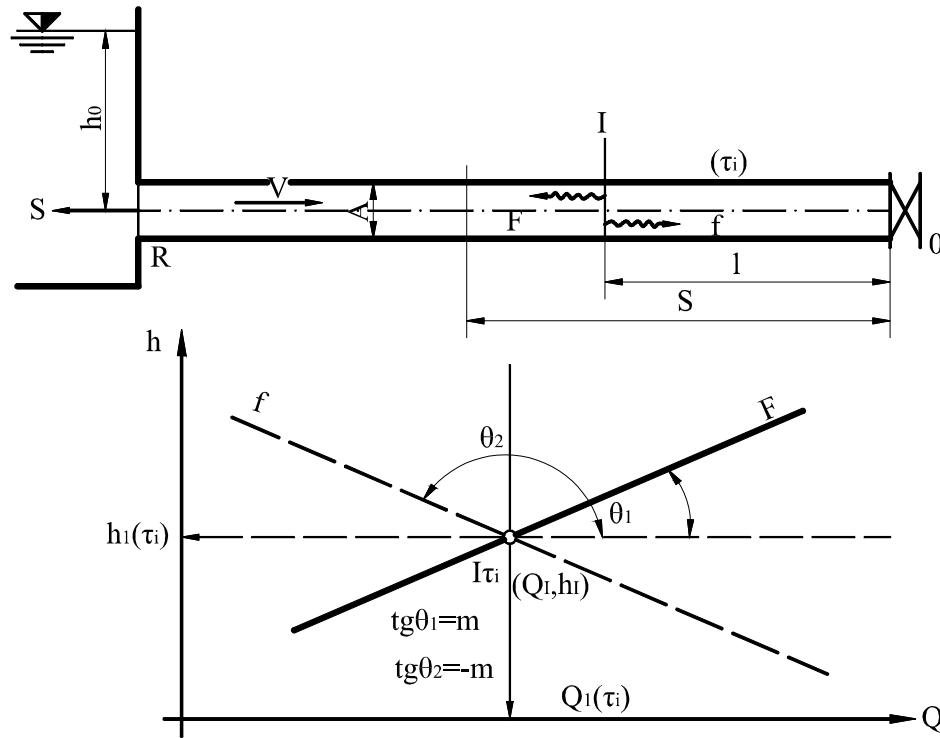


Fig. 10.15. Explicarea caracteristicilor loviturii de berbec

În planul figurativ  $Q-h$ , punctul figurativ  $I(Q, h)_{\tau_i}$  arată dependența debitului de sarcină.

Se presupune că un observator se deplasează cu viteza  $c$  în lungul conductei în sensul pozitiv al lui  $s$ , împreună cu unda  $F$  și la un moment dat  $t > \tau_i$  este la distanța  $s > l$  de la  $O$ . Distanța  $s$  este  $l$  plus drumul parcurs de undă cu celeritatea  $c$ , în timpul  $t - \tau_i$  adică

$$s = l + c(t - \tau_i) \quad (10.52)$$

înlocuind  $s$  în argumentul lui  $F$  se obține

$$F(s - c \cdot t) = F_l(l + c \cdot t - c \cdot \tau_i - c \cdot t) = F_l(l - c \tau_i) = \text{const.} \quad (10.53)$$

deci pentru observatorul mobil, care pleacă din  $I$  cu unda  $F$ , aceasta va avea o valoare constantă. Observatorului care se deplasează cu unda  $F$  îi sunt valabile numai trei din cele patru mărimi  $Q$ ,  $h$ ,  $F$  și  $f$ , putând scrie

$$\begin{cases} h - h_0 = F_I - f \\ -m(Q - Q_0) = F_I - f \end{cases} \quad (10.53')$$

Adunând cele două ecuații avem:

$$h - h_0 - m(Q - Q_0) = 2F_I = \text{constant} \quad (10.54)$$

Ecuația (10.54) este valabilă pentru orice secțiune de pe conductă, deci și în I, unde sunt caracteristice în momentul  $\tau_i$  parametrii  $(Q_i, h_i)$ , deci

$$h_i - h_0 - m(Q_i - Q_0) = 2F_I \quad (10.55)$$

Scăzând (10.55) din (10.54) se obține

$$h - h_i = m(Q - Q_i) \quad (10.56)$$

Ecuația este o dreaptă caracteristică în planul  $Q, h$  pentru observatorul menționat în punctul I, corespunzător momentului  $\tau_i$ . Dreapta are coeficientul unghiular  $m = \frac{c}{gA}$ .

În mod analog se poate arăta pentru unda  $f$

$$s = l - c(t - \tau_i),$$

respectiv

$$f(s + ct) = f(l - ct + c\tau_i + ct) = f(l + c\tau_i) = \text{constant} \quad (10.57)$$

și

$$\begin{cases} h - h_0 = F + f_I \\ -m(Q - Q_0) = F - f_I \end{cases} \quad (10.58)$$

Scăzând ecuațiile, rezultă

$$h - h_0 + m(Q - Q_0) = 2f_I \quad (10.59)$$

care este valabilă pe toată conducta și în  $I$  în momentul  $\tau_i$

$$h_I - h_0 + m(Q_I - Q_0) = 2f_I \quad (10.60)$$

Scăzând (10.60) din (10.59), se obține

$$h - h_I = m(Q - Q_I) \quad (10.61)$$

care este a doua dreaptă caracteristică, având coeficient unghiular  $-m = -\frac{c}{gA}$ .

Dreptele  $F$  și  $f$  sunt simetrice față de o orizontală ce trece prin punctul  $I_{\tau_i}$ . Interpretarea fizică a caracteristicilor (10.56) și (10.61) este: dacă un observator pleacă din punctul  $I$  la momentul  $\tau_i$ , unde regimul de funcționare era  $(Q_I, h_I)_{\tau_i}$  și se deplasează cu celeritatea  $c$  cu unda  $F$  sau  $f$ , constată că în orice secțiune de pe conductă debitul  $Q$  și presiunea  $h$  se găsesc într-o relație liniară (de forma (10.56) dacă urmărește unda  $F$  și (10.61) dacă urmărește unda  $f$ ), care depinde de celeritate, de secțiunea conductei și de parametrii inițiali ai mișcării.

Având dreptele caracteristice ale loviturii de berbec, toate calculele se pot efectua în planul  $Q, h$  cu condiția să se cunoască în fiecare moment  $t$  poziția curbelor caracteristice ale instalației în secțiunile de margine și starea mișcării în momentul inițial.

### 3. Exemplificări când se neglijează pierderile de sarcină

#### a. Lovitură de berbec în conductă simplă gravitațională

Se consideră o conductă alimentată gravitațional, prevăzută cu un robinet în capătul aval. Se cunoaște  $A, c$  și caracteristica robinetului (fig. 10.16). Caracteristica conductei, când se neglijează pierderile de sarcină, în mișcarea permanentă, este:

$$h = h_0$$

în orice punct al conductei. Caracteristica robinetului este (10.48), cu deschiderea relativă,  $a/D$  dată și constantă în regim permanent. Se disting două cazuri de lovitură în funcție de mărimea  $T_p$  față de  $\tau$ .

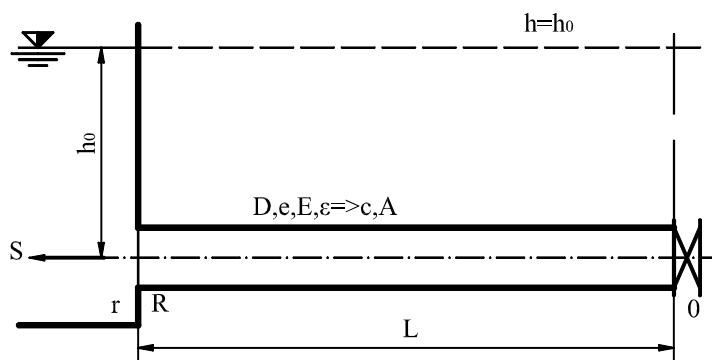
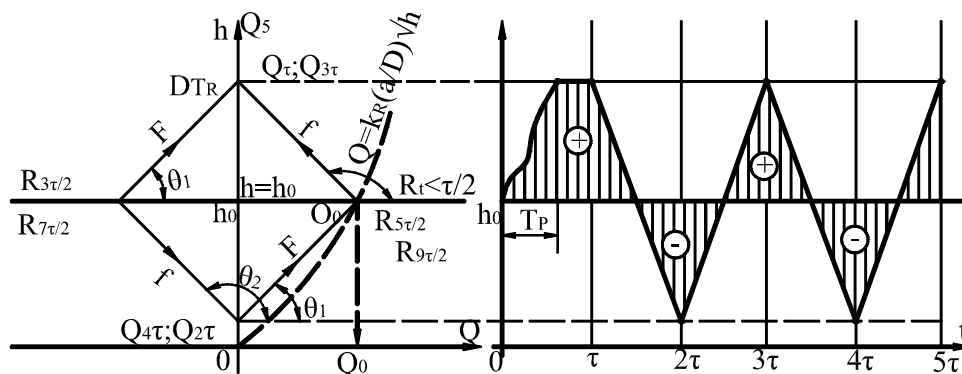


Fig. 10.16. Schema conductei gravitaționale

**a.l) Cazul  $T_p < \tau$ .** Intersecția curbei caracteristice a conductei cu caracteristica robinetului furnizează parametrii inițiali ai mișcării  $(Q_0, h_0)$  care sunt valabili la robinet (pct.O) în momentul  $t=0$  și secțiunilor  $R$  și  $r$  pe intervalul  $t=(0 \dots \tau/2)$ , deci punctul figurativ  $O_0$  și  $R_{0 \dots \tau/2}$  se confundă în planul  $Q, h$  (fig. 10.17).

Fig. 10.17. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională cu robinet pentru  $T_p < \tau$ 

Dacă un observator pleacă cu unda inversă de la  $R$  la  $\tau/2$  ajunge la robinet (în O) la momentul  $\tau$ , găsind robinetul închis. Caracteristica robinetului închis este  $Q=0$ . Deci, unda  $f$  cu coeficientul unghiular  $m = -\frac{c}{gA}$  trece prin punctul  $R_{\tau/2}$  și intersectează caracteristica robinetului închis la momentul  $\tau$  (în pct. O). De fapt această suprapresiune se obține în O când robinetul s-a închis ( $t = T_p$ ). Punctul  $O_{T_p}$  se obține plecând cu unda  $f$  din  $R$  la momentul  $T_p - \tau$ , care coincide tot cu punctul de funcționare. Creșterea presiunii în O urmărește



o lege după legea de închidere a robinetului. Presiunea maximă în O se menține de la  $T_p$  la  $\tau$ ; în momentul  $\tau$  sosește prima undă inversă și produce scăderea presiunii. În momentul  $\tau$ , în pct. O, unda  $f$  se reflectă în undă  $F$  și ajunge la  $R$  în momentul  $3\tau/2$  și are coeficient unghiular  $m = \frac{c}{gA}$ . Deci, unda  $F$  trece prin punctul figurativ  $O_\tau$  și intersectează caracteristica conductei  $h = h_0$  în punctul  $R_{3\tau/2}$ . Aici unda  $F$  se reflectă în  $f$  și întâlnește caracteristica robinetului închis la momentul  $2\tau$  în  $O_{2\tau}$ . În  $O_{2\tau}$  unda  $f$  se reflectă în  $F$  și întâlnește caracteristica conductei  $h = h_0$  în momentul  $5\tau/2$ , în punctul  $R_{5\tau/2}$  unda  $F$  se reflectă în  $f$  care întâlnește caracteristica robinetului închis la momentul  $3\tau$  în  $O_{3\tau}$ . Pierderile de sarcină fiind neglijate, oscilațiile de presiune se mențin în continuare la valori identice, fenomenul se repetă cu perioada  $2\tau$ . În partea a doua a fig. 10.17 este reprezentată variația presiunii la robinet (pct. O) în timp.

**a.2) Cazul  $T_p > \tau$ .** În această situație undele  $f$  care se întorc de la  $R$  în O întâlnesc robinetul în proces de închidere, care are caracteristica dată momentului respectiv, prin gradul de deschidere. Pentru simplificarea explicației se presupune că timpul de perturbare (închiderea robinetului) are loc într-un timp multiplu de  $\tau$ ,  $T_p = 4\tau$ . Presupunem cunoscute caracteristicile robinetului în procesul de închidere în orice moment și se construiesc aceste caracteristici la momentele  $0$ ;  $\tau$ ;  $2\tau$ ;  $3\tau$ , în momentele  $t \geq 4\tau$  robinetul este închis, având caracteristica  $Q=0$ . În planul figurativ  $Q$ ,  $h$  se trasează caracteristica conductei,  $h = h_0$  și caracteristicile robinetului în momentele menționate (fig. 10.18).

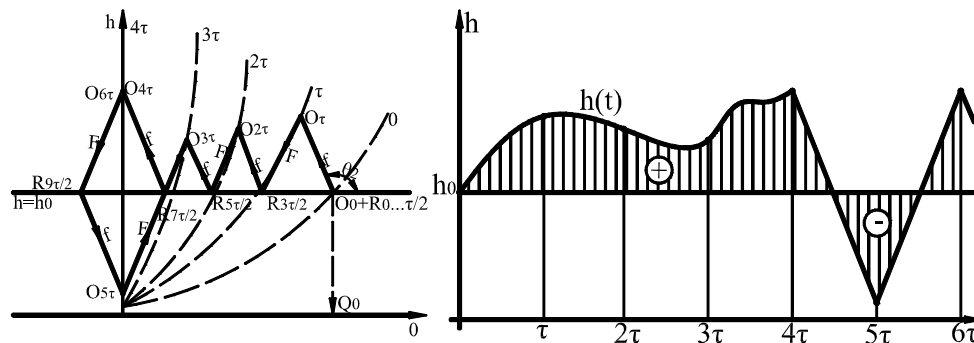


Fig. 10.18. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională cu robinet la capăt pentru  $T = 4\tau$

Punctele figurative  $O_0, R_{0... \tau/2}$  se găsesc în punctul de funcționare inițial  $(Q_0, h_0)$ . Pentru a determina variația presiunii în  $O$  se presupune un observator care vine odată cu unda  $f$  din  $R$  în momentul  $\tau/2$  spre  $O$  unde ajunge în momentul  $\tau$  și întâlnește robinetul cu caracteristica modificată, corespunzătoare momentului  $\tau$ . Dreapta caracteristică undei  $f$  (coeficient unghiular  $m = -\frac{c}{gA}$ ) trece prin punctul  $R_{\tau/2}$  și intersectează caracteristica robinetului la  $t = \tau$ , unde se află punctul figurativ  $O_\tau$ . Aici unda se reflectă în  $F$  (cu coeficient unghiular  $m = -\frac{c}{gA}$ ) și întâlnește caracteristica conductei ( $h = h_0$ ) în momentul  $3\tau/2$ . Intersecția undei  $F$  cu  $h = h_0$  este punctul  $R_{3\tau/2}$ , de unde unda  $F$  se reflectă în  $f$  care ajunge la robinet la momentul  $2\tau$ . Intersecția undei  $f$  cu caracteristica robinetului la momentul  $2\tau$  este punctul figurativ  $O_{2\tau}$ . În mod analog se obțin celelalte puncte figurative. Ordonatele punctelor figurative  $O$  la momente multiplu de  $\tau$  reprezintă variația presiunii în timp la robinet (pct.O), (fig. 10.18).

**b.** Se consideră o **conductă gravitațională, formată din două sectoare**, cu lungime și diametre diferite, cu un robinet în capătul aval. Cunoscând  $D_1, D_2, l_1, l_2, c_1, c_2$  și caracteristicile robinetului la închidere să se determine presiunile în punctele  $O$  și  $I$  când se neglijează pierderile de sarcină (fig. 10.19).

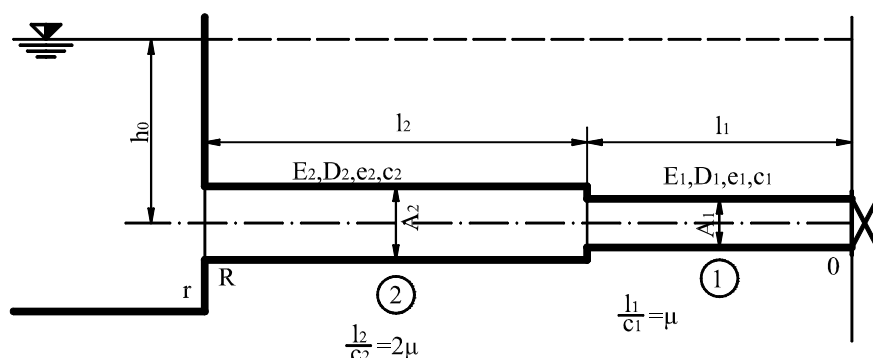


Fig. 10.19. Schema conductei sectorizate cu alimentare gravitațională

Se presupune că timpul de reflexie de pe sectorul 2 este multiplu al timpului de reflexie de pe sectorul 1,  $\tau_2 = 2\tau_1$ . Se adoptă unitate de timp jumătate din timpul de reflexie de pe sectorul 1

$$\mu = \frac{\tau_1}{2} = \frac{l_1}{c_1}$$

În planul  $Q-h$  se reprezintă caracteristica conductei  $h = h_0$  și caracteristicile robinetului pentru multiplu de  $\mu$  presupunând că  $T_p = 10\mu$ . Intersecția caracteristicii conductei cu caracteristica robinetului la timpul  $t=0$  este punctul de funcționare în regim permanent. Indicile punctului figurativ va reprezenta timpul în multiplu de  $\mu$ . Punctele figurative  $O_0, I_1$  și  $R_3$  corespund regimului inițial de curgere cu parametrii  $(Q_0, h_0)$ , (fig. 10.20).

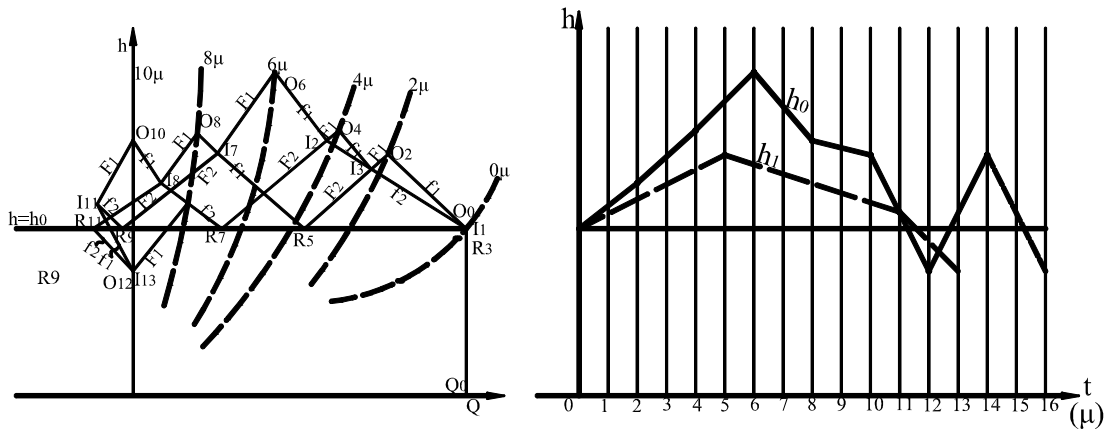


Fig. 10.20. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională tronsonată  $T_p > \tau = 10\mu$

Pentru a determina punctul figurativ  $O_2$  se trasează caracteristica undei  $f_1$  care trece în  $I_1$  în momentul 1 și ajunge în  $O$  la momentul 2, deci intersecția cu caracteristica robinetului în momentul 2. Punctul figurativ  $I_3$  este pe caracteristica undei  $F_1$  ce pleacă din  $O_2$  la momentul 2 la intersecția undei  $f_2$ , care pleacă din  $R$  în momentul 1. Punctul  $R_5$  se găsește la intersecția undei  $F_2$  care pleacă din  $I_3$  în momentul 3 și caracteristica conductei  $h = h_0$ , unda ajunge în  $R$  în momentul 5.

Celelalte puncte  $O_4, O_6, O_8, O_{10}, O_{12}, \dots, I_5, I_7, I_9, I_{11}, \dots, R_7, R_9, R_{11} \dots$  se găsesc după raționamentul analog cu cel descris.

Reflexia și refracția undelor este oglindită de construcția grafică. În punctul  $I, F_1$  și  $f_1$  reprezintă unda directă și inversă reflectată, iar  $F_2$  unda directă refractată. În punctul  $I$  debitele și presiunile pe oricare din caracteristicile  $F_1, f_1, F_2, f_2$  sunt

egale. În intensitate undele  $f_1$  și  $F_2$  sunt proporționale cu  $F_1$  în raport de coeficienții de reflexie și refracție (10.45 și 10.46).

### c. Lovitura de berbec în instalațiile de pompare

În instalații de pompare lovitură de berbec apare ca urmare a unor accidente sau manevrări bruște a robinetilor. Cele mai frecvente și mai periculoase sunt loviturile de berbec datorită întreruperii alimentării cu energie electrică. După întreruperea curentului electric, datorită inerției părții rotative a agregatului de pompare și coloanei de lichid în conductă, pompa trece prin trei regimuri de funcționare:

- regim de pompare, însă cu turație descrescândă și  $n > 0$ , respectiv  $Q > 0$ ;
- regim de frânare,  $n > 0$  și  $Q < 0$ , (debitul invers apare datorită  $H_g > H_p$

(înlățime de pompare);

- regim de turbinare ( $n < 0$ ;  $Q < 0$ ), pompa primește turație inversă datorită curentului de lichid invers și lucrează ca o turbină. În regim de turbinare turația poate degrada pompa. Din acest considerent conducta de refulare se echipează cu un clapet de reținere în apropierea pompei.

O problemă importantă care trebuie rezolvată la calculul loviturii de berbec în instalații de pompare este construirea curbelor caracteristice interne ale pompei la diferite momente care, apoi, se intersectează cu caracteristicile undelor directe, inverse și cu caracteristica conductei. Calculele se pot efectua dacă se cunoaște topograma pompei,  $H = H(Q, n, \eta)$ , pentru cele trei regimuri de funcționare sau numai în regim de pompare, dacă pompa este protejată cu clapet de reținere.

Mișcarea părții rotative a agregatului de pompare este dată de ecuația diferențială

$$I \frac{d\omega}{dt} + \frac{\gamma Q H}{\eta \omega} = 0 \quad (10.62)$$

în care:  $I = m \cdot \frac{D_e^2}{4}$  este momentul de inerție al subansamblelor rotative;

$w$  – masa subansamblelor în rotație;  $D_e$ -diametrul echivalent al părții rotative

( $GD^2$ -este indicat în cataloagele pompelor;  $\omega = \frac{\pi n}{30}$  - viteza unghiulară;

$n$  - turația;  $\eta$  - randamentul;  $Q$  - debitul;  $H$  - sarcina de pompare și  $\gamma$  - greutatea specifică a lichidului pompat.

Ecuatia (10.62) în diferențe finite este

$$n_i - n_0 = -\frac{450\gamma}{\pi I} \left( \frac{Q_0 H_0}{n_0 \eta_0} + \frac{Q_i H_i}{n_i \eta_i} \right) \Delta t \quad (10.63)$$

sau

$$n_i^2 + \frac{n_0^2}{k\Delta t} n_i + n_0^2 - \frac{n_0^3}{k\Delta t} = 0 \quad (10.64)$$

cu

$$k = \frac{1800\gamma g Q_0 H_0}{\pi^2 G D_e^2 n_0 \eta} \quad (10.65)$$

S-a admis în primă aproximație  $\eta_0 = \eta_i = \eta$ . Prin calcule de aproximații succesive, utilizând ecuațiile (10.64), (10.65) și (10.51) se construiește curba de oprire a pompei (fig. 10.21), luând pas pentru  $\Delta t$  adecvat.

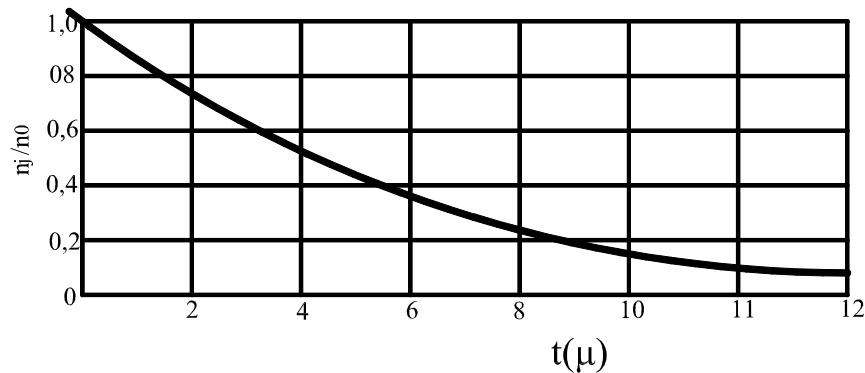


Fig. 10.21. Curba de oprire a pompei

Calcululele de aproximații succesive sunt necesare pentru corectarea randamentului și, implicit,  $n_i$ .

După construirea curbei de oprire se alege perioada de timp (unitatea) de calcul, de obicei  $\mu = \tau / 2$  sau  $\tau$ .

Se consideră o instalație de pompare compusă din: bazin de aspirație - conductă de aspirație - pompă-clapet - conductă de refulare - bazin de refulare (fig. 10.22). Se presupune că lovitura de berbec apare datorită opririi accidentale a pompei.

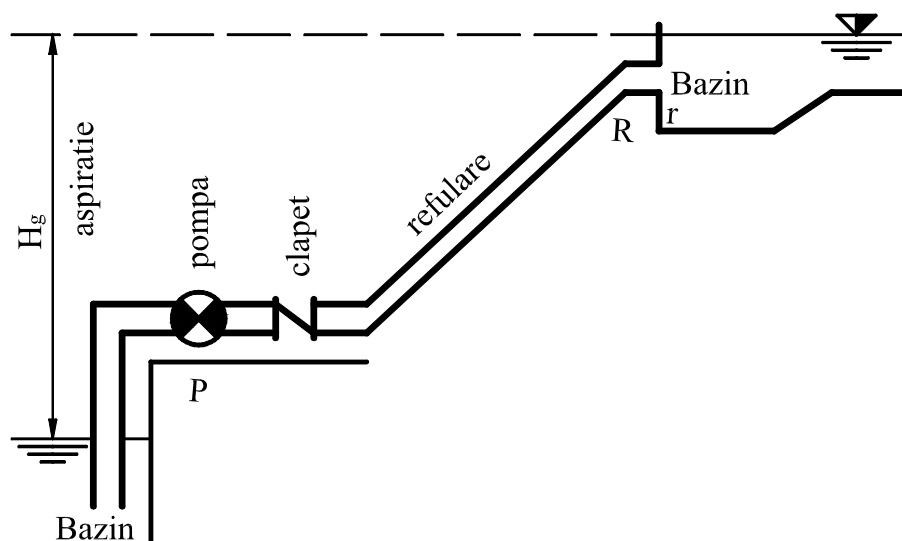


Fig. 10.22. Schema instalației de pompare

În planul figurativ  $Q, h$  se trasează caracteristica conductei  $H=H_g$  (s-au neglijat pierderile de sarcină), caracteristica pompei la momentul inițial și la momentul  $\mu$ . La apariția curgerii inverse clapetul se închide având caracteristica  $Q=0$ . Secțiunea pompei și clapetului, fiind foarte aporpiate, s-a notat cu  $P$ , iar secțiunea conductei la rezervor  $R$  (fig. 10.23)

Punctele figurative  $P_0, R_0$  și  $R_1$  se găsesc în punctul de funcționare, de coordonate  $(Q_0, H_g)$ .

Punctul figurativ  $P_2$  se obține astfel: un observator pleacă cu unda  $F$  din  $R$  la momentul 1 și ajunge în  $P$  în momentul 2. Unda  $F$  trece prin punctul  $R_1$  și intersectează caracteristica pompei în momentul 2. Aici unda se reflectă în  $f$  și ajunge în  $R$  la momentul 3. Deci punctul  $R_3$  este la intersecția undei  $f$ , care trece în momentul 2 prin punctul  $P_2$ , cu caracteristica conductei ( $h=H_g$ ). Punctele  $P_4, P_6, R_5, R_7$  se obțin asemănător. Punctul  $P_8$  se obține la intersecția undei  $F$ , care trece prin  $R_7$  și caracteristica clapetului închis. Clapetul este închis pentru debite negative prin pompă, însă acesta există în diferite secțiuni ale conductei. După închiderea clapetului caracteristica acestuia se poate considera  $Q=0$ , deci pentru  $t > 8\mu$ , punctele figurative  $P_{10}, P_{12}, P_{14}...$  se vor găsi pe această caracteristică. Punctele intermediare  $P_1, P_3, P_5, R_2, R_4, R_6$  se determină în mod analog, fenomenul fiind urmărit de un observator care pleacă din  $R$  momentul  $t=0$ , deci din  $R_0$  și ajunge la pompă în momentul 1. Astfel se poate trasa variația presiunii mai precis (prin mai multe puncte). Presiunea extremă de fapt corespunde unui moment și unei unde care întâlnește caracteristica pompei pe

caracteristica clapetului. Acest moment se determină prin trasarea caracteristicii pompei pentru intervale mai mici de timp în preajma închiderii clapetului, între momentele 6 și 7 conform fig. 10.23.

Fiindcă nu s-a ținut seama de pierderile de sarcină, oscilațiile de presiune după închiderea clapetului nu se amortizează.

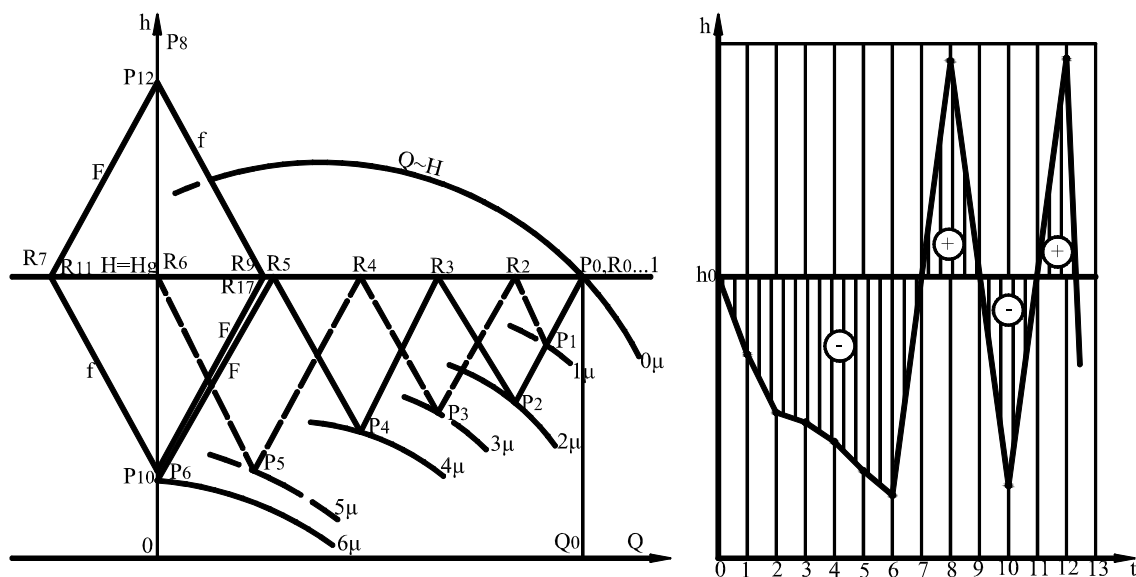


Fig. 10.23. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă simplă cu clapet în instalație de pompare

#### 4. Exemplificări când se consideră pierderile de sarcină

Metoda caracteristicilor permite soluționarea loviturii de berbec și în cazul când se consideră pierderile de sarcină. Pierderile de sarcină liniare se înlocuiesc cu pierderi de sarcină locale echivalente, singularități plasate în anumite secțiuni caracteristice ale conductei. Pierderile de sarcină au efect de amortizare a oscilațiilor de presiune.

Fie  $AB$  un tronson de conductă în lungul căreia se propagă lovitură de berbec. În secțiunile  $A$  și  $B$  se instalează fictiv două singularități. Se notează cu  $A$  și  $a$ , respectiv  $B$  și  $b$  secțiunile de pe o parte și alta a singularităților (fig. 10.24).

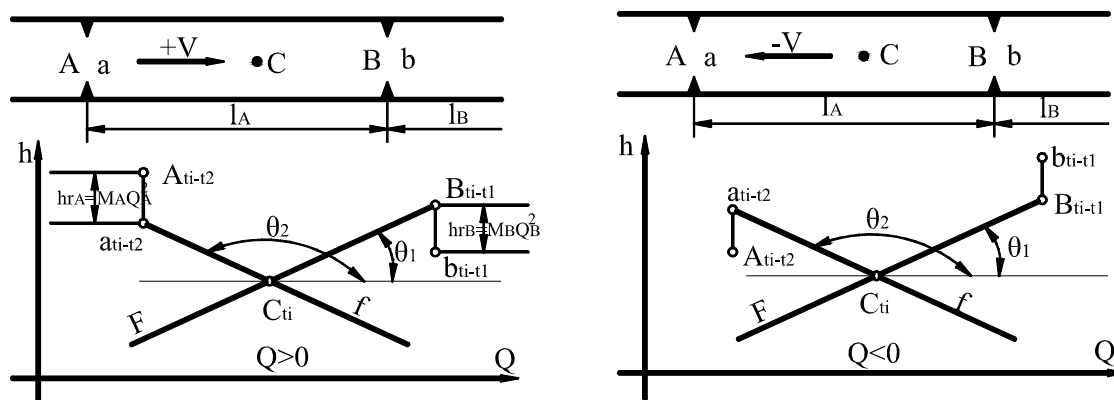


Fig. 10.24. Schema de considerare a pierderilor de sarcină prin singularități fictive la calculul loviturii de berbec

Pentru secțiunea  $C$ , intermediară secțiunilor " $a$ " și  $B$ , timpul de parcurs de către undă a distanței  $aC$  este  $t_2$ , iar a distanței  $BC$ ,  $t_1$ , punctul figurativ  $C_i$  în planul  $Q-h$  se află la intersecția caracteristicii  $F$  - care trece prin punctul figurativ  $B_{ti-t1}$  - și a caracteristicii  $f$  - care trece prin punctul  $a_{ti-t2}$ . Secțiunea  $A$  și  $a$  fiind foarte aproape, unda de presiune se va găsi în același moment în ambele secțiuni  $A$  și  $a$ , iar debitul asociat undei are aceeași valoare în ambele secțiuni. Presiunea în cele două secțiuni diferă prin  $hr_A = M_A \cdot Q_A^2$ , unde  $M_A$  este modulul de rezistență echivalent al singularității din  $A$  cu modulul de rezistență al tronsonului de conductă de lungime  $l_A$ . Astfel, punctele figurative  $A_{ti-t2}$  și  $a_{ti-t2}$  sunt situate pe aceeași verticală, la distanța  $hr_A$ . Poziția relativă a punctelor  $A_{ti-t2}$  și  $a_{ti-t2}$  depinde de direcția de parcurs a conductei de către undă. În mod analog se poate arăta situația singularității din  $B$ .

#### a. Lovitura de berbec în conductă simplă gravitațională

Se consideră o conductă alimentată gravitațional, prevăzută cu un robinet în capătul său aval. Pierderile de sarcină distribuite se înlocuiesc cu o pierdere fictivă localizată între secțiunile  $r$ ,  $R$  (fig. 10.25). Se trasează în planul  $Q, h$  caracteristica conductei cu considerarea pierderilor atât pentru debite pozitive cât și negative ținând seama de (10.47). Ca și în exemplul 3a se disting două situații în funcție de  $T_p$  și  $\tau$ .



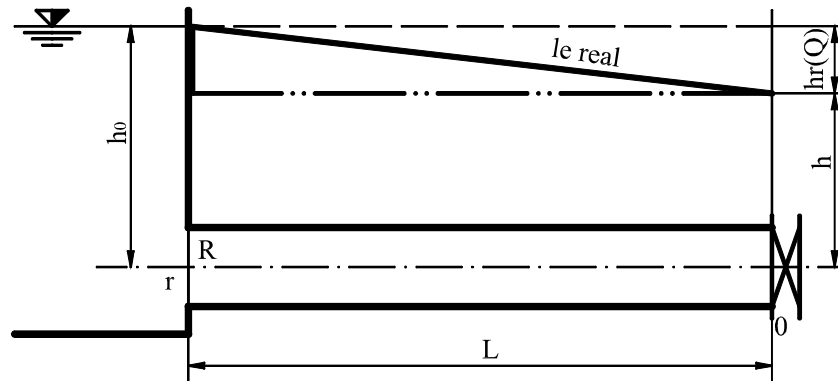
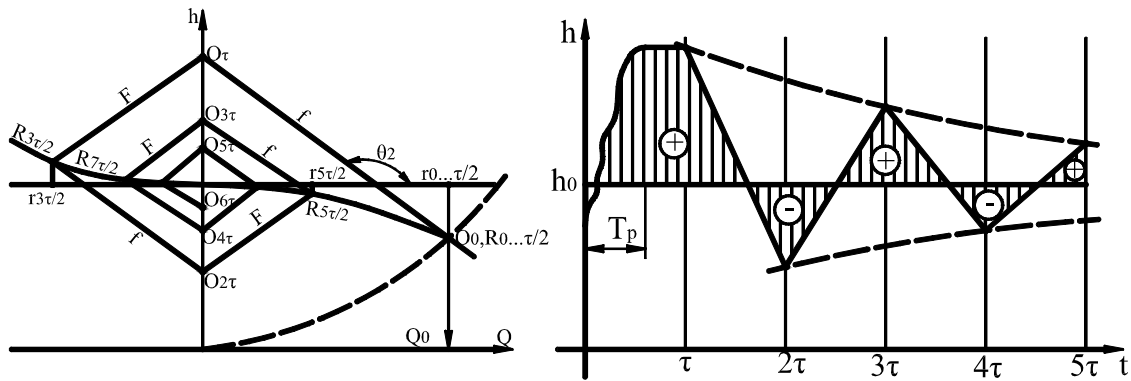


Fig. 10.25. Schema conductei gravitaționale

**a1) Cazul  $T_p < \tau$ .** Se trasează caracteristica robinetului corespunzătoare situației mișcării permanente, înainte de începerea perturbării. Intersecția caracteristicii conductei cu a robinetului este punctul de funcționare  $(Q, h)_0$ . Pentru  $T_p < \tau$  prima undă inversă care sosește la robinet găsește pe acesta închis ( $Q=0$ ), (fig. 10.26).

Fig. 10.26. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională cu robinet, cu considerarea pierderilor de sarcină,  $T_p < \tau$ 

Punctul figurativ  $r_{0... \tau/2}$  se găsește pe caracteristica  $h=h_0$ , pe verticala lui  $R_{0... \tau/2}$ , deasupra acestuia cu  $hr(Q_0)$ . Pentru a determina punctul figurativ  $O_\tau$  un observator urmărește unda  $f$ , care pleacă din  $R$  la momentul  $\tau/2$  și ajunge în  $O$  la momentul  $\tau$  și găsește robinetul închis. Unda  $f$  trece prin  $R_{\tau/2}$ , are coeficientul unghiular  $-m$  ( $\theta_2 = \arctg(-m)$ ) și intersectează caracteristica robinetului închis ( $Q=0$ ). Unda  $f$  la robinet închis se reflectă în  $F$  și ajunge la momentul  $3\tau/2$  în



caracteristica conductei punctul  $R_{3\tau/2}$ . Celelalte puncte  $O_i$ ,  $R_i$  se obțin după același raționament. Punctele  $r_i$  se găsesc pe caracteristica  $h=h_0$  pe aceeași verticală cu  $R_i$ . Presiunile extreme la robinet la  $T_p > \tau$  sunt mai puțin periculoase decât pentru  $T_p < \tau$ . Cu cât robinetul se închide mai lent ecartul presiunilor extreme este mai mic. Datorită pierderilor de sarcină oscilațiile de presiune se amortizează în timp.

**b. Lovitură de berbec în instalația bazin aspirație – pompă – clapet – conductă - bazin de refulare, cu considerarea pierderilor de sarcină (fig. 10.28)**

Pierderile de sarcină distribuite se înlocuiesc ca efect cu o pierdere locală fictivă, produsă de o singularitate în secțiunea  $R$ .

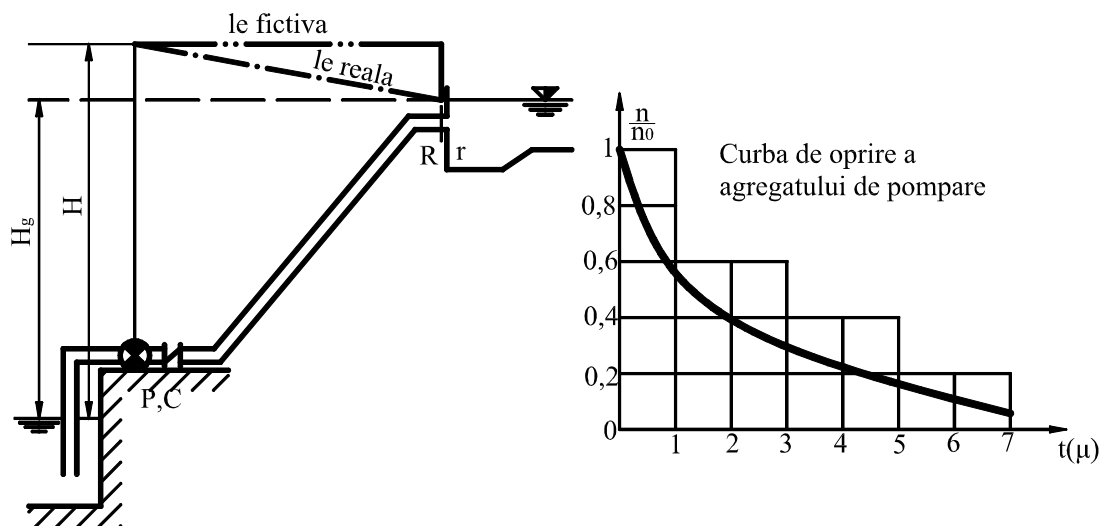


Fig. 10.28. Schema instalației de pompare și de înlocuire a pierderilor de sarcină distribuite cu cele locale fictive

Se presupune că regimul de pompare se menține până la  $t = 3\tau = 6\mu$ ; moment care corespunde închiderii clapetului. Se construiesc în planul  $Q \sim h$  caracteristicile conductei,  $H = H_g + hr(Q)$  și pompei  $Q \sim H$  la timpii de calcul  $\mu = \tau / 2$ . Punctul de funcționare corespunde intersecției caracteristicii conductei cu caracteristica pompei la turația  $n_0$  - punctul figurativ  $(Q_0, H_0)$  - care este specifică secțiunii  $P$  în momentul  $t=0$  și secțiunii  $R$  în perioada  $t = 0 \dots \mu$  (fig. 10.29). Punctul figurativ  $P_{2\mu}$  este la intersecția caracteristicii undei  $F$ , care pleacă de la

rezervor în momentul  $\mu$ , (pct.  $R_\mu$ ), cu caracteristica pompei la momentul  $2\mu$ . Aici unda se reflectă în  $f$  și ajunge la  $R$  în momentul  $3\mu$  (pct.  $R_{3\mu}$ ). Celelalte puncte figurative se obțin în mod asemănător. În momentul  $6\mu$  caracteristica pompei, clapetului închis și unde  $F$  se întâlnesc în  $Q=0$ , celelalte oscilații întâlnind caracteristica clapetului închis pentru curgerea inversă. Punctele figurative  $r_i$  se găsesc pe verticala punctelor  $R_i$ , la intersecția cu  $H=H_g$ . Oscilațiile de presiune se amortizează în timp datorită frecărilor. În caz mai general, momentul apariției debitului invers nu coincide cu un număr întreg de  $\mu$ . În acest caz se caută un moment intermediar de urmărire a unde între  $(-\mu, \mu)$ , care conduce la întâlnirea caracteristicii unde  $F$  cu caracteristica pompei pe caracteristica clapetului închis. Acest punct reprezintă extrema minimă a presiunii în  $P$  la care corespunde, cu un decalaj de timp  $2\mu$ , presiunea maximă.

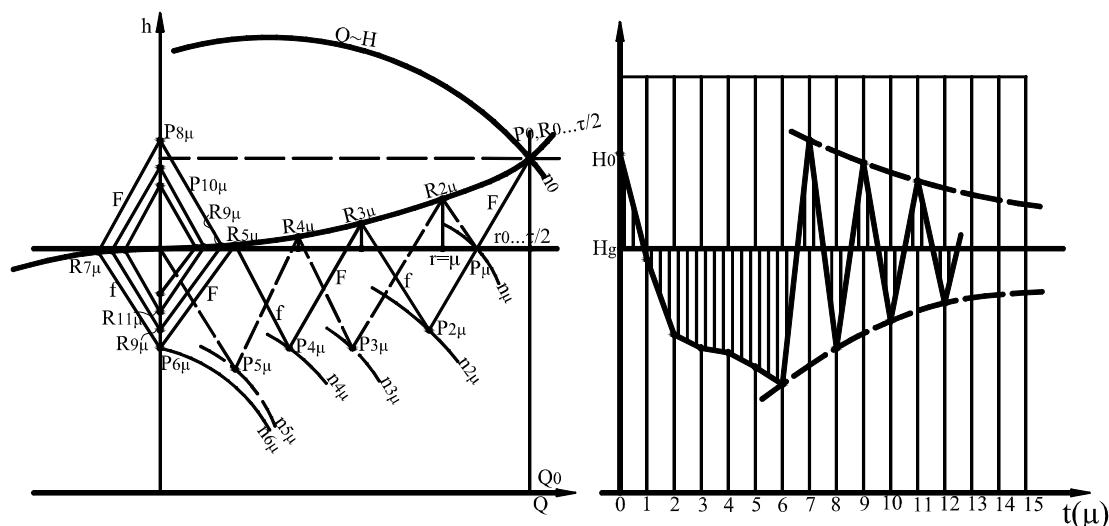


Fig. 10.29. Soluția grafică a loviturii de berbec în conducta instalației de pompare cu clapet de reținere și considerarea pierderilor de sarcină

### 5. Lovitură de berbec în instalație de pompare când apare cavitatea

Dacă inerția părții rotative este mică, oprirea pompei (aparitia debitului invers) are loc în timp scurt, este posibil ca în conductă presiunile minime să ajungă la presiunea de vaporizare și, implicit, să apară fenomenul de cavitație. Într-o asemenea situație se admite ipoteza că presiunea de vaporizare apare pe întreaga secțiune a conductei (în realitate ea apare întâi la generatoarea superioară a conductei) și că lungimea coloanei de lichid rămâne neschimbată. În calcule intervine **caracteristica presiunii de vaporizare**,

$$h_v = \frac{p_v}{\gamma} = \text{const.} \quad (10.66)$$

în secțiunea unde apare cavitația și ecuația de continuitate,

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho Q dt = 0 \quad (10.67)$$

în spațiul unde are loc cavitația,  $t_1$  fiind momentul apariției cavitației, iar  $t_2$  momentul dispariției sale. Ecuația (10.66) arată că în secțiunea unde apare cavitația presiunea rămâne constantă la valoarea  $\gamma h_v$  pe întreaga durată a cavitației. Ecuația (10.67) se interpretează astfel (fig. 10.29').

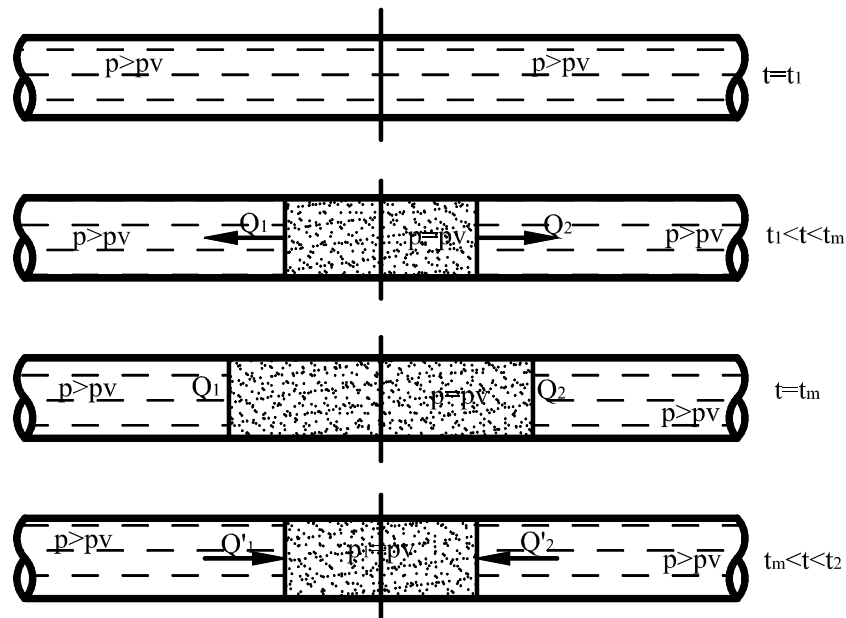


Fig. 10.29'. Interpretarea fenomenului de cavitație în procesul loviturii de berbec.

Fie  $t_m$  momentul în care spațiul ocupat de fenomenul de cavitație este maxim. La momente  $t_1 < t < t_m$ , cele două coloane de lichid după rupere se îndepărtează și volumul de lichid care eliberează spațiul, unde  $h = h_v$  în timpul  $dt$ , este:

$$(Q_1 + Q_2) dt$$

La momente  $t_m < t < t_2$  cele două coloane de lichid se apropie și volumul de lichid care intră în spațiul unde  $h = h_v$ , în timpul  $dt$ , este

$$(Q'_1 + Q'_2) dt$$

Considerând  $\rho = \text{const.}$  pentru  $p \geq p_v$  rezultă

$$\int_{t_1}^{t_m} \rho(Q_1 + Q_2) dt + \int_{t_m}^{t_2} \rho(Q'_1 + Q'_2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho Q dt = 0 \quad (10.68)$$

Dacă  $\mu$  este unitatea de timp de calcul (10.67) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^k Q_i \mu = 0 \text{ sau } \sum_{i=1}^k Q_i = 0 \quad (10.69)$$

unde  $i=1$  este momentul apariției cavitației, iar  $i=k$  - momentul dispariției acesteia.

Pentru exemplificare se consideră instalația din fig. 10.28, cu momentul apariției regimului de frânare (curgere inversă) în intervalul  $t \in [0, 2\mu)$ , deci unda care pleacă de la  $R\mu$  nu întâlnește caracteristica pompei, iar caracteristica clapetului ar intersecta într-un punct de coordonate  $Q=0$ ;  $h < h_v$ , deci apare cavitația și unda întâlnește de fapt caracteristica de cavitație  $h=h_v=\text{const.}$  Unda se reflectă în  $f$  și ajunge în  $R$ , unde iar se reflectă în  $F$ , întâlnind caracteristica  $h=h_v$ . Acest fenomen se repetă până la momentul când dispare cavitația și conform (10.69) are loc la debite simetrice față de axa  $Q=0$  (fig. 10.30).

Punctele  $P_2$  și  $P_{10}$  sunt simetrice față de axa  $Q$ , punctul  $P_{10}$  poate rezulta și cu ajutorul punctului  $V_{2,10}$ , care corespunde intersecției unde  $F$  cu  $Q=0$ , sub valoarea presiunii de vaporizare. Celelalte puncte se găsesc cu raționament asemănător. Pe epura presiunii se constată că pe perioada  $(2 \dots 10)\mu$ , presiunea în punctul  $P$  se menține la  $h_v$ , apoi urmează un salt la  $P_{12}$ , apărând iarăși cavitația în perioada  $(14 \dots 18)\mu$  etc. Oscilațiile de presiune se amortizează datorită frecărilor. Când presiunea la  $P$  nu ajunge la cea de vaporizare unda întâlnește caracteristica clapetului închis. Ruperea coloanei la cavitație limitează presiunile minime la valoarea presiunii de vaporizare, iar refacerea coloanei de lichid implică apariția unor suprapresiuni foarte mari.

Presiunile vacuumetrice ce pot apare la lovitura de berbec sunt deosebit de periculoase în conducte din oțel, de diametru mare și perete subțire. Sub influența presiunii vacuumetrice aceste conducte se pot turti prin depășirea rezistenței conductei la moment încovoietor. De obicei valoarea presiunilor minime se limitează prin dispozitive de protecție.

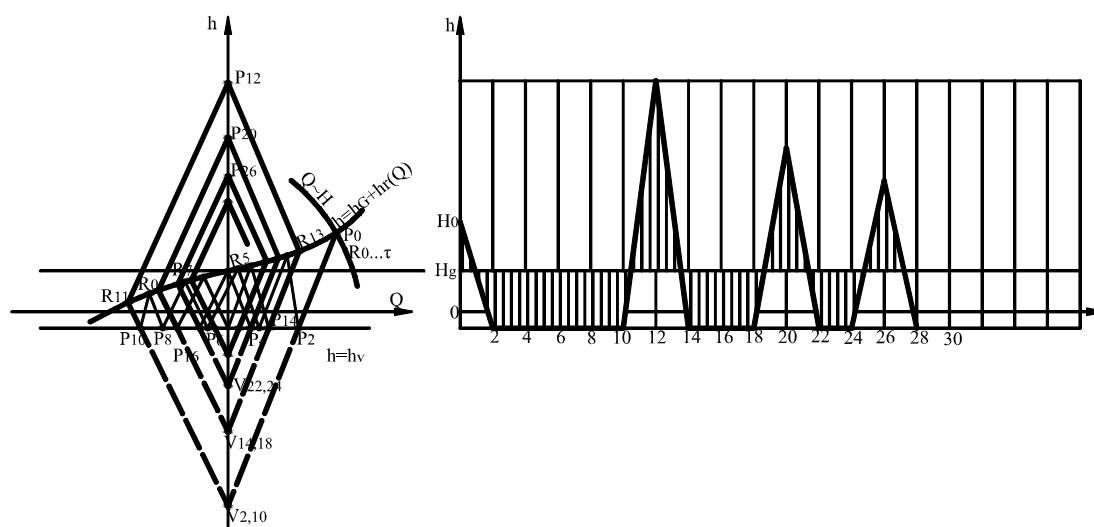


Fig. 10.30. Lovitură de berbec cu apariția cavitației în instalație de pompare

Protecția conductelor împotriva presiunilor vacuometrice care apar la lovitură de berbec se realizează cu rezervoare deschise sau cu pernă de aer, amplasate în secțiunile cele mai nefavorabile.

Practic se transformă mișcarea rapid variată în mișcare lent variată, cu amplitudine mai mică a ecartului de presiune.

a) La lovitură de berbec în instalație de pompare între bazine cu nivel liber conducta este protejată cu un rezervor cu nivel liber (fig. 10.31).

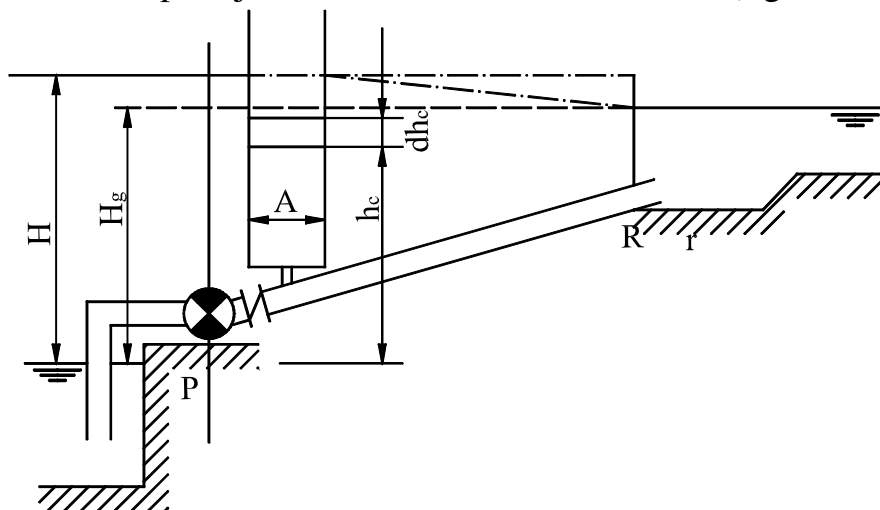


Fig. 10.31. Instalație de pompare cu rezervor cu nivel liber (turn de apă).

<sup>1</sup>Bartha I., Niță M. Popa M. - Unele contribuții privind influența deformațiilor inițiale ale conductelor circulare de mare diametru asupra comportării lor la presiuni vacuometrice - Îmb.funziare și Construc. Rurale, nr.1. 1993.

La soluționarea problemei prin metoda grafică a caracteristicilor se intersectează ecuația undelor (10.56), (10.61) cu caracteristica conductei  $H = H \pm hr(Q)$ , caracteristica pompei  $Q-h$ , clapetului (pentru curgere inversă  $Q=0$ ) și a rezervorului cu nivel liber

$$Q_c dt = A_c dh_c \quad (10.70)$$

unde  $Q_c$  este debitul derivat spre sau dinspre rezervor,  $A_c$  - secțiunea orizontală a rezervorului,  $dh_c$  - variația de nivel în rezervor,  $dt$  - element de timp. Se acceptă unitatea de timp de calcul  $dt = \mu = \frac{\tau}{2}$ , respectiv  $dh_c = \Delta h_c$ , iar  $Q_c$  se consideră la sfârșitul intervalului de timp  $\mu$ . Pentru momentul  $i$  ecuația devine

$$\Delta h_{ci} = \frac{\mu Q_{ci}}{A_c} \quad (10.71)$$

La soluționare se mai consideră continuitatea în ramificația spre rezervor în momentul  $i$

$$Q_{pi} = Q_{ci} + Q_i \quad (10.72)$$

cu  $Q_{pi}$  - debitul pompei;  $Q_{ci}$  - debit derivat în sau din rezervor,  $Q_i$  - debitul conductei. Soluționarea grafică este destul de anevoiasă și necesită acuratețe deosebită.

c) Efect de atenuare asemănător are și rezervorul cu pernă de aer (fig. 10.32).

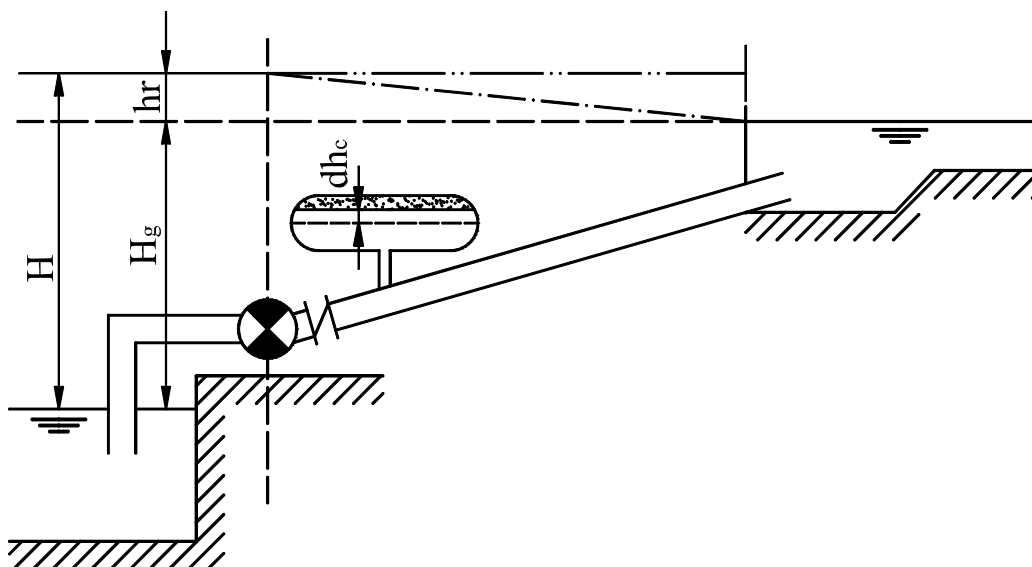


Fig. 10.32. Instalație de pompare protejată de rezervor cu pernă de aer



Soluția loviturii de berbec este asemănătoare cazului precedent, modificându-se caracteristica rezervorului de protecție, care este sub presiune. În locul ecuației (10.70) se scrie relația lui Boyle-Mariotte

$$(h_p + h_0)W_0 = (h_c + h_0)W \quad (10.73)$$

care după diferențiere devine:

$$dh_c = \frac{(h_c + h_0)^2}{W_0(h_p + h_0)} Q_c dt \quad (10.74)$$

S-au notat:  $h_0 = \frac{p_0}{\gamma}$  presiune atmosferică (mCA);  $h_p$  - înălțime de pompare în momentul inițial;  $W$  - volumul de aer în rezervor la un moment oarecare,  $W_0$  - volumul de aer în momentul inițial. Se știe  $dW = Q_c dt$ . Se acceptă timp de calcul  $dt = \mu$ , respectiv  $Q_c = Q_{ci}$  și se notează

$$\varphi(h_{ci}) = \frac{W_0(h_p + h_0)}{(h_{ci} + h_0)^2} \quad (10.75)$$

Astfel (10.74) devine

$$\Delta h_{ci} = \frac{\mu}{\varphi_i} Q_{ci} \quad (10.76)$$

care este caracteristica rezervorului cu pernă de aer, analoagă cu (10.71). Soluția este asemănătoare cazului precedent. Pentru rigurozitate se pot considera și pierderile de sarcină la intrarea și ieșirea din și în rezervor cu pernă de aer (sau cu nivel liber).

### 10.2.7.2. Metoda numerică a caracteristicilor

Dacă metodele grafice permit calculul loviturii de berbec în instalații hidraulice relativ simple, dezvoltarea calculatoarelor permite rezolvarea practic a tuturor problemelor de lovitură de berbec pentru care s-a elaborat algoritmi; pot fi soluționate probleme atât pe conducte monofilare cât și rețele.

Se utilizează pe scară largă metoda caracteristicilor, dar și serii de funcții analitice.

Metoda caracteristicilor presupune rezolvarea pe calculator, după un algoritm adecvat, a unor sisteme de ecuații în care intră ecuațiile dreptelor caracteristice, ecuația de continuitate, ecuația caracteristică a conductei cu pierderi de sarcină, curbele caracteristice ale pompelor și ale dispozitivelor de pe conducte (ecuațiile mișcării în condiții de unicitate).

Metoda caracteristicilor se aplică ori cu concentrarea pierderilor de sarcină la singularități fictive, ori uniform distribuite. Se prezintă algoritmul de calcul pentru situația când pierderile de sarcină sunt concentrate la singularități fictive.

În acest caz calculele analitice repetă calculele grafice anterior prezentate. Conducta se împarte în tronsoane de calcul, se introduc singularități fictive în locul pierderilor liniare, se stabilește unitatea de timp de calcul corespunzătoare timpului de propagare a undei de presiune pe tronsonul cel mai mic  $\mu = \tau / 2$ . Se scriu ecuațiile mișcării pe fiecare tronson de calcul și condițiile de racordare ale acestora în debite și presiuni (se ține seama de singularitățile fictive considerate). În secțiunile unde sunt dispozitive se introduc ecuațiile lor caracteristice.

Algoritmul se prezintă prin câteva exemple.

1) Fie o singularitate fictivă între două tronsoane cu același timp de propagare a undei de presiune (fig. 10.33).

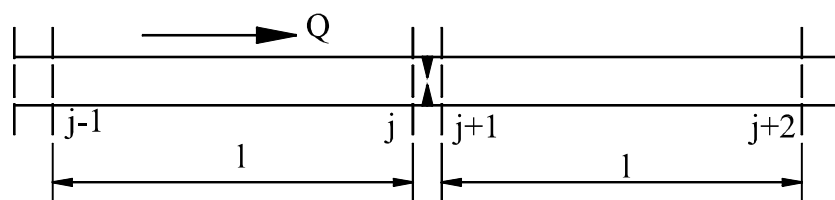


Fig. 10.33. Schema de calcul pe tronsoane simple

Se afectează mărimile hidraulice cu doi indici, primul indicând secțiunea de calcul, al doilea timpul la care se referă. Mărimile geometrice care nu se modifică în timp se afectează cu un singur indice (indicatorul spațiului), care indică tronsonul la dreapta secțiunii de calcul respective.

La timpul  $i$  se cunosc toate valorile mărimilor hidraulice variabile. La acest moment parametrii  $Q$ ,  $h$  în secțiunile  $j$  și  $j+1$  se determină din ecuațiile:

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j-1),i} = -m_{(j-1)} \left[ Q_{j,(i+1)}^* - Q_{(j-1),i} \right] \quad (10.77)$$

$$h_{(j+1),(i+1)}^* - h_{(j+2),i}^* = -m_{(j+1)} \left[ Q_{(j+1),(i+1)}^* - Q_{(j+2),i} \right] \quad (10.78)$$

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j+1),(i+1)}^* = -M_j Q_{j,(i+1)}^* \quad (10.79)$$

$$Q_{j,(i+1)}^* = Q_{(j+1),(i+1)}^* \quad (10.80)$$

Cu asterisc s-au marcat necunoscutele.

Prima ecuație este caracteristică unei  $f$ , care pleacă din secțiunea  $j-1$  la momentul  $i$  și ajunge în secțiunea  $j$  la momentul  $i+1$ . A doua ecuație este caracteristica unei  $F$ , care pleacă din secțiunea  $j+2$  la momentul  $i$  și ajunge în secțiunea  $j+1$  la momentul  $i+1$ . A treia ecuație este pierderea de sarcină la singularitatea fictivă, iar a patra ecuație exprimă continuitatea. Cele patru ecuații conțin patru necunoscute unic determinate.

2) Se consideră secțiunea de legătură a unui rezervor de echilibru cu nivel liber cu conductă de refulare (fig. 10.34).

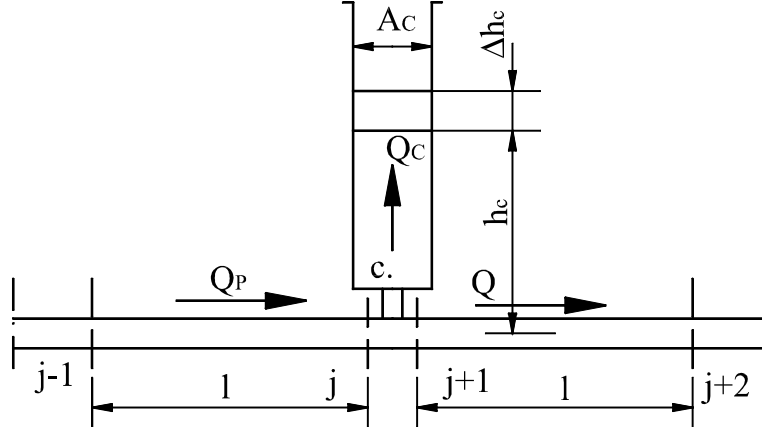


Fig. 10.34. Schema de calcul a racordului rezervorului de echilibru la conductă

Se pot scrie următoarele ecuații:

- caracteristica rezervorului de echilibru

$$h_{c,i} - h_{c,(i+1)}^* = -\frac{\mu}{2A_c} \left[ Q_{c,i} - Q_{c,(i+1)}^* \right] \quad (10.81)$$

- caracteristica undei  $f$

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j-1),i} = -m_{(j-1)} \left[ Q_{j,(i+1)}^* - Q_{(j-1),i} \right] \quad (10.82)$$

- caracteristica undei  $F$

$$h_{(j+1),(i+1)}^* - h_{(j+2),i} = m_{(j+1)} \left[ Q_{(j+1),(i+1)}^* - Q_{(j+2),i} \right] \quad (10.83)$$

- legătura de presiuni între secțiunile  $j$  și  $j+1$

$$h_{j,(i+1)}^* = h_{(j+1),(i+1)}^* \quad (10.84)$$

- caracteristica intrării în rezervorul de echilibru

$$h_{c,(i+1)}^* - h_{j,(i+1)}^* = M_c Q_{c,(i+1)}^* \quad (10.85)$$

- ecuația de continuitate

$$Q_{j,(i+1)}^* = Q_{(j+1),(i+1)}^* + Q_{c,(i+1)}^* \quad (10.86)$$

În situația când în loc de rezervor de echilibru cu nivel liber se folosește rezervor cu pernă de aer se înlocuiește  $A_c$  cu  $\varphi(h_{c,i})$ , dată de relația (10.75), corespunzător momentului  $i$ .

3) Se consideră instalația de pompare din fig. 10.35. Se împarte conducta în  $N/2$  tronsoane de calcul egale. Rezervorul cu pernă de aer se presupune în nodul  $k, k+1$  (punct nefavorabil din punct de vedere al presiunilor minime).

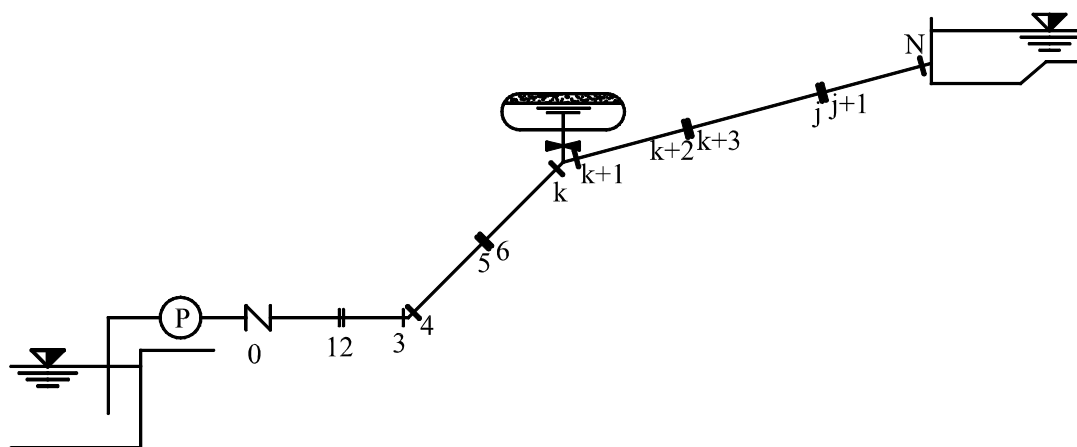


Fig. 10.35. Schema instalației de pompare considerate

La momentul  $i$  se cunosc toate caracteristicile mișcării. Se scriu ecuațiile pentru stabilirea parametrilor în momentul  $i+1$ :

- în secțiunea pompei unda  $F$ :

$$h_{0,(i+1)} - h_{1,i} = m_0 [Q_{0,(i+1)} - Q_{1,i}] \quad (10.87)$$

și caracteristica pompei

$$h_{0,(i+1)} = a_{0,(i+1)} + b_{0,(i+1)} Q_{0,(i+1)} + c_{0,(i+1)} Q_{0,(i+1)}^2 \quad (10.88)$$

pentru  $Q_{0,(i+1)} > 0$ , unde  $(a, b, c)_{0,(i+1)}$  sunt coeficienți care depind de turația  $n_{(i+1)}$ , la momentul  $(i+1)$ . S-a descris caracteristica pompei cu un polinom de gradul 2. Pentru

$$Q_{0,(i+1)} = 0 \quad (10.89)$$

se înlocuiește (10.88) cu (10.89), care este caracteristica clapetului închis. Eventual în loc de (10.89) se utilizează o lege de închidere a clapetului sau robinetului cu închidere programată. Pentru tronsoanele  $0 < j < k$  și  $k+1 < j < N$  sunt valabile ecuațiile (10.77...80). În secțiunea  $k$  sunt valabile ecuațiile (10.82...86) cu înlocuirea  $A_c$  cu  $\varphi(h_{c,i})$  din relația

$$\varphi_{k,i} = \frac{W_0 \left( h_{c,0} + \frac{p_0}{\gamma} \right)}{\left( h_{c,i} + \frac{p_0}{\gamma} \right)^2} \quad (10.90)$$

Se pot considera unul sau mai multe rezervoare de protecție pe traseu, cu nivel liber sau cu pernă de aer. Volumul de apă din rezervorul cu pernă de aer se determină cu relația

$$W_{apa} = \int_0^{t1} Q_c dt = \sum_{i=0}^{i=i_1} Q_{c,i} \Delta t \quad (10.91)$$

unde limita superioară  $t_I = i_I$  rezultă din condiția  $Q \leq 0$  (rezervorul în prima fază alimentează conducta). Volumul total al rezervorului cu pernă de aer, când nu se admite intrarea aerului în conductă, este:

$$W_{tot} = W_0 + W_{apa} \quad (10.92)$$

Uneori se acceptă și intrarea aerului în conductă, care reduce volumul total al rezervorului. Aerul se deplasează sub formă de pungi și se evacuează la dispozitivele de dezaerisire sau la refulare. Aerul introdus în conductă poate provoca noi lovituri de berbec și din acest considerent rezervorul cu pernă de aer se supradimensionează cu un coeficient de 1,2... 1,3.

### 10.2.8. Mijloace de protecție ale conductelor împotriva efectelor loviturii de berbec

Ecuatiile diferențiale ale loviturii de berbec fiind analoage ecuației corzilor vibrante, înfășurătoarea presiunilor extreme se poate trasa aproximativ, cunoscând presiunile extreme în punctele de margine  $R$  (rezervor) și  $P$  (pompă), prin reprezentarea grafică a ecuației presiunilor. Liniile înfășurătoare a presiunilor extreme suprapuse cu profilul longitudinal al conductei (eventual și cu linia piezometrică în regim permanent) permit stabilirea presiunilor extreme-manometrice și vacuometrice - din conductă, respectiv a secțiunilor nefavorabile (fig. 10.36).

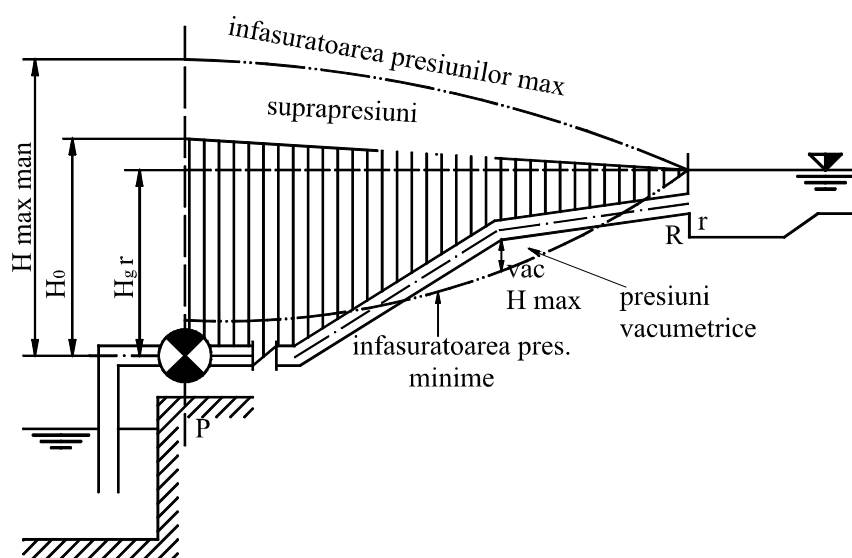


Fig. 10.36. Stabilirea punctelor periculoase

Punctele periculoase pe traseul conductei sunt: secțiunea  $P$  pentru suprapresiuni și secțiunea  $C$  pentru subpresiuni (vacuumetrice). La presiuni vacuumetrice conductele din oțel cu diametru mare și perete subțire se pot turti prin depășirea rezistenței la încovoiere. La suprapresiune se poate depăși rezistența conductelor.

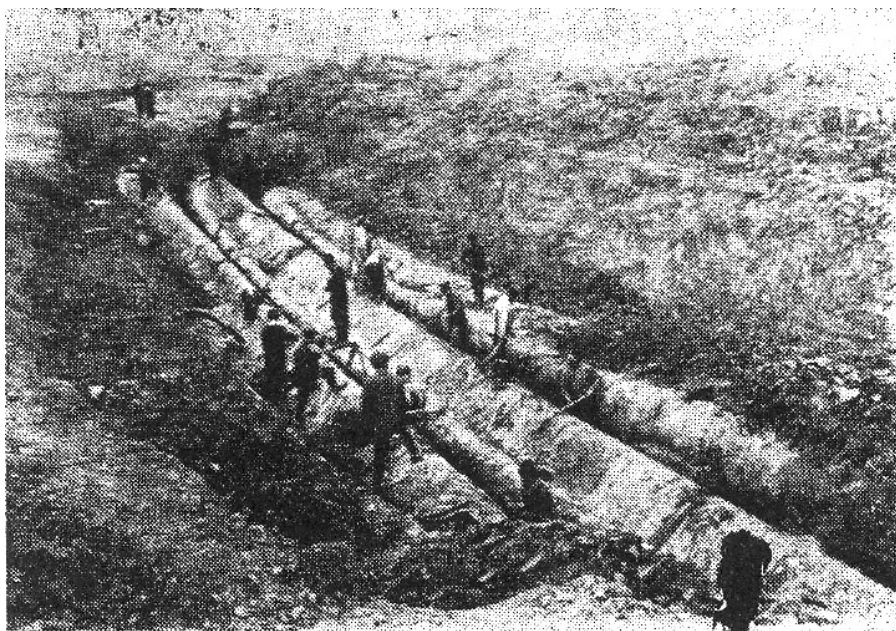


Fig.10.37. Turtirea conductelor la presiuni vacuumetrice

### 1. Metode și mijloace pentru limitarea subpresiunilor

Metode de limitare a subpresiunilor pot admite ruperea coloanei de lichid - introducând aer în conductă sau la presiunea de vaporizare - sau împiedicarea ruperii coloanei.

a) *împiedicarea ruperii coloanei de lichid*, poate fi realizată prin mai multe metode:

- la instalații hidraulice cu pompare se prelungește timpul de funcționare a agregatului prin sporirea inerției maselor rotative (se mărește  $GD^2$ ). Este uzual la pompe mici, care se prevăd cu volant;
- alimentarea cu apă a conductei din bazinul de aspirație prin conductă de ocolire (by-pass), prevăzută cu clapet;
- introducerea în conductă a unui debit de apă în punctele de presiune vacuumetrică maximă din rezervoare cu nivel liber sau cu pernă de aer. La legătura acestor rezervoare cu conducta se utilizează uneori rezistențe hidraulice asimetrice, care au rezistență hidraulică mai mică la cedarea apei decât la umplere;

b) *Acceptarea ruperii coloanei de lichid* - dar nu prin cavitație ci înainte de apariția acesteia - prin introducerea de aer în conductă în secțiunile de presiuni vacuometrice maxime, cu dispozitive de aerisire - dezaerisire (în aceleași secțiuni trebuie asigurată și evacuarea ulterioară a aerului).

## **2. Metode de limitare a suprapresiunilor**

Metodele de limitare a suprapresiunilor sunt multiple, dintre care se menționează:

- evacuarea unei cantități de apă din conductă în rezervoare de protecție cu nivel liber sau cu pernă de aer. În acest caz apa evacuată se recuperează ulterior;
- evacuarea unor cantități de apă în atmosferă (fără posibilitate de recuperare) prin dispozitive antișoc (supape cu arc sau greutate calibrate, care se deschid la atingerea unei anumite suprapresiuni);
- limitarea curgerilor inverse pe traseul conductei cu clapete găuriți;
- utilizarea unor membrane calibrate care se autodistrug la depășirea presiunilor, evacuând apa;
- fracționarea suprapresiunilor pe conductă cu clapete de reținere pe traseu;
- utilizarea, în loc de clapete de reținere, a robineților cu închidere programată.

Cea mai eficientă metodă este transformarea mișcării rapid variată în mișcare lent variată, creșterea perioadei oscilațiilor, concomitent cu reducerea amplitudinii lor.

### **10.2.9. Fenomene asociate loviturii de berbec. Stabilitatea sistemelor hidraulice sub presiune**

Sistemele hidraulice sub presiune sunt echipate cu dispozitive de reglare a debitelor, presiunilor, de protecție sau de atenuare a efectelor loviturilor de berbec. Deseori avem de-a face cu rețele de conducte cu ramificații. În astfel de instalații lovitura de berbec constă în suprapunerea undelor de pe linia principală și din ramificații cu undele provocate de organele perturbatoare. Când frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului coincide sau este apropiată de frecvența oscilațiilor perturbatoare se pot realiza suprapresiuni foarte mari, apărând fenomenul de instabilitate hidraulică sau rezonanță.

Un sistem hidraulic sub presiune se consideră instabil, dacă oscilațiile de presiune care apar în urma unor perturbații, care intervin în condițiile limită,



se dezvoltă în timp nelimitat, amplitudinea lor crescând la valori nedefinit de mari (fig. 10.38.)

Un sistem hidraulic este stabil dacă perturbațiile intervenite în condițiile limită produc oscilații care se amortizează în timp (fig. 10.38. b).

Oscilațiile de presiune într-un sistem hidraulic se pot descompune în oscilații elementare componente, în armonici simple. În cazul când frecvența factorilor perturbatori este egală sau apropiată de frecvența proprie sistemului - corespunzătoare armonicei principale sau secundare - apare rezonanța, caz particular de instabilitate hidraulică.

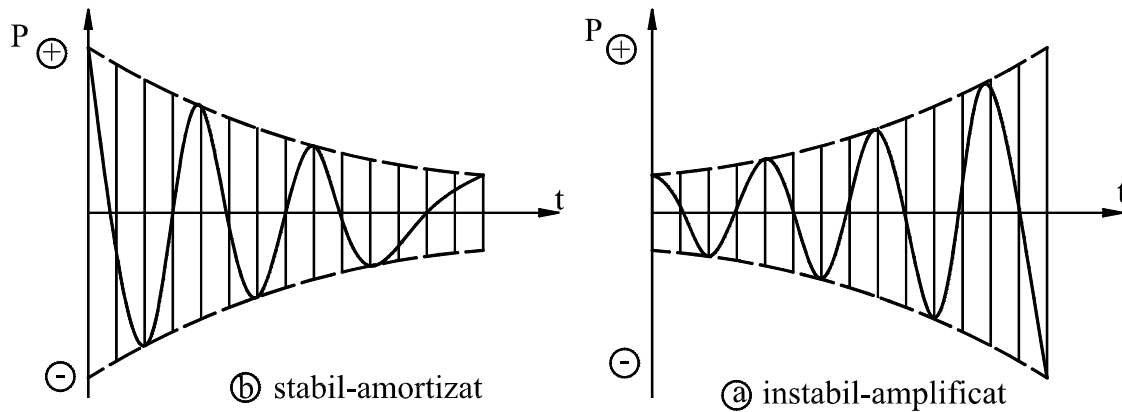


Fig. 10.38. Oscilații de presiune în sisteme hidraulice sub presiune

Rezonanța nu conduce neapărat la creșterea necondiționată a amplitudinii oscilațiilor de presiune, însă poate conduce la valori ale presiunii care depășesc limitele admisibile (din punct de vedere al rezistenței materialului).

Revăzând ecuațiile diferențiale ale loviturii de berbec

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (10.21)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad (10.22)$$

la care, în cazul coincidenței de sens între axa  $s$  și viteza  $v$ , se poate scrie

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \rho c \frac{\partial v}{\partial s} \quad (10.93)$$

Folosind analiza operațională, presiunea, respectiv viteza în transformate Laplace, se pot scrie

$$\mathcal{L}(p) = \bar{p} = \int_0^{\infty} p \cdot e^{-rt} dt \quad (10.94)$$

și

$$\mathcal{L}(V) = \bar{v} = \int_0^{\infty} V \cdot e^{-rt} dt \quad (10.95)$$

Unde  $\bar{p}$  și  $\bar{v}$  sunt imaginea, transformata lui  $p$  și  $v$ ;  $r = \sigma + i\nu$  este o mărime complexă, cu  $\sigma, \nu \in R$ .

În condițiile inițiale nule, ecuațiile (10.21 și 10.22) în transformate Laplace devin:

$$r^2 \bar{p} = c^2 \frac{d^2 \bar{p}}{ds^2}; \frac{d^2 \bar{p}}{ds^2} - \left(\frac{r}{c}\right)^2 \bar{p} = 0 \quad (10.96)$$

$$r^2 \bar{v} = c^2 \frac{d^2 \bar{v}}{ds^2}; \frac{d^2 \bar{v}}{ds^2} - \left(\frac{r}{c}\right)^2 \bar{v} = 0$$

respectiv

$$-r \bar{p} = c^2 \frac{d\bar{v}}{ds} \quad (10.93')$$

Notând cu  $\alpha = r/c$ , expresiile gener ale ale soluțiilor lui (10.96) sunt:

$$\begin{cases} \bar{p} = A_1 e^{\alpha s} + A_2 e^{-\alpha s} \\ \bar{v} = B_1 e^{\alpha s} + B_2 e^{-\alpha s} \end{cases} \quad (10.97)$$

Din condițiile (10.93) și (10.93'), rezultă

$$B_1 = -\frac{A_1}{\rho c} \quad \text{și} \quad B_2 = \frac{A_2}{\rho c} \quad (10.98)$$

care  $A_1, A_2, B_1, B_2$  sunt constante complexe.

Soluțiile (10.97) se pot pune sub forma

$$\bar{p} = \frac{A}{r-z}; \quad \bar{v} = \frac{B}{r-z} \quad (10.99)$$

$A, B$  și  $z$  fiind constante complexe.

Analiza condițiilor de stabilitate hidraulică se reduce la determinarea valorilor lui  $z$  care anulează numitorul expresiilor (10.99).

Transformata Lapalce a imaginii  $\bar{p}$  este însăși funcția inițială, care are forma

$$p = Ae^{zt} \quad (10.100)$$

Dacă partea reală a lui  $z$ ,  $Re\ z < 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} p = 0$  și reprezintă un sistem hidraulic stabil. Dacă  $Re\ z > 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} p \rightarrow \infty$  și sistemul hidraulic este instabil.

Stabilitatea sistemului hidraulic sub presiune se obține pentru valori ale lui  $z$  din semiplanul complex stâng. Cazul  $Re\ z=0$  corespunde curbei de indiferență. Pe curba de indiferență oscilațiile sunt întreținute și corespund frecvențelor proprii sistemului hidraulic. Cunoscând frecvența proprie a sistemului hidraulic se cunosc, implicit, și condițiile de rezonanță, care rezultă din soluția ecuației oscilațiilor periodice, de forma

$$p = Ae^{i\omega t} \quad (10.101)$$

Pentru condiția de rezonanță frecvența perturbațiilor trebuie să coincidă sau să fie apropiată frecvenței  $\omega$  a sistemului. Oscilațiile proprii ale sistemelor hidraulice sub presiune fiind rezultatul suprapunerii unor oscilații simple (armonica de bază și armonici secundare), condiții de rezonanță se pot obține și în cazul când perturbația are frecvența armonice de bază sau a unor armonici secundare principale.

Sisteme hidraulice stabile au frecvența sistemului sau a armonice de bază și a celor secundare principale diferită de frecvența perturbației. Convergența variației de presiune se poate grăbi dacă pe oscilațiile proprii sistemului, de frecvență  $\nu$ , se suprapune efectul perturbației de aceeași frecvență, dar de sens contrar. Acest procedeu se poate aplica numai în cazurile când există un control riguros al frecvenței și sensului oscilațiilor perturbatoare.

### 10.3. Mișcare nepermanentă lent variată (Oscilații de masă)

Dacă pe conducta de refulare a unei instalații de pompare se intercalează un rezervor de echilibru cu nivel liber sau cu pernă de aer, mișcarea nepermanentă între acest rezervor și bazin de refulare este oscilatorie sau periodică.

La perturbarea condițiilor la limită (ex. oprirea pompei), masa de apă din rezervorul de echilibru și conducta de refulare, cuprins între rezervor și bazinul de refulare, va avea o mișcare de oscilație dacă rezistențele hidraulice sunt mici sau o mișcare aperiodică - dacă rezistențele hidraulice sunt mari. Pe acest tronson se poate neglija compresibilitatea apei și elasticitatea conductei, fiind valabile ecuațiile mișcării permanente lent variate.

Pe tronsonul dintre rezervorul de echilibru și pompe mișcarea este rapid variată (lovitură de berbec).

Fenomenul este asemănător cu mișcarea oscilatorie din castelele de echilibru și galeria centralelor hidroelectrice sau în alte sisteme hidraulice de conducte cu rezervoare (conducte de sifon coborâtor sau urcător cu rezervor de mărime limitată la ieșire etc.)

#### 10.3.1. Ecuațiile mișcărilor lent variate

La aceste mișcări se acceptă modelul lichidului incompresibil, deci variația de viteză se transmite instantaneu de la o extremitate la alta a conductei, deci  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ . Se scrie ecuația mișcării și de continuitate (fig. 10.39).

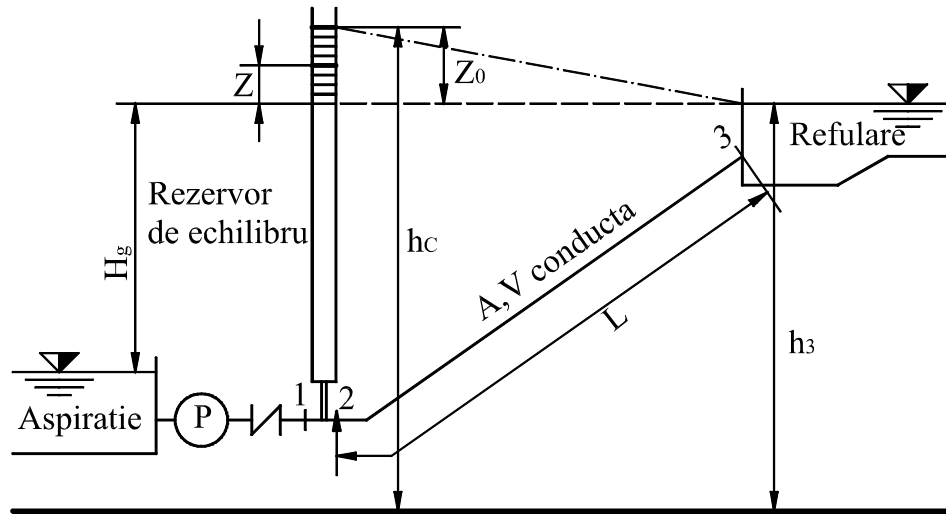


Fig. 10.39. Schema instalației de pompare cu rezervor de echilibru cu nivel liber

Ecuția energiei în mișcare nepermanentă între secțiunile 2 și 3 este

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_2^3 \frac{\partial V}{\partial t} dl + hr \quad (10.102)$$

dar  $V$  fiind independent de  $l$  rezultă:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + hr \quad (10.103)$$

Din continuitate se poate scrie

$$Q_1 = Q_2 + Q_c \quad (10.104)$$

Secțiunile 1 și 2 fiind infinit vecine,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad (10.105)$$

iar la intrarea în rezervorul de echilibru avem:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left( z_c + \frac{p_c}{\gamma} \right) = M_c Q_c^2 \quad (10.106)$$

respectiv pierderile pe conductă între 2 și 3 se pot exprima sub forma

$$h_r = M_v V |V| \quad (10.107)$$

Se notează

$$M_v = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g}; h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma}; h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}; h_3 = z_3 + \frac{p_3}{\gamma}; h_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma}; z = h_c - h_3$$

Se știe

$$Q_c = A_c \frac{dh_c}{dt} \text{ și } Q_2 = AV$$

În aceste condiții ecuația de mișcare (10.103) și de continuitate (10.104) devin:

$$\left\{ z - \frac{L}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - M_v |V| V - (h_c - h_2) = 0 \quad (10.108) \right.$$

$$\left\{ Q_1 = A_c \frac{dh_c}{dt} + AV \quad (10.109) \right.$$

$$\left\{ h_c - h_2 = M_c Q_c^2 = MA_c \frac{dh_c}{dt} \quad (10.110) \right.$$

Sistemul de trei ecuații conține trei necunoscute  $-h_2$ ,  $h_c$  și  $V$ - care se obțin prin integrarea sistemului. Cazurile de integrare corespund neglijării pierderilor de sarcină (atât pe conductă cât și la intrarea în rezervorul de echilibru) sau considerării lor în mișcare laminară sau turbulentă.

### 10.3.2. Integrarea exactă a ecuațiilor mișcării

Se consideră cazul nefavorabil de oprire bruscă a pompei.

#### 1. Neglijarea pierderilor de sarcină ( $M_v=0$ și $M_c=0$ )

În acesta ipoteză  $h_c = h_2$ ;  $h_2 = z + h_3$ ;  $dh_c = dh_2 = dz$ ;  $Q_1 = 0$  și ecuațiile (10.108... 10.110) devin

$$z = -\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad (10.111)$$

și

$$V = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt} \quad (10.112)$$

Se derivează (10.112) în raport cu timpul  $\frac{dV}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{d^2z}{dt^2}$  și se înlocuiește în (10.111), obținând

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Ag}{A_c L} z = 0 \quad (10.113)$$

care este ecuația diferențială a oscilațiilor armonice. Notând  $\sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} = k$ , soluția soluția generală a ecuațiilor este

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (10.114)$$

Constantele de integrare rezultă din condițiile inițiale: pentru  $t = 0$ ;  $z = z_0$  și  $V = V_0$  astfel:  $C_1 = z_0$  și  $C_2 = -\frac{VA}{A_c} \sqrt{\frac{A_c L}{Ag}}$  respectiv

$$z_0 = z_0 \cos \sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t - \frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{A_c L}{Ag}} \sin \sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t \quad (10.115)$$

care poate fi pusă sub forma

$$z = \sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{A_c A_g}} \sin \left[ \sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t + \arctg \left( \frac{A_c z_0}{Q} \sqrt{\frac{gA}{A_c L}} \right) \right] \quad (10.116)$$

Mișcarea este oscilatorie sinusoidal, cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{A_c L}{gA}} \quad (10.117)$$

și amplitudinile maxime și minime

$$\begin{cases} z_{\max} = \sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{g A A_c}} \\ z_{\min} = -\sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{g A A_c}} \end{cases} \quad (10.118)$$

superioare denivelării inițiale  $z_0$  (fig. 10.40).

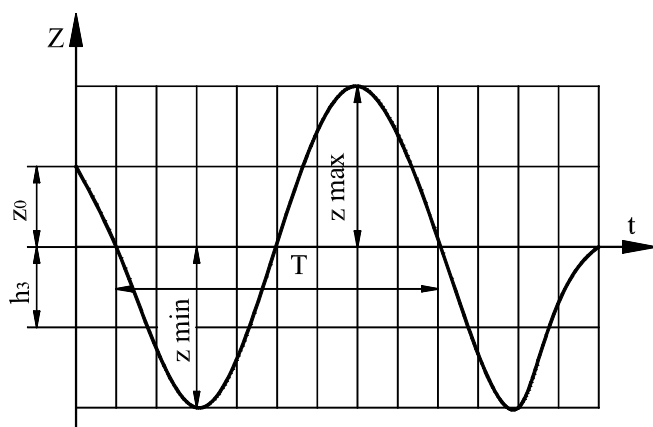


Fig. 10.40. Variația nivelului apei în rezervorul de echilibru la neglijarea pierderi de sarcină

Oscilațiile de nivel nu se amortizează fiindcă s-au neglijat pierderile de sarcină.

## 2. Pierderile de sarcină pe conductă se consideră proporționale cu viteza (regim laminar), iar la intrarea în rezervor se neglijează

Situația nu corespunde realității, dar evidențiază calitativ rolul pierderii de sarcină. Pentru  $h_c = h_2$ ;  $h_r = M_v V$  și oprirea pompei  $Q_I = 0$ , rezultă:

$$\begin{cases} z = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + M_v \end{cases} \quad (10.119)$$

$$\begin{cases} V = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (10.112)$$

sau după eliminarea lui  $V$ ,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \pm \frac{g M_v}{L} \frac{dz}{dt} + \frac{g A}{L A_c} z = 0 \quad (10.120)$$



După înlocuirea  $z = e^{rt}$ , ecuația caracteristică devine:

$$r^2 \pm \frac{gM_v}{L}r + \frac{gA}{LA_c} = 0 \quad (10.121)$$

din care se obține

$$r^2 = -\frac{gM_v}{L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g^2 M_v^2}{L^2} - 4 \frac{gA}{LA_c}} \quad (10.122)$$

Se disting trei situații:

**a) discriminantul negativ,**  $\frac{M_v^2}{4} < \frac{LA}{gA_c}$ , pierderile de sarcină sunt relativ mici, rezultă:

$$r_{1,2} = -\frac{gM_v}{2L} \pm i \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} \quad (10.123)$$

Soluția ecuației (10.120) este

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left[ C_1 \cos \left( \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) + C_2 \sin \left( \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) \right] \quad (10.124)$$

Pentru condițiile la limită din cazul precedent rezultă  $C_1 = z_0$  și

$$C_2 = \frac{M_v z_0}{2} \sqrt{\frac{gA_c}{LA}} - \frac{\frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{LA_c}{gA}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}}$$

respectiv (10.124) devine

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left\{ z_0 \cos \left( \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) - \left[ \frac{\frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{LA_c}{gA}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} - \frac{M_v z_0}{2} \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \right] \sin \left( \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) \right\} \quad (10.125)$$

Mișcarea nivelului apei în rezervorul de echilibru este **oscilatorie amortizată**, cu amplitudine monoton descrescătoare (fig. 10.41)

$$Ampl = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \sqrt{z_0^2 + C_2^2} \quad (10.126)$$

Perioada convențională (perioada între două elongații de același sens) este

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_c}{A}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} \quad (10.127)$$

Pierderile de sarcină măresc perioada oscilației.

**b) discriminant nul**,  $\frac{M_v^2}{4} = \frac{LA}{gA_c}$ , ecuația (10.124) are rădăcină dublă,

cu soluții particulare de formele  $z = e^{rt}$  și  $z = te^{rt}$ . Soluția generală este de forma

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} (C_1 t + C_2) \quad (10.128)$$

Constantele de integrare rezultă din condițiile inițiale

$$C_2 = z_0 \text{ și } C_1 = \frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}$$

obținând

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left[ z_0 + \left( \frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c} \right) t \right] \quad (10.129)$$

Diferența de nivel  $z$  din rezervorul de echilibru tinde asimptotic la nivelul hidrostatic  $h_3$ . Mișcarea este **aperiodică**: dacă  $\frac{M_v}{2} > \frac{QL}{gz_0 A_c}$ ,  $z$  rămâne tot timpul pozitiv, iar dacă  $\frac{M_v}{2} < \frac{QL}{gz_0 A_c}$ ,  $z$  trece de la valori pozitive la negative și tinde la zero, rămânând totdeauna negativă (fig. 10.41).

c) **discriminant pozitiv**,  $\frac{M_v}{2} > \frac{L}{g} \frac{A}{A_c}$ , pierderile de sarcină sunt mari, soluția generală a ecuației (10.122) fiind

$$z = C_1 e^{-\frac{gM_v}{2L} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}} \right) t} + C_2 e^{-\frac{gM_v}{2L} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}} \right) t} \quad (10.130)$$

constantele de integrare fiind:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( z_0 + \frac{\frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}}{\frac{gM_v}{2L} \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}}} \right) \quad (10.131)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( z_0 + \frac{\frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}}{\frac{gM_v}{2L} \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}}} \right) \quad (10.132)$$

Mișcarea este aperiodică,  $z$  nu-și schimbă semnul și tinde la zero în timp (fig. 10.41).

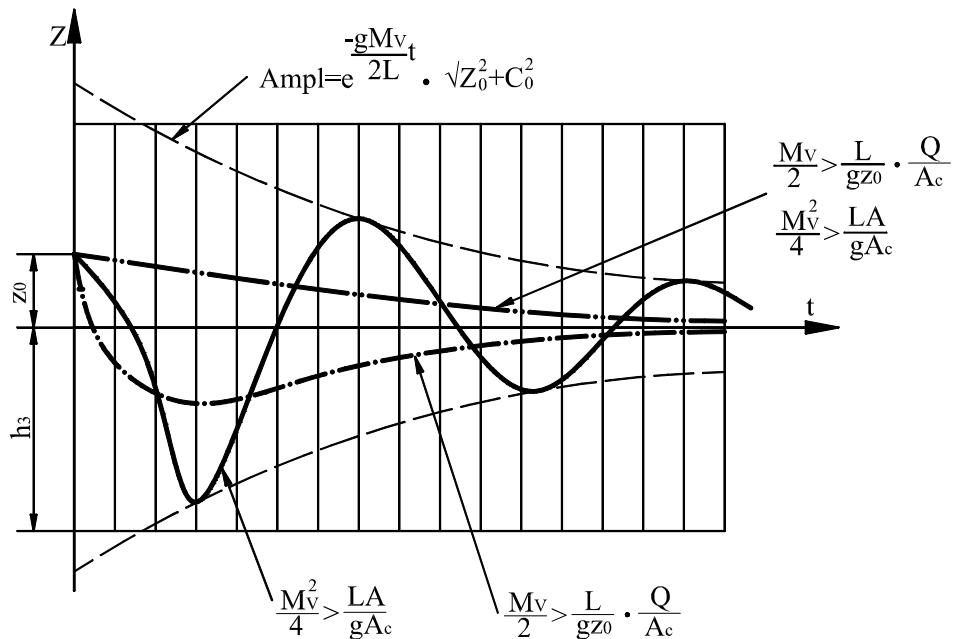


Fig. 10.41. Variația nivelului în rezervorul de echilibru când  $hr = M_v V$ .

### 3. Pierderile de sarcină se consideră în regim turbulent atât pentru intrarea în rezervorul de echilibru cât și pe conductă

Rezistența locală la intrare în rezervorul de echilibru se poate considera asimetrică.

Ecuatiile mișcării (10.108 ...10.110), pentru  $Q_1 = 0$ ;  $z = h_c - hs$

$$h_2 - h_c = M_c A_c^2 \left( \frac{dh_c}{dt} \right)^2 = M_c A_c^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$V = -\frac{A_c}{A} \frac{dh_c}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

devin

$$z - \left( M_v \frac{A_c^2}{A^2} + M_{cc} A_c^2 \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{L}{g} \frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (10.133)$$

pentru  $V > 0$  și  $\frac{dz}{dt} < 0$  și

$$z + \left( M_v \frac{A_c^2}{A^2} + M_{cu} A_c^2 \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{L}{g} \frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (10.134)$$

pentru  $V < 0$  și  $\frac{dz}{dt} > 0$ . S-a considerat  $M_{cc}$  modulul de debit al rezistenței hidraulice asimetrice când nivelul coboară în rezervorul de echilibru și  $M_{cu}$  când nivelul urcă.

Notând cu

$$m = \frac{2gA \cdot A_c}{L} \left( M_c + \frac{M_v}{A^2} \right) \text{ și } n = \frac{gA}{L \cdot A_c},$$

ținând seama de natura asimetrică a lui  $m(m_{ub}, m_c)$ , datorită lui  $M_c(M_{cu}, M_{cc})$ , ecuațiile (10.133 și 10.134) devin

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + nz = 0 \quad (10.135)$$

Pentru  $\frac{dz}{dt} < 0$ ,  $m = m_c = \frac{2gA \cdot A_c}{L} \left( M_{cc} + \frac{M_v}{A^2} \right)$  și  
 pentru  $\frac{dz}{dt} > 0$ ,  $m = -m_u = -\frac{2gA \cdot A_c}{L} \left( M_{cu} + \frac{M_v}{A^2} \right)$ .

Se utilizează substituția

$$u = \frac{dz}{dt} \quad (10.136)$$

respectiv

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = u \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dt},$$

(10.135) devenind

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dz} - \frac{m}{2} u^2 + nz = 0 \quad (10.137)$$

Notând  $u^2 = w$  (10.137) se transformă într-o ecuație diferențială liniară neomogenă de prim ordin:

$$\frac{dw}{dz} - mw + 2nz = 0 \quad (10.138)$$

Soluția ecuației omogene este

$$w_1 = C_1 e^{mz} \quad (10.139)$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene se caută de forma

$$w_2 = C_2 z + C_3 \quad (10.140)$$

Cu soluția particulară din (10.138) se obțin

$$C_2 = \frac{2n}{m} \text{ și } C_3 = \frac{2n}{m^2} \quad (10.141)$$

Soluția generală a lui (10.138) este

$$w = C_1 e^{mz} + \frac{2n}{m} z + \frac{2n}{m^2} \quad (10.141)$$

sau pentru  $V > 0$

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2n}{m_c} z + \frac{2n}{m_c^2}} + C_1 e^{-m_c z} \quad (10.142)$$

și pentru  $V < 0$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{-\frac{2n}{m_u}z + \frac{2n}{m_u^2} + C_1 e^{-m_u z}} \quad (10.143)$$

Constanta  $C_1$  se determină din prima semioscilație, din condițiile inițiale, iar pentru celelalte din condiția de continuitate a elongației.

Condițiile inițiale sunt:

$$t = 0, w = u^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{Q}{A_c}\right)^2; \frac{dz}{dt} = -\frac{Q}{A_c}; z = z_0$$

pentru prima semioscilație obținând:

$$C_1 = \left(\frac{Q^2}{A_c^2} - \frac{2nz_0}{m_c} - \frac{2n}{m_c^2}\right) e^{-m_c z_0} \quad (10.144)$$

Din definirea lui  $m_c$  rezultă

$$\frac{2n}{m_c} = \frac{1}{A_c^2 \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2}\right)}$$

iar pierderea de sarcină în momentul inițial este:

$$z_0 = M_{cc} Q^2 + M_v V^2 = Q^2 \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2}\right),$$

deci

$$\frac{Q^2}{A_c^2} = \frac{2nz_0}{m_c} \text{ și } C_1 = -\frac{2n}{m_c^2} e^{-m_c z_0} \quad (10.145)$$

Relația (10.142) pentru prima semioscilație devine:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2n}{m_c^2} \left[m_c z + 1 - e^{-m_c (z - z_0)}\right]} \quad (10.146)$$

Condiția de extrem,  $dz/dt=0$ , conduce la:

$$\frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} = e^{m_c z_0} \quad (10.147)$$

care se rezolvă grafic (fig. 10.42).

Se obțin două valori  $z_1 > 0$  și  $z_2 < 0$ . Valoarea  $z_1 > 0$  este ireală, corespunzând timpului  $t < 0$ . Rămâne valabilă valoarea  $z_2 < 0$ , care este nivelul minim din rezervorul de echilibru la prima semioscilație.

$$\frac{e^{m_c z_2}}{1 + m_c z_2} = e^{m_c z_0} \quad (10.148)$$

La semioscilația următoare nivelul în rezervorul de echilibru crește  $dz/dt > 0$ , iar viteza apei în conductă este negativă (alimentează rezervorul) și este valabilă relația (10.143). Constanta  $C_1$  se determină din condiția continuității curbei oscilațiilor nivelului în timp. Elongația calculată cu relația (10.143) să fie identică cu  $z_2$ , rădăcina ecuației (10.147). La  $z = z_2$  nivelul apei în rezervorul de echilibru este staționar și  $dz/dt = 0$ , sau

$$-\frac{2n}{m_u} z_2 + \frac{2n}{m_u^2} + C_1 e^{-m_u z_2} = 0,$$

de unde

$$C_1 = \left( \frac{2n}{m_u} z_2 - \frac{2n}{m_u^2} \right) e^{m_u z_2} \quad (10.149)$$

$C_1$  introdus în (10.143), cu condiția  $dz/dt = 0$  stabilește a treia elongație maxim pozitivă,  $z = z_3$ , din relația:

$$\frac{e^{-m_u z_3}}{1 - m_u z_3} = \frac{e^{m_u z_2}}{1 - m_u z_2} \quad (10.150)$$

Semioscilația următoare este descrisă de ecuația (10.142) în care constanta  $C_1$  rezultă din condiția  $z = z_3$  și  $dz/dt = 0$ ;

$$\frac{2n}{m_c} z_3 + \frac{2n}{m_c} + C_1 e^{m_c z_3} = 0$$

sau

$$C_1 = -\frac{2n}{m_c^2} (m_c z_3 + 1) e^{-m_c z_3} \quad (10.151)$$

Cu acest  $C_1$ , înlocuit în (10.142) și cu condiția  $dz/dt = 0$ , se găsește elongația negativă  $z_4$ , corespunzătoare semioscilației 3, din relația

$$\frac{e^{m_c z_4}}{1 + m_c z_4} = \frac{e^{m_c z_3}}{1 + m_c z_3} \quad (10.152)$$

Celelalte oscilații se obțin în mod analog.

Pentru elongația maximă negativă,  $z_i$  (dacă  $i$  este par) se utilizează relația

$$\frac{e^{m_c z_i}}{1 + m_c z_i} = \frac{e^{m_c z_{i-1}}}{1 + m_c z_{i-1}} \quad (10.153)$$

în care  $z_{i-1} > 0$ .

Pentru elongația maximă pozitivă,  $z_{i+1}$  (cu  $z_{i+1}$  impar) se folosește relația

$$\frac{e^{-m_u z_{i+1}}}{1 - m_u z_{i+1}} = \frac{e^{-m_u z_i}}{1 - m_u z_i} \quad (10.154)$$

în care  $z_i < 0$ . Ecuatiile (10.153 și 10.154) sunt valabile pentru  $i \geq 2$ .

Rezolvarea ecuațiilor (10.153) și (10.154) pe cale grafică este ușoară. Se reprezintă funcțiile

$$F_1(z) = \frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} \text{ și } F_2(z) = \frac{e^{-m_u z}}{1 - m_u z} \quad (10.155)$$

apoi pe curba  $e^{m_c z}$ , cu  $z=z_0$  se găsește punctul  $M_c$  și punctele  $M_1$  și  $M_2$  (pe curba  $F_1(z)$ ), de abscisele  $z_1$  și  $z_2$ , apoi cu  $z_2$  pe curba  $F_2(z)$  se găsesc punctele  $M'_2$  și  $M_3$ , de abscise  $z_2$  și  $z_3$ ; cu  $z_3$  pe curba  $F_1(z)$  se găsesc punctele  $M'_3$  și  $M_4$ , cu abscisa  $z_1$  ș.a.m.d. (fig. 10.42). Perioada oscilației se poate lua după (10.127).

Rezervorul cu nivel liber trebuie astfel dimensionat încât oscilațiile de nivel să rămână în interiorul acestuia. În raport cu rezistențele hidraulice pe conductă și la derivația rezervorului, mișcarea poate fi oscilatorie amortizată sau aperiodică.



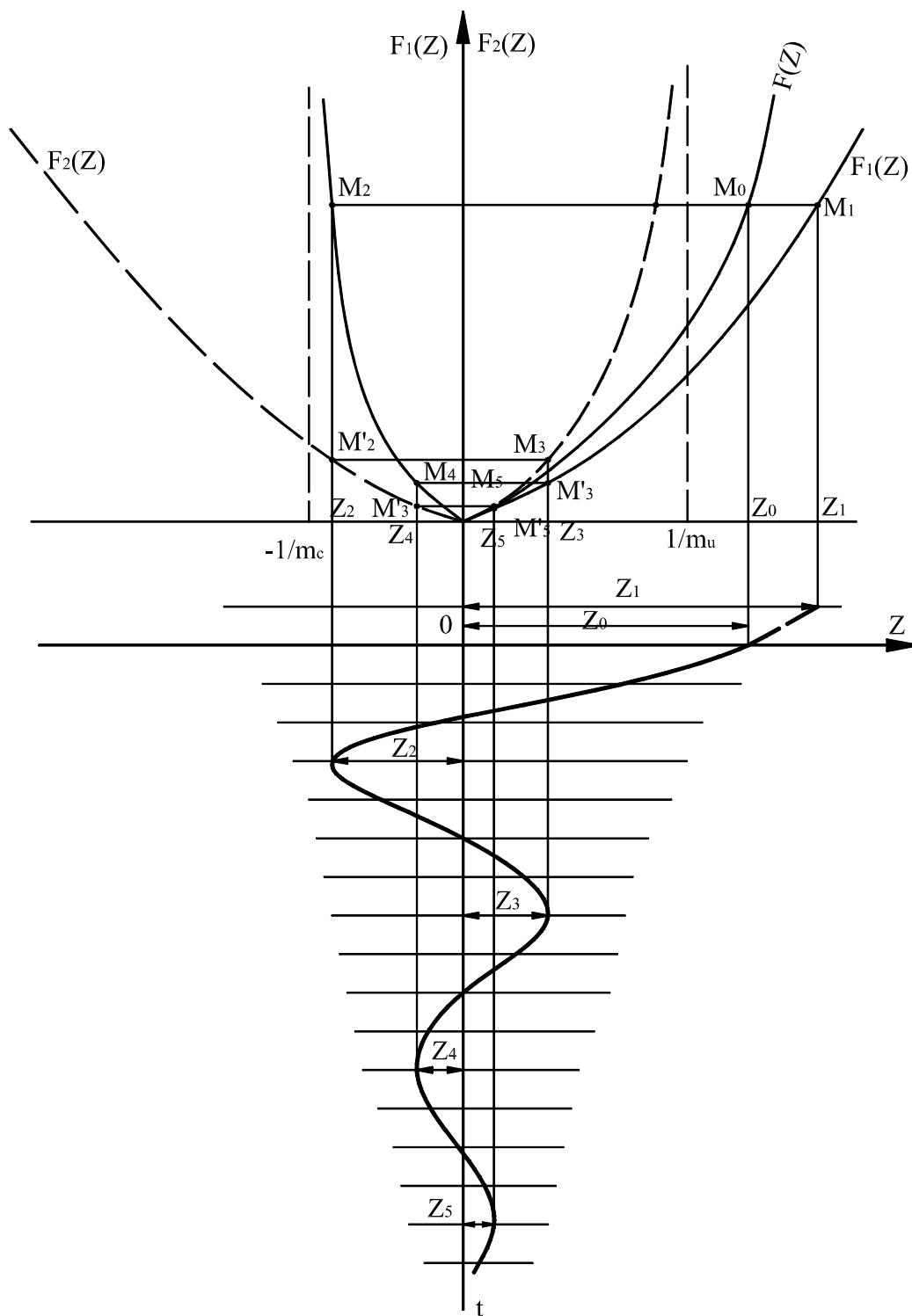


Fig. 10.42. Soluționarea grafică a oscilațiilor de masă în rezervor cu nivel liber și rezistență hidraulică asimetrică în turbulență pătratică

### 10.3.3. Alte metode de soluționare ale ecuațiilor mișcării lent variate

#### 1. Metoda diferențelor finite

În ultima perioadă frecvent se utilizează metode numerice pentru soluționarea ecuațiilor (10.108... 10.110). În acest scop ecuațiile se transcriu în diferențe finite.

Eliminând din ecuațiile menționate  $h_c - h_2$  și știind că  $\frac{dh_c}{dt} = \frac{dz}{dt}$ , se obține

$$z - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} - M_v |V| V + M_c A_c^2 \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} = 0 \quad (10.156)$$

și

$$Q_l = A_c \frac{dz}{dt} + AV \quad (10.157)$$

în care:  $M_c = M_{cc}$  pentru  $\frac{dz}{dt} < 0$  și  $M_c = M_{cu}$  pentru  $\frac{dz}{dt} > 0$ .

Secțiunea orizontală a rezervorului de echilibru poate fi variabilă  $A_c = A_c(z)$ .

Se înlocuiesc diferențialele cu diferențe finite, astfel:  $dt = \Delta t$ ;  $dz = \Delta z$  și  $dV = \Delta V$ , iar ecuațiile (10.156 și 10.157) se scriu pentru valori medii ale variabilelor

$$z_m - \frac{L}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t} - M_v |V_m| V + M_c A_{cm}^2 \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0 \quad (10.158)$$

$$Q_{lm} = A_{cm} \frac{\Delta z}{\Delta t} - AV_m \quad (10.159)$$

în care

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i; \Delta z = z_{i+1} - z_i; \Delta V = V_{i+1} - V_i; V_m = \frac{1}{2}(V_{i+1} + V_i);$$

$$A_{cm} = \frac{1}{2}(A_{c(i+1)} + A_{ci}); Q_{lm} = \frac{1}{2}(Q_{l(i+1)} + Q_{l,i}).$$

La momentul inițial,  $i=0$ , se cunosc valorile tuturor variabilelor. În orice moment  $i$  se cunoaște debitul pompei (din topogramă, iar după oprire  $Q_l=0$ ).

Algoritmul poate fi următorul:

- se adoptă un pas de timp  $\Delta t$  (pe durata opririi pompei,  $t_0$ ,

$$\Delta t = t_0 / (15 \dots 25), \text{ iar după oprire } \Delta t = T_0 / (40 \dots 60), \text{ cu } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_c}{A}}.$$

La momentul  $t_{i+1}$  se calculează  $Q_{1,i+1}$  și  $Q_{1m}$ .

- se dă o valoare  $z'_{i+1} \neq z_i$  ( $z_{(i+1)}' = z_i + \Delta z$ , eventual cu  $\Delta z$  din pasul anterior) și se determină la  $z'_{i+1}$  valoarea  $A_{cm}$ ;

- din (10.159) se calculează  $V_m$ ;

- din (10.158) se determină  $z_m$ , apoi  $z_{(i+1)}'' = 2z_m - z_i$ ;

- se compară  $z'_{i+1}$  cu  $z_{i+1}''$ , iar când  $|z_{(i+1)}' - z_{(i+1)}''| \leq \varepsilon z$  se trece la pasul următor. În caz contrar se adoptă o nouă valoare pentru  $z'_{i+1}$ .

$$z'_{i+1} = \frac{1}{2}(z'_{i+1} + z_{i+1}'') \quad (10.160)$$

și se repetă calculele.

Calculele pot fi efectuate cu calculatorul sau chiar manual.

## 2. Metoda grafică (după Schoklitsch)

Acesta metodă constă în soluționarea pe cale grafică a ecuațiilor (10.158) și (10.159). Se neglijează pierderea de sarcină la intrarea în rezervorul de echilibru, iar ecuațiile se pun sub forma

$$W = \frac{g}{L}(z - h_r)\Delta t \quad (10.161)$$

$$\Delta z = (Q - AV) \frac{\Delta t}{A_c} \quad (10.162)$$

În planurile figurative  $z - V$ ,  $z - W$ ,  $z - t$  se trasează mai multe curbe, luând ca origine un punct  $O$ , la nivelul hidrostatic  $h = Hg$ . Pe axa absciselor se ia viteza  $V$ , pozitivă spre stânga și timpul  $t$  la dreapta, cu unitatea de timp  $\Delta t = T_0 / (20 \dots 30)$ , iar pe ordonată  $z$  (variația de nivel în rezervorul de echilibru).

**Curba I.** Curba pierderilor de sarcină pe conductă, între secțiunile 2 și 3, cu caracteristica  $h_r = \pm M_v V^2$ , în stânga pentru viteze pozitive, în dreapta pentru viteze negative;

**Curba II.**  $\Delta V = \frac{g}{L} z \cdot \Delta t$ , pentru  $\Delta t = \text{const}$ . Paralel cu aceasta se vor duce drepte reprezentate de ecuația (10.161), când  $hr$  ia diferite valori;

**Curba III,** reprezintă volumul intrat (sau ieșit) în (din) rezervorul de echilibru în timpul  $\Delta t$ , corespunzătoare diferitelor viteze  $V$  de pe conductă

$$\Delta W = A \cdot \Delta t \cdot V$$

Se construiește pentru  $\Delta t = \text{const}$ . Se trasează cu originea în  $O$  și având aceeași abscisă cu curba I, însă ordonata divizată în volume. Are valori negative pentru  $V$  pozitiv și invers.

**Curba IV** este curba volumului acumulat în rezervorul de echilibru  $W(z)$ , cu creșterile de volum  $\Delta W$  pe abscisă, iar  $z$  pe ordonată. Pentru claritatea figurii se preferă ca aceasta să fie trasată în afara construcției grafice anterioare, luându-se o origine arbitrară pe axa vitezelor. Curba permite determinarea variației de nivel  $\Delta z$  sub variația de volum  $\Delta W$  (fig. 10.43).

**Curba V,** reprezintă variația volumului în unitatea de timp  $\Delta t$ , deci caracterizează variația debitului pompat în timp. Se obține din curba de oprire la diferiți timpi  $\Delta t$ .

$$\Delta W_p = Q_{p(n)} \Delta t$$

După oprirea pompei valoarea sa se ia nulă. Această curbă se poate construi separat.

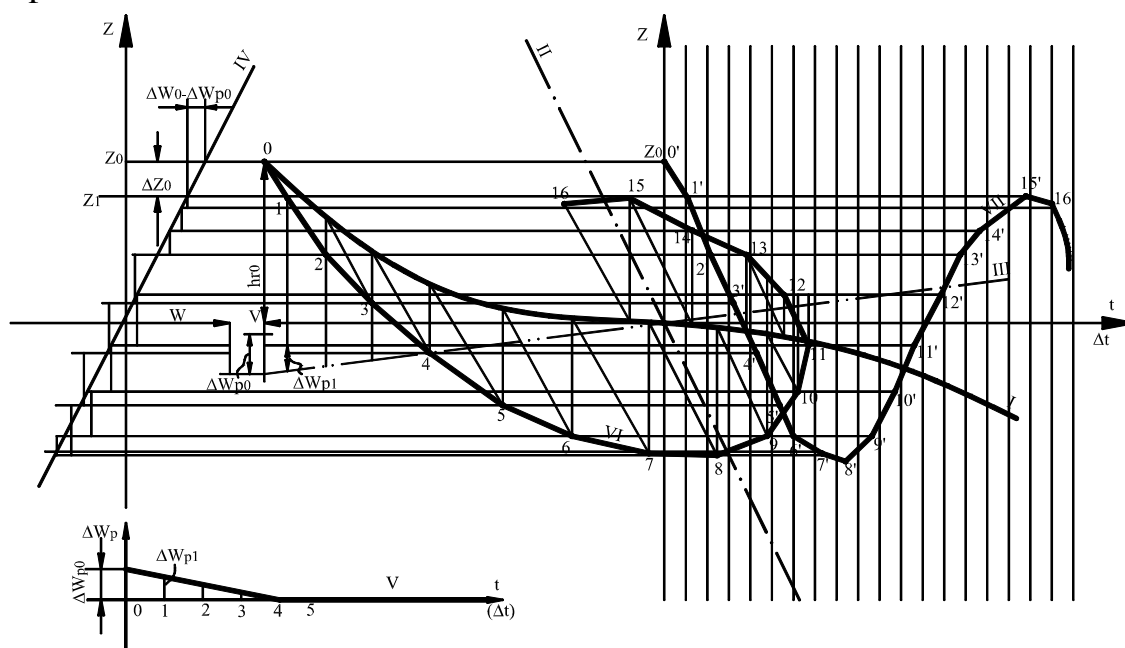


Fig. 10.43. Soluția grafică a oscilațiilor de masă în rezervor de echilibru la instalație de pompare

Rezolvarea sistemului de ecuații se face astfel:

- se pleacă din punctul 0, situat pe curba I, corespunzător punctului de funcționare în momentul  $t = 0$ , având pierderi  $hr_0$ , nivelul din rezervorul de echilibru fiind  $z_0$ . Din acest punct se duce o orizontală până la curba IV și la  $t = 0$ , o verticală până la dreapta III și o paralelă la II. Din curba V, pentru momentul  $t = 0$  se obține volumul pompat în timpul  $\Delta t$ ,  $\Delta W_{po}$ , care se scade din volumul  $\Delta W$  ce ar ieși din rezervorul de echilibru fără pompare (obținut pe verticală între abscisă și curba III). Cantitatea  $\Delta W_0 - \Delta W_{po}$  este volumul efectiv ieșit din rezervor, se plasează pe orizontală, cu originea pe curba IV în stânga. De la extremitatea sa se duce verticala până la curba IV, segmentul vertical reprezentând scăderea de nivel  $\Delta z_0$  în timpul  $\Delta t$  și determină pe axa Z nivelul din rezervor în momentul  $t = \Delta t$ . Din acest punct se duce o orizontală până la  $t = \Delta t$ , punctul obținut 1' reprezentând nivelul din rezervor în  $t = \Delta t$ , deci  $z(t)$ . Intersecția acestei orizontale cu paralela la II din pct. O, determină punctul 1 de pe curba  $z(V)$ , cu care se determină parametrii de funcționare în momentul  $t = \Delta t$ ,  $V = V_1, hr = hr_1, \Delta W = \Delta W_1$ . Celelalte puncte se obțin după același algoritm, rezultând în final curba spirală  $z = z(V)$  și oscilația nivelului în rezervorul de echilibru  $z = z(t)$ .

Mărimile  $z$  și  $V$  obținute prin această construcție grafică corespund începutului de interval de timp și nu valorilor medii pe interval. Sporirea preciziei metodei presupune reducerea intervalului de timp  $\Delta t$ .

## 10.4. Aplicații

10.1. O instalație de pompare refulează pe o conductă din oțel vechi, cu  $D = 1200$  mm,  $L = 1706$  m,  $e = 6$  mm, la înălțimea geodezică de pompare  $H_g = 20$  m. Caracteristica pompei corespunde tabelului 10.2. Conducta este prevăzută cu clapet de reținere la pompă. Cunosând  $\varepsilon = 2,06 \cdot 10^4$  daN / cm<sup>2</sup>,  $E = 2,25 \cdot 10^6$  daN / cm<sup>2</sup> și  $\rho = 1000$  kg / m<sup>3</sup>, să se calculeze presiunea la pompă la întreruperea alimentării cu energie electrică. Schema instalației corespunde figurii 10.28.

**Tabelul 10.2** Caracteristica pompei

$n_0 = 585 \text{ rot/min}, \phi = 720 \text{ mm}, \eta_{\max} = 0,76$						
Q (m <sup>3</sup> /s)	0,333	0,764	1,041	1,278	1,470	1,583
H (mCA)	28	26	24	22	20	18

Curba de orpire este dată grafic în fig. 10.44.

**Rezolvare:**

1. Se determină celeritatea

$$C = \frac{\sqrt{\varepsilon / \rho}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} = \frac{\sqrt{2,06 \cdot 10^9 / 1000}}{\sqrt{1 + \frac{1,2}{0,006} \frac{2,06 \cdot 10^9}{2,25 \cdot 10^{11}}}} = 853 \text{ m/s}$$

2. Timpul de reflexie a undelor de presiune

$$\tau = \frac{2L}{c} = \frac{2,1706}{853} = 4,0 \text{ s}$$

Timpul de calcul se acceptă

$$\mu = \tau / 2 = 4 / 2 = 2 \text{ s}$$

3. Caracteristica conductei

- se determină  $\lambda = 0,0191 \times 1,15 \times 1,18 = 0,02595$  (conductă veche din oțel montată prin sudură în condiții de șantier);

- pierderile de sarcină sunt:

$$h_r = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8\lambda l}{g\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8 \cdot 0,02595 \cdot 1706}{9,81\pi^2 \cdot 1,25^5} Q^2 = 1,470 Q^2$$

- caracteristica conductei este

$$h = H_g \pm MQ^2 = 20 \pm 1,470 Q^2$$

4. Caracteristicile loviturii de berbec

- coeficientul unghiular al dreptelor undelor de presiune

$$\frac{c}{gA} = \frac{4c}{g\pi D^2} = \frac{4 \cdot 853}{9,81\pi \cdot 1,2^2} = 76,88$$

- caracteristica undelor de presiune

$$h - h_i = \pm \frac{c}{gA} (Q - Q_i); h - h_i = \pm 76,88 (Q - Q_i)$$

Caracteristicile pompei la diferite momente se calculează pe baza curbei de oprire din fig. 10.44.

Reprezentarea grafică a caracteristicii conductei și a pompei la  $n_0$  (fig. 10.44) stabilește punctul de funcționare inițial  $H_0 = 22,25 \text{ m}$  și  $Q_0 = 1,26 \text{ m}^3/\text{s}$ . Se reprezintă caracteristicile pompei la diferite momente și se intersectează cu caracteristicile undelor de presiune la momente corespundente  $\mu, 2\mu, 3\mu, 4\mu$  și  $6\mu$  după care caracteristica loviturii întâlnește clapetul închis. În cazul de față presiunea minimă se obține când caracteristicile undei de presiune, clapetului și pompei se întâlnesc în punct comun, care aproape corespunde  $t = 6,5\mu$ , după care oscilațiile de presiune și de debit întâlnesc caracteristica clapetului închis. Soluția problemei corespunde fig. 10.44, în care este prezentată și variația presiunii în timp la pompă.

**Tabel 10.3.** Caracteristicile pompei s-au calculat după relațiile (10.51)

t (s)	n (rot/min)	Caracteristica de sarcină (Q în $\text{m}^3/\text{s}$ , H în mCA)							n/ $n_0$
$0,5\mu = 1$	479,3	Q	-	-	-	1,086	1,250	1,346	0,850
		H	-	-	-	15,90	14,45	13,01	
$\mu = 2$	447,5	Q	0,254	0,584	0,796	0,977	1,125	1,210	0,765
		H	16,39	15,22	14,05	12,87	11,70	10,53	
$2\mu = 4$	386,6	Q	0,210	0,481	0,656	0,805	0,926	0,997	0,63
		H	11,11	10,32	9,53	8,73	7,94	7,14	
$2,5\mu = 5$	329,4	Q	-	0,430	0,586	0,720	0,828	0,891	0,563
		H	-	8,24	7,61	6,97	6,34	5,71	
$3\mu = 6$	304,2	Q	0,173	0,397	0,541	0,665	0,764	0,823	0,520
		H	5,57	7,03	6,49	5,95	5,41	4,87	
$4\mu = 8$	257,4	Q	0,147	0,336	0,458	0,562	0,647	0,697	0,440
		H	5,42	5,03	4,65	4,26	3,87	3,48	
$4,5\mu = 9$	234,0	Q	0,133	0,306	0,416	0,511	0,588	0,633	0,400
		H	4,48	4,16	3,84	3,52	3,20	2,88	
$5\mu = 10$	216,5	Q	0,123	0,283	0,386	0,473	0,544	0,586	0,370
		H	3,83	3,56	3,29	3,01	2,74	2,46	
$6\mu = 12$	181,4	Q	0,103	0,237	0,323	0,396	0,456	0,491	0,310
		H	2,69	2,50	2,31	2,11	1,92	1,73	
$6,5\mu = 13$	169,7	Q	0,097	0,220	0,302	-	-	-	0,290
		H	1 2,35	2,19	2,02	-	-	-	

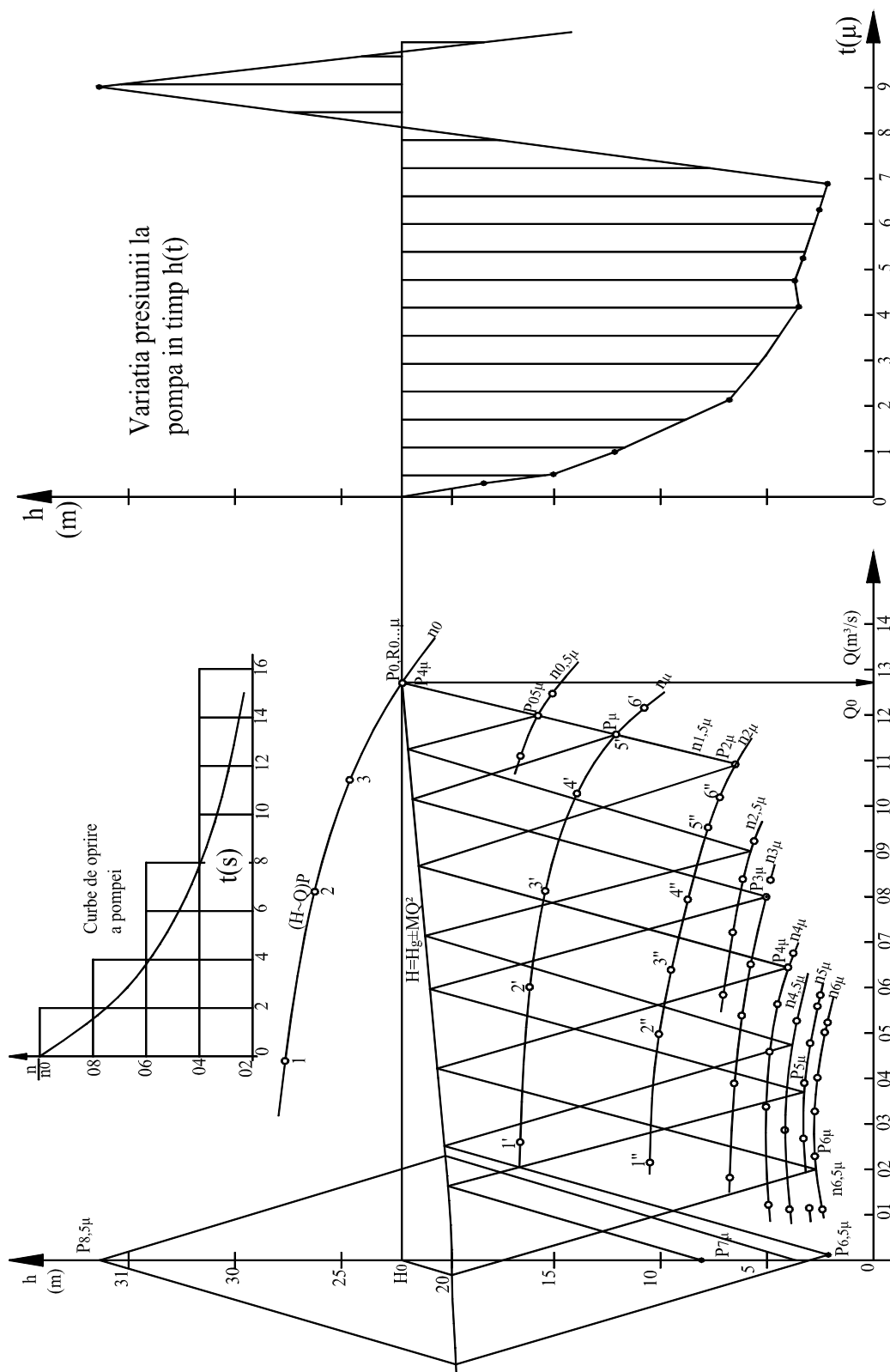


Fig. 10.44. Soluția grafică a loviturii de berbec



**10.2.** Să se calculeze lovitura de berbec în instalația de pompare din problema 10.1, dacă curba de oprire corespunde fig. 10.45, iar presiunea de vaporizare este  $\frac{p_{vap}}{\gamma} = -7mCA$ .

**Rezolvare:** Calculele sunt identice cu problema 10.1 până la caracteristica pompei la diferite momente, care devine

t (s)	n (rot/ min)	Caracteristica de sarcină							$\frac{n}{n_0}$
2	292,5	Q	0,167	0,382	0,521	0,639	0,735	0,792	0,500
		H	7,00	6,50	6,00	5,50	5,00	4,50	

Soluția grafică a loviturii de berbec corespunde fig. 10.45.

Se observă că dreapta caracteristică  $F$ , care pleacă de la rezervor la momentul  $t=3\mu$  întâlnește caracteristica presiunii de vaporizare; mersul calculului corespunzând fig. 10.29 și 10.30. Presiunile extreme sunt foarte mari față de presiunea de regim:  $p_{nom}=22,4mCA$ ,  $p_{max}=76mCA$ ,  $p_{min}=-7mCA$  și suprasolicită conducta. Înfășurătoarea presiunilor extreme în timp tinde la Hg.

Într-o asemenea situație este recomandabilă protejarea conductei cu rezervor de echilibru sau cu pernă de aer.

**10.3.** Să se calculeze variația de nivel în rezervorul de echilibru pentru protecția instalației de pompare din problema 10.2. Rezervorul este amplasat după clapetul de reținere și are diametrul  $D_r=4$  m. Se neglijează pierderile la intrarea și ieșirea din rezervor. Instalația corespunde fig. 10.31.

**Rezolvare:**

**1. Soluția grafică (Schoklitsch).** Se construiesc curbele I-IV, astfel:

-Curba I a pierderilor de sarcină pe conductă

$$hr = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0,02595 \cdot 1706}{1,2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1,880V^2$$

- se alege timp de calcul  $\Delta t = 20s$ ;

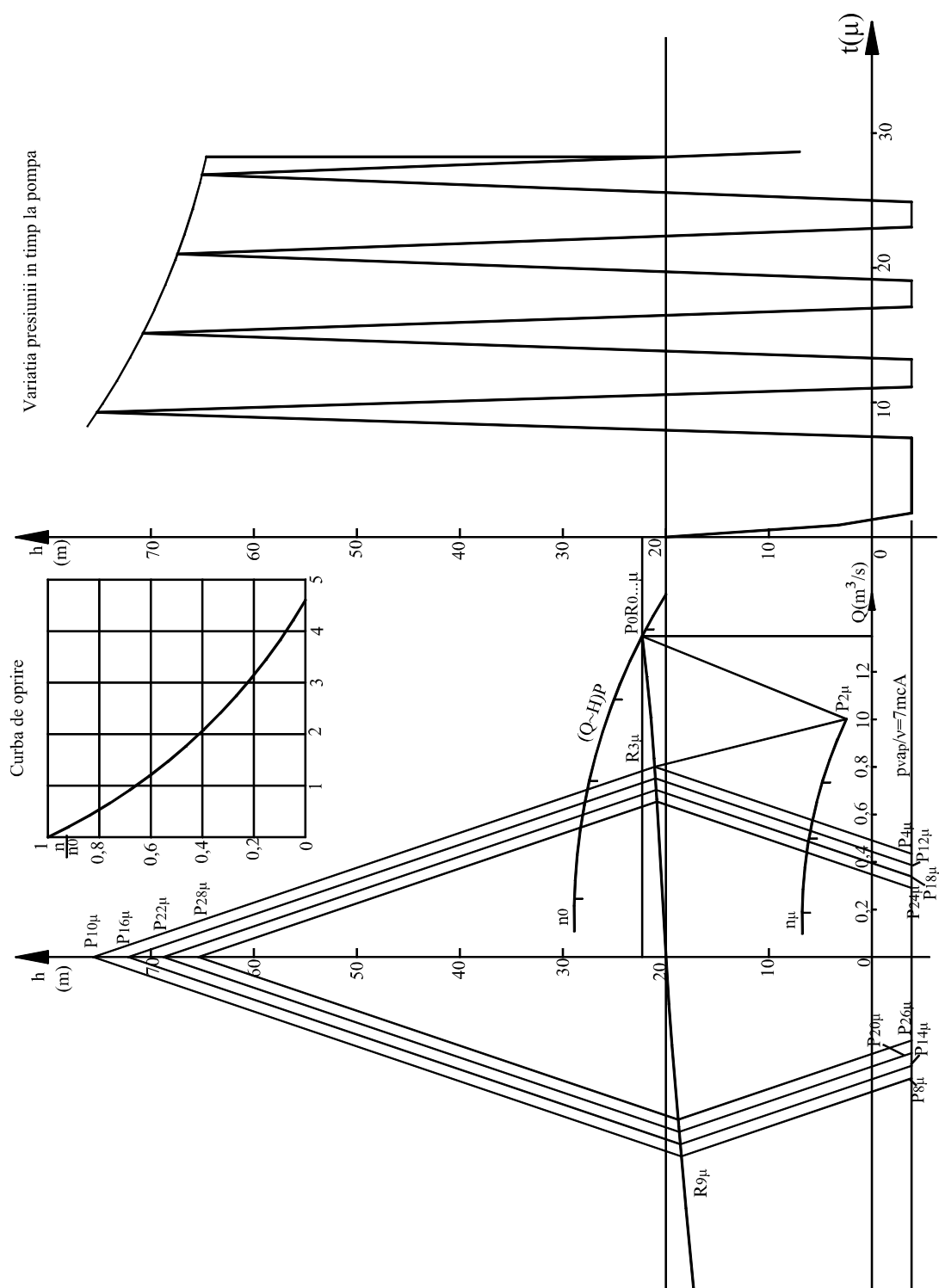


Fig. 10.45. Soluția grafică a loviturii de berbec în instalația de pompare cu apariția cavităției

- curba II

$$\Delta V = \frac{g}{L} \Delta t \cdot z = \frac{9,81 \cdot 20}{1706} z = 0,115z$$

- curba III, volumul intrat (ieșit) în (din) rezervorul de echilibru

$$\Delta W = A \cdot \Delta t \cdot V = \frac{\pi D^2}{4} \Delta t \cdot V = \frac{\pi 1,2^2}{4} 20V = 21,6V$$

- curba IV, curba volumului acumulat în rezervorul de echilibru în funcție de variația de nivel

$$\Delta W(z) = A_c z = \frac{\pi D_r^2}{4} z = \frac{\pi 4^2}{4} z = 12,57 \cdot z$$

- se alege scara pentru reprezentare grafică, astfel:

- pentru cotă  $z \quad 1 \text{ m} = 3 \text{ cm}$
- pentru viteză  $V \quad 1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm}$
- pentru volum  $W \quad 10 \text{ m}^3 = 1 \text{ cm}$
- pentru timp  $t \quad 20 \text{ s} = 4 \text{ mm}$

Originea pentru  $z$  se ia în  $H_g = 20 \text{ m}$ , rezultând punctul de funcționare inițial  $Q_0 = 1,26 \text{ m}^3 / \text{s}$  (vezi problema 10.1), la care corespunde  $V_0 = 1,11 \text{ m/s}$  și  $h r_0 = z_0 = 2,30 \text{ mCA}$ . Elongația nivelului în rezervorul de echilibru rezultă  $\Delta z_{\max} = 4,7 \text{ m}$ , cu  $z_{\max 1} = 2,3 \text{ m}$  și  $z_{\min 1} = -2,4 \text{ m}$ . Al doilea maxim este  $z_{\max 2} = 1,67 \text{ m}$ , iar al doilea minim  $z_{\min 2} = -1,33 \text{ m}$ . Perioada oscilației rezultă  $T = 270 \text{ s}$ . Soluția grafică după Schoklitsch corespunde fig. 10.46.

Utilizarea rezervorului de echilibru reduce variațiile de presiune la  $H_{\max} - H_{\min} = 4,70 \text{ mCA}$ , cu  $H_{\max} = 22,30 \text{ mCA}$  și  $H_{\min} = 17,6 \text{ mCA}$ .

**2. Soluția analitică.** Această rezolvare se bazează pe soluționarea ecuațiilor (10.153) și (10.154) unde

$$m_c = \frac{2g \cdot A \cdot A_c}{L} \left( M_{cc} + \frac{M_v}{A^2} \right) = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 1,131 \cdot 12,57}{1706} \frac{1,88}{1,131^2} = 0,240$$

$$m_u = \frac{2g \cdot A \cdot A_c}{L} \left( M_{cu} + \frac{M_v}{A^2} \right) = 0,240$$

fiind neglijate pierderile de sarcină. Perioada convențională a oscilațiilor este:



$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{A_c}{A}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{1706}{9,81}} \frac{12,57}{1,131}}{\sqrt{1 - \frac{1,88^2}{4} \frac{9,81 \cdot 12,57}{1706 \cdot 1,131}}} = 285 s$$

Pentru o bună vizualizare și înțelegere, ecuațiile (10.153) și (10.154) se rezolvă grafic (fig. 10.47) (nu prin metoda numerică), construind curbele

$$F_1(z) = \frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} = \frac{e^{0,24z}}{1 + 0,24z}$$

$$F_2(z) = \frac{e^{-m_u z}}{1 - m_u z} = \frac{e^{-0,24z}}{1 - 0,24z}$$

și

$$F(z) = e^{m_c z} = e^{0,24 \cdot z}$$

Nivelul în rezervorul de echilibru la funcționare normală, peste înălțimea geodezică de ridicare, este

$$z_0 = H_0 - H_g = 22,30 - 20,00 = 2,30 \text{ m}$$

Cu  $z_0 = 2,3m$ , pe curba  $e^{0,24z}$  se găsește punctul  $M_0$ , iar pe paralela la axa  $z$ , la intersecția cu curba  $F_1(z)$ , punctele  $M_1$  și  $M_2$ , corespunzătoare elongației  $z_1$  și  $z_2$ . Elongația  $z_1 > 0$  este ireală, corespunde unui timp  $t < 0$ . Punctele  $M_2$  și  $M_3$  se găsesc pe curba  $F_2(z)$ , punctul  $M'_2$  asigurând continuitatea elongației în punctul 2. Celelalte puncte, respectiv elongația, se obțin asemănător, rezultând  $z_1 = 6m$ ,  $z_2 = 3m$ ,  $z_3 = 2m$ ;  $z_4 = 1,5m$  și  $z_5 = 1,25m$ . Oscilațiile de nivel în rezervor se amortizează în jurul valorii  $z=0$  sau  $H_g=20mCA$ .

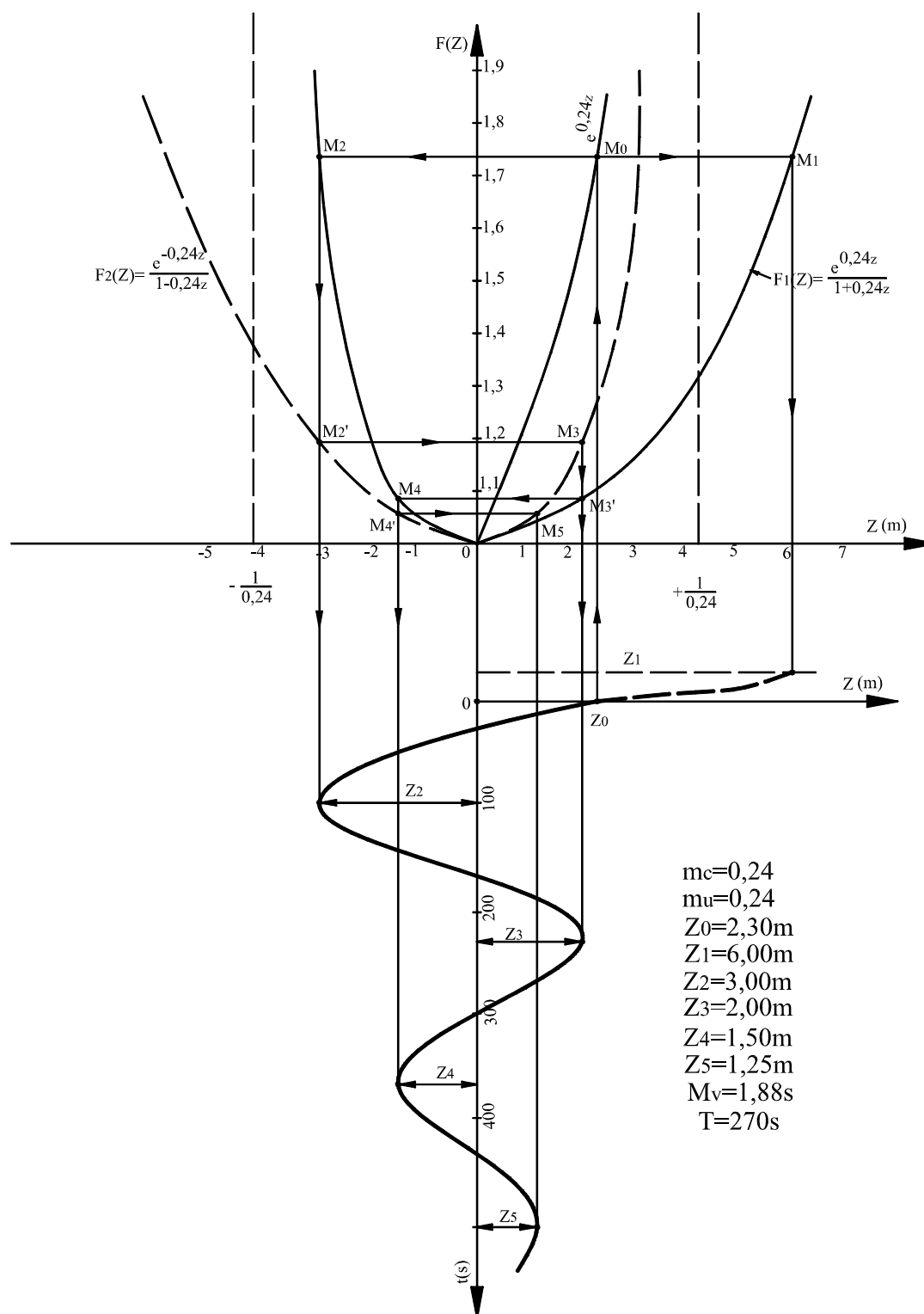


Fig. 10.47. Soluția analitică a oscilațiilor de masă în rezervorul de echilibru

**BIBLIOGRAFIE**

1. **Bartha I.** – *Curs de hidraulică, rotaprint, U.T. Iași, 1993.*
2. **Bartha I.** – *The hydraulic calculus of pipes with uniformly distributed flow, Bul. I.P.Iași, Tom XXXVII (XLI), Fasc. 1-4, 1991.*
3. **Bartha I., Luca M., Popescu St., Popia A.** – *Hidraulică. Culegere de probleme, Rotaprint I.P. Iași, 1991.*
4. **Blidaru E.** – *Hidraulică, vol I, E.D.P., București, 1964.*
5. **Bogárdi J.** – *Hidromechanika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.*
6. **Bogárdi J., Kozák M.** – *Hidraulika, vol. I, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.*
7. **Cioc D.** – *Hidraulica, E.D.P., București, 1975.*
8. **Cioc D., ș.a.** – *Hidraulică. Culegere de probleme, E.D.P. București, 1973.*
9. **Ciugaev R.R.** – *Ghidravlika. Energoizdat, Leningrad, 1984.*
10. **David I.,** - *Hidraulică, vol II, I.P. Timișoara, 1984.*
11. **Dinu I.,** - *Teoria generală a plutitorilor, Ed. Academiei, București, 1974.*
12. **Florea J., Panaitescu V.** - *Mecanica fluidelor, E.D. P., București, 1979.*
13. **Florea J., Zidaru Gh., Panaitescu V.** – *Mecanica fluidelor. Probleme, E.D.P., București, 1976.*
14. **Fox W. R., McDonald T.A.** – *Introduction to fluid mechanics, Jhon Wiley&Sons. Inc, New York, 1973.*
15. **Frenkel Z.** – *Ghidravlika, Gos. Energ., Izd, Moskva, 1956.*
16. **Gheorghe G.** – *Măsurarea debitelor fluide, Ed. Tehnică, București, 1978.*
17. **Hăncu S.** – *Curs de hidraulică, IANB, București, 1976.*
18. **Idelcik E.I.** – *Îndrumător pentru calculul rezistențelor hidraulice, Ed. Tehnică, București, 1984.*
19. **Iamandi C., Petrescu V.** – *Mecanica fluidelor, E.D.P., Bucuresti, 1978.*
20. **Iamandi C. ș.a.** - *Hidraulica instalațiilor. Elemente de calcul și aplicații, Ed. Tehnică, București, 1984.*
21. **Ionescu Gh.D.** - *Introducere în hidraulică, Ed.Tehnică, București, 1977.*
22. **Ionescu Gh.D., Matei P., Todicescu A., Ancușă V., Buculei M.** – *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, E.D.P., București, 1983.*
23. **King W.H., Wisler O.C, Woodburn G.J.** - *Hydraulics, John Wiley, Inc. New York, 1948.*
24. **Kiselev P.G.** - *Îndreptar pentru calcule hidraulice, Ed.Tehnică, București, 1988.*
25. **Mateescu C.** - *Hidraulică, E.D.P., București, 1963.*
26. **Dorin P., Hăncu S., Burghiu V., Cucuaneș V., Giușcă I.** – *Utilaje hidromecanice pentru sistemele de îmbunătățiri funciare, Ed.Ceres, București, 1974.*

- 
27. **Popescu M., Arsenie D.** - *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidro electrice și stații de pompare*, Ed. Tehnică, București, 1987.
  28. **Pöschl Th.** - *Lehrbuch der Hydraulik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924.
  29. **Reynolds A.J.** - *Curgeri turbulente în tehnică*, Ed. Tehnică, București, 1982.
  30. **Shames I.** - *Mechanics of fluids*, McGraw-Hill Book Co.Inc, New York, 1962.
  31. **Săvulescu N.St.** - *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Ed.Academiei, București, 1968.